TD 12 - fonctions numériques de deux variables réelles

Quelques corrigés

Exercice 1 - EML

On pose, pour $(x,y) \in \mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $F(x,y) = x^2y + x^2 - \dfrac{1}{2}y^2 - 2x$ et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = x^3 + x - 1$

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]0,1[$

Pour $x \geqslant 0$, $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
$g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
g est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; d'après le **théorème de la bijection**, est bijective de $\mathbb{R}_+$ vers $g(\mathbb{R}_+) = [-1, +\infty[$.
Comme $0 \in g(\mathbb{R}_+)$, il existe une unique valeur $\alpha \in \mathbb{R}_+$ telle que $g(\alpha) = 0$.

$g(1) = 1$, $g(0) = -1$ donc $\boxed{\alpha \in]0,1[}$.

2. Justifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$

F est polynomiale, donc de classe C^2 sur Ω.

3. Montrer que F admet (α, α^2) pour unique point critique.

Pour $(x,y) \in \Omega, \nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy + 2x - 2 \\ x^2 - y \end{pmatrix}$

$\nabla F(x,y) = {}^{\mathbf{t}}(0,0)$ si et seulement si : $y = x^2$ et $xy + x - 1 = 0$,

ce qui donne $y = x^2$ et $g(x) = 0$, soit $\boxed{x = \alpha \text{ et } y = \alpha^2}$.

4. Ecrire la matrice hessienne H de F en son point critique.

$$\nabla^2 F(\alpha, \alpha^2) = \begin{pmatrix} 2\alpha + 2 & 2\alpha \\ 2\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

5. Justifier que H admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 vérifiant : $\lambda_1\lambda_2 = -6\alpha^2 - 2$

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(H) \quad & H - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \iff (2\alpha + 2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4\alpha^2 = 0 \\ & \iff \lambda^2 - (2\alpha + 1)\lambda - 6\alpha^2 - 2 = 0 \quad (E) \end{aligned}$$

H est symétrique, donc diagonalisable, donc l'équation (E) admet des solutions réelles.
Si on note λ_1, λ_2 les solutions (éventuellement confondues) de (E), elles vérifient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha + 1 \\ \lambda_1\lambda_2 = -6\alpha^2 - 2 \end{cases}$$

On en déduit : λ_1 et λ_2 sont non nulles et de signe opposés (en particulier elles sont distinctes).

6. Quelle est la nature du point critique (α, α^2) de F ?

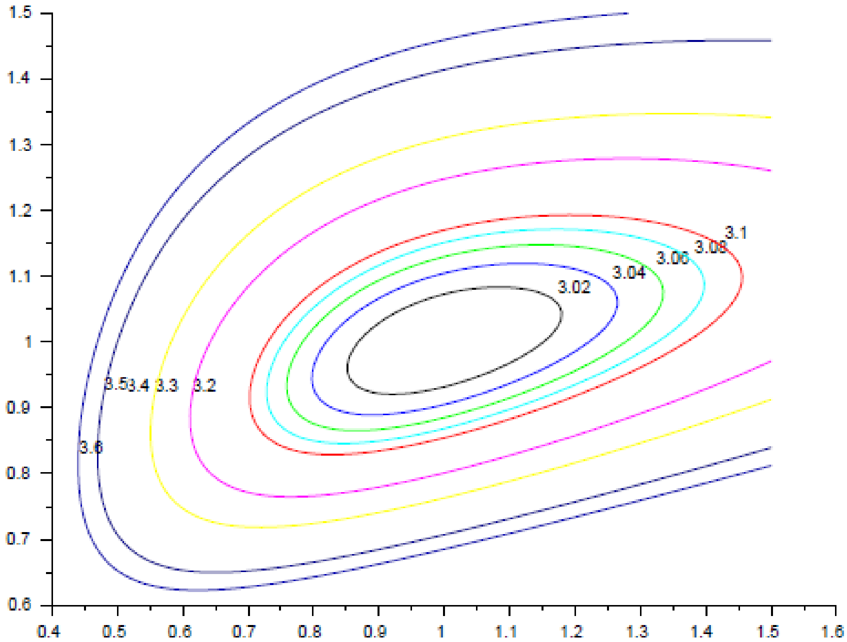
(α, α^2) correspond donc à un point-selle pour F (ou point col).

Exercice 2 - Ecricome

On considère la fonction f définie sur l'ouvert $\mathcal{O} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{O}, \quad f(x, y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

1. On utilise Python pour tracer les lignes de niveau de la fonction f et on obtient le graphe suivant :



Que pouvez-vous conjecturer concernant l'existence d'un extremum local de la fonction f ?

f semble avoir un minimum local en $(1, 1)$ de valeur $f(1, 1) = 3$

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathcal{O}$, puis calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

$(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y^{-2}$, $(x, y) \mapsto y^2$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont des fonctions usuelles de classe C^2 sur Ω, donc f est de classe C^2 par somme et produit de fonctions de classe C^2.

Pour $(x, y) \in \Omega$,

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$\partial_2 f(x, y) = \frac{-2x}{y^3} + 2y$$

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = \frac{2}{x^3}$$

$$\partial_{1,2}^2 f(x, y) = \frac{-2}{y^3} = \partial_{1,2}^2 f(x, y) \quad \text{(théorème de Schwarz)}$$

$$\partial_{2,2}^2 f(x, y) = \frac{6x}{y^4} + 2$$

3. Montrer que f admet un unique point critique A que l'on déterminera.

$$\nabla f(x,y) = {}^{\mathbf{t}}(0,0) \iff \begin{cases} x^2 = y^2 \\[2ex] -\dfrac{x}{y^3} + y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \quad \text{car } x > 0, \quad y > 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{y^2} + y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\[2ex] y^3 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{x = y = 1}.$$

Donc $\boxed{\text{l'unique point critique de } f \text{ est le point } A(1,1)}$.

4. Montrer que la matrice hessienne de f au point A est $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

En déduire que f admet bien un extremum en A dont on précisera la nature (maximum ou minimum) et la valeur.

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1} f(1,1) & \partial^2_{1,2} f(1,1) \\ \partial^2_{2,1} f(1,1) & \partial^2_{2,2} f(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(H) \quad & H - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \iff (2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0 \\ & \iff \lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0 \quad (E) \\ & \iff \lambda = 12 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4. \end{aligned}$$

H admet deux valeurs propres strictement positives, donc A correspond à un <u>minimum local</u> de valeur $\boxed{f(1,1) = 3}$