Partie I.

1) Inégalité triangulaire : $\forall k \in \mathbf{N}, \quad |\mathbf{P}(X=k)-\mathbf{P}(Y=k)| \leqslant \mathbf{P}(X=k)+\mathbf{P}(Y=k)$. $\sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(X=k)$ et $\sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(Y=k)$ sont convergentes, on applique alors le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2) a) $0 \leqslant d(X,Y) \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(X=k) + \sum_{k\in\mathbf{N}} \mathbf{P}(Y=k)\right) = 1$

b) $d(X,Y)=0$ ssi $\forall k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(X=k)=\mathbf{P}(Y=k)$ soit X et Y de même loi.

c) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|P(X=k)-P(Y=k)| = |(\mathbf{P}(X=k)-\mathbf{P}(Z=k))-(\mathbf{P}(Y=k)-\mathbf{P}(Z=k))|$.

L'inégalité triangulaire donne alors : $|P(X=k)-P(Y=k)| \leqslant |P(X=k)-P(Z=k)| + |P(Y=k)-P(Z=k)|$ et donc $d(X,Y) \leqslant d(X,Z)+d(Y,Z)$.

d) Par définition, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ ssi $\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X_n=k)-\mathbf{P}(X=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc on peut d'abord remarquer que $d(X_n,X) \to 0$ ssi $\mathbf{P}(X=k)=0$ pour $k \geqslant N+1$ et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers X si, et seulement si $\mathbf{P}(X=k)=0$ pour $k \geqslant N+1$.
On peut donc considérer que $X(\Omega) \subset [\![0,N]\!]$.

• Si $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en loi vers X, alors : pour tout $k \in [\![0,N]\!]$, $\mathbf{P}(X_n=k)-\mathbf{P}(X=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
En sommant entre 0 et N (et c'est une somme finie) : $d(X_n,X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
• Si $d(X_n,X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors, pour tout $k \in [\![0,N]\!]$:

$$0 \leqslant |\mathbf{P}(X_n=k)-\mathbf{P}(X=k)| \leqslant d(X_n,X)$$

donne $\mathbf{P}(X_n=k)-\mathbf{P}(X=k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ avec le théorème des gendarmes.

Partie II.

1) a) Cours : la ligne i du produit AV est : $\sum_{j=1}^{r} a_{i,j}\times 1 = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{P}_{X_0=i}(X_1=j) = 1$ car $X_1(\Omega) \subset [\![1,r]\!]$ (somme des probabilités).

b) (i) W étant non nul (vecteur propre), une de ses composantes est non nulle, de valeur absolue $a>0$ et donc $|w_{i_0}| \geqslant a > 0$.

(ii) C'est aussi du cours : $AW=\lambda W$. La ligne i_0 de cette égalité donne :

$$\sum_{j=1}^{r} a_{i_0,j} w_j = \lambda w_{i_0}$$

En passant aux valeurs absolues, avec l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda w_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{r} a_{i_0,j} w_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{r} |a_{i_0,j} w_j| = \sum_{j=1}^{r} a_{i_0,j} |w_j|$$

En divisant par $|w_{i_0}|>0$:

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{r} a_{i_0,j} \frac{|w_j|}{|w_{i_0}|}$$

Or, par définition de i_0, $\dfrac{|w_j|}{|w_{i_0}|} \leqslant 1$, donc :

$$\boxed{|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{r} a_{i_0,j} = 1}$$

2) Posons proprement les phrases de récurrence :

$$\mathcal{P}_k : \quad \forall n \in \mathbf{N}, \forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2, \quad \mathbf{P}_{X_n=i}(X_{n+k}=j) = a_{i,j}^{(k)}$$

Pour $k=0$ la relation est triviale puisque $a_{i,j}^{(0)} = 1$ si $i=j$ et 0 sinon (matrice identité).
Pour $k=1$, la relation est vraie par définition de la matrice de transition.

Supposons que la relation soit vraie pour $k \in \mathbf{N}^*$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$.

Il s'agit de montrer que : $\mathbf{P}_{(X_n=i)}(X_{n+k+1}=j) = a_{i,j}^{(k+1)}$: le terme en ligne i et colonne j de la matrice A^{k+1}.

La formule des probabilités totales (FPT par la suite) donne :

$$\mathbf{P}_{(X_n=i)}(X_{n+k+1}=j) = \sum_{\ell=1}^{r} \mathbf{P}_{(X_n=i)\cap(X_{n+1}=\ell}(X_{n+k+1}=j)\mathbf{P}_{X_n=i}(X_{n+1}=\ell)$$

Le rappel fait dans l'énoncé permet d'écrire :

$$\mathbf{P}_{[X_n=i]\cap[X_{n+1}=\ell]}(X_{n+1+k}=j) = \mathbf{P}_{[X_{n+1}=\ell]}(X_{n+1+k}=j)$$

et par hypothèse de récurrence (en remplaçant n par $n+1$) :

$$\mathbf{P}_{[X_n=i]\cap[X_{n+1}=\ell]}(X_{n+1+k}=j) = \mathbf{P}_{[X_{n+1}=\ell]}(X_{n+1+k}=j) = a_{\ell,j}^{(k)}$$

D'autre part : $\mathbf{P}_{X_n=i}(X_{n+1}=\ell) = a_{i,\ell}$ par définition de la matrice de transition.

En conséquence :

$$\mathbf{P}_{(X_n=i)}(X_{n+k+1}=j) = \sum_{\ell=1}^{r} a_{i,\ell}a_{\ell,j}^{(k)}$$

et on reconnaît à droite le terme en ligne i et colonne j du produit matriciel $A \times A^k$.

On a donc bien : $\boxed{\mathbf{P}_{(X_n=i)}(X_{n+k+1}=j) = a_{i,j}^{(k+1)}}$.

On peut passer du sommet i au sommet j dans le graphe ssi $a_{i,j}^{(k)} > 0$ car si B est la matrice d'adjacence du graphe, A^k et B^k ont les mêmes termes > 0 pour tout $k \in \mathbf{N}$.

3) Si tous les coefficients de A^k sont > 0, cela signifie que deux sommets quelconques sont reliés par un chemin et donc que le graphe est connexe, donc que la chaîne de Markov est irréductible.

4) a)

b) $A^2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Pour $j=1$ et $j=3$, $i \in [\![1,\dots 3]\!]$: $a_{i,j}^{(2)} \geqslant \frac{1}{8} \geqslant \frac{1}{6} \times c$ avec $c = 3/4$.

Pour $j=2$, $i \in [\![1,\dots 3]\!]$: $a_{i,j}^{(2)} = \frac{1}{2} \geqslant \frac{2}{3}c$.
Donc on a bien : $a_{i,j}^{(2)} \geqslant c\mu_j$ avec $c = 3/4$ pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$:

$\boxed{A \text{ satisfait la condition de Doeblin avec } \ell = 2,\ c = 3/4 \text{ et } \mu = (1/6 \quad 2/3 \quad 1/6).}$

c) $\boxed{\pi = (1/4 \quad 1/2 \quad 1/4)}$.

d) $E_0 = \mathrm{Vect}({}^{\mathbf{t}}(1 \quad -2 \quad 1))$, $E_{1/2} = \mathrm{Vect}({}^{\mathbf{t}}(1 \quad 0 \quad -1))$ et $E_1 = \mathrm{Vect}({}^{\mathbf{t}}(1 \quad 1 \quad 1))$.

5) • $\mu \in \mathcal{P}_r$. En effet : ses composantes sont positives et $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \mu_j = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{r} m_j = 1$.

• $a_{i,j}^{(\ell)} \geqslant m_j = m\mu_j$ pour tout $(i,j) \in [\![1,r]\!]^2$ par définition de m_j et de μ_j..

6) $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} a_{i,j} \geqslant c\sum_{j=1}^{r} c\mu_j$ donne :

$$1 \geqslant c\sum_{j=1}^{r} \mu_j = c.$$

7) a) $U_{n+1} = U_n A$.

On en déduit : pour $n \in \mathbf{N}$ et $j \in [\![1,r]\!]$, par définition du produit matriciel :

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{k=1}^{r} \mathbf{P}(X_n = k) a_{k,j}.$$

et donc

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j) - \mathbf{P}(X_n = j) = \sum_{k=1}^{r} \left(\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\right) a_{k,j}.$$

Mais on remarque que :

$$\sum_{k=1}^{r} \left(\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\right) c\mu_j = c\mu_j \sum_{k=1}^{r} \left(\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\right) = c\mu_j(1-1) = 0$$

donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = j) - \mathbf{P}(X_n = j) &= \sum_{k=1}^{r} \left(\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\right) a_{k,j} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{r} \left(\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\right) c\mu_j \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)\right) (a_{k,j} - c\mu_j)\end{aligned}$$

b) On en déduit, pour tout $j \in [\![1, r$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, avec l'inégalité triangulaire :

$$|\mathbf{P}(X_{n+1} = j) - \mathbf{P}(X_n = j)| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)| \, |a_{k,j} - c\mu_j|$$

et comme $a_{k,j} - c\mu_j \geqslant 0$:

$$|\mathbf{P}(X_{n+1} = j) - \mathbf{P}(X_n = j)| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)| \, (a_{k,j} - c\mu_j)$$

En faisant la somme sur j et en divisant par 2 :

$$d(X_{n+1}, X_n) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)| \, (a_{k,j} - c\mu_j)$$

soit :

$$d(X_{n+1}, X_n) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)| \sum_{j=1}^{r} (a_{k,j} - c\mu_j)$$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{r} (a_{k,j} - c\mu_j) = \sum_{j=1}^{r} a_{k,j} - c \sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1 - c$ qui ne dépend pas de k, donne :

$$d(X_{n+1}, X_n) \leqslant (1 - c) \frac{1}{2} \times \sum_{k=1}^{r} |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X_{n-1} = k)| = (1 - c) d(X_n, X_{n-1})$$

c) Récurrence.

d) $|u_{n+1}(k) - u_n(k)| \leqslant d(X_{n+1}, X_n) \leqslant K(1 - c)^n$ avec $K = d(X_1, X_0)$.

La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (1 - c)^n$ converge car $0 \leqslant 1 - c < 1$, donc $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} |u_{n+1}(k) - u_n(k)|$ converge, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (u_{n+1}(k) - u_n(k))$ converge absolument, donc converge aussi.

On note $\displaystyle L_k = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1}(k) - u_n(k))$ sa somme.

Pour $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1}(k) - u_n(k) = u_N(k) - u_0(k)$$

Donc $\boxed{\displaystyle u_N(k) = u_0(k) + \sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1}(k) - u_n(k) \text{ converge}}$ vers $u_0(k) + L_k$ quand $N \to +\infty$.

e) Notons, pour $k \in [\![1, r]\!]$, $\displaystyle p_k = \lim_{n \to +\infty} u_n(k)$.

Comme $u_n(k) \in [0, 1]$ pour tout n, $p_k \in [0, 1]$ par passage à la limite.

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} u_n(k) = 1$, par passage à la limite : $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} p_k = 1$.

On peut donc considérer une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![1, r]\!]$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in [\![1, r]\!], \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k = \lim_{n \to +\infty} u_n(k)$$

Alors : $\forall k \in [\![1, r]\!], \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = p_k = \mathbf{P}(X = k)$ signifie : $\boxed{(X_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge en loi vers } X.}$

8) La relation $\forall n \in \mathbf{N} \quad U_{n+1} = U_n A$ implique par passage à la limite : $\pi = \pi A$.

9) Sans vraiment de raisonnement par l'absurde : considérons une chaîne de Markov partant d'une loi quelconque donnée par U_0 et X la variable de loi π (probabilité invariante).

   Avec un raisonnement analogue à la question 7b, on aura :

$$d(X_{n+1}, X) \leqslant (1 - c)d(X_n, X) \leqslant (1 - c)^n d(X_1, X).$$

   autrement dit $d(X_n, X) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en loi vers X.
   Partons à présent d'une variable X_0 correspondant à une loi de probabilité invariante π'.
   Alors : d'une part $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{n+1} = \pi'$ car π' est une loi de probabilité invariante, et d'autre part, $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en loi vers X de loi π.
   Donc (unicité de la limite) : $\pi' = \pi$: la chaîne de Markov n'admet qu'une seule loi de probabilité invariante.

10) a) $W = {}^{\mathbf{t}}(w_1 \quad \ldots \quad w_r) \neq 0_{\mathcal{M}_{r,1}(\mathbf{R})}$ donc une des composante de W est non nulle.
   Si $w_{i_0} \neq 0$, en choisissant $U_0 = E_{i_0}$ le i_0-ème élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{1,r}(\mathbf{R})$, on obtient $U_0 W = w_{i_0} \neq 0$ et $U_0 \in \mathcal{P}_r$.

   b) Récurrence simple avec les phrases : $\mathcal{P}_n$: « $U_{2n}W = U_0 W$ et $U_{2n+1}W = -U_0 W$ » en utilisant bien sûr pour l'hérédité les relations $U_{2n+2} = U_{2n+1}A$ et $U_{2n+3} = U_{2n+2}A$

   c) Si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en loi vers X, les composantes de U_n auraient une limite qui seraient les composante d'un vecteur U non nul.

   On aurait, par passage à la limite : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad U_{2n}W = U_0 W$ implique $UW = U_0 W$ et $\forall n \in \mathbf{N}, \quad U_{2n+1}W = -U_0 W$ implique $UW = -U_0 W$, donc $U_0 W = 0$ ce qui contredit la définition de U_0.

   d) Sachant que $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge en loi vers X, la dernière hypothèse faite est fausse, à savoir que $-1 \in \mathrm{Sp}(A)$.

   Conclusion : $\boxed{-1 \notin \mathrm{Sp}(A)}$