

Concours blanc - épreuve 1 - sujet 2 : type EDHEC

Corrigé

Total sur 79,5 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points

Exercice 1 - EDHEC 2024

19 points

Dans tout l'exercice, la lettre  $n$  désigne un entier naturel.

On pose  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx$  et on a en particulier  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$

1. a. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que :  $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x}$  1 point

Soit  $x \in [0, 1]$ , et  $a, b$  les réels vérifiant l'égalité de l'énoncé, alors

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{a}{2-x} + \frac{b}{2+x} = \frac{a(2+x) + b(2-x)}{4-x^2} = \frac{2(a+b) + (a-b)x}{4-x^2}$$

donc par identification des coefficients,  $a - b = 0$  soit  $a = b$  et  $2(a + b) = 1$  donc

$a = b = \frac{1}{4}$

- b. En déduire que  $u_0 = \frac{1}{4} \ln(3)$  1,5 points

En utilisant la question précédente :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{4(2-x)} dx + \int_0^1 \frac{1}{4(2+x)} dx = \frac{1}{4} \left( [-\ln|2-x|]_0^1 + [\ln|2+x|]_0^1 \right)$$

donc  $u_0 = \frac{\ln(2) + \ln(3) - \ln(2)}{4}$  soit  $u_0 = \frac{\ln(3)}{4}$

2. Calculer  $u_1$  1,5 points

Il suffit de remarquer que  $\frac{x}{4-x^2}$  est de la forme  $\frac{u'}{u}$  plus précisément  $-\frac{1}{2} \times \frac{-2x}{4-x^2}$  et donc une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{4-x^2}$  est la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $x \mapsto -\frac{\ln(4-x^2)}{2}$

donc  $u_1 = \left[ -\frac{\ln(4-x^2)}{2} \right]_0^1 = \frac{-\ln(3) + \ln(4)}{2} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$  soit  $u_1 = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

3. a. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $4u_n - u_{n+2}$  explicitement en fonction de  $n$  1,5 points

Pour tout entier  $n, 4u_n - u_{n+2} = \int_0^1 \frac{4x^n}{4-x^2} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{4x^n - x^{n+2}}{4-x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{4-x^2} dx$

donc  $4u_n - u_{n+2} = \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$  soit  $4u_n - u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

- b. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie la valeur de  $u_n$  à l'appel de `suite(n)`. 2 points

```
def suite(n):
    if (-1)**n == 1 :
        u = np.log(3) / 4
        for k in range(2, n + 1, 2) :
            u = 4 * u - ...
    else :
        u = np.log(2 / np.sqrt(3))
        for k in range(3, n + 1, 2) :
            u = 4 * u - ...
    return u
```

D'après la question précédente, pour tout entier  $n, u_{n+2} = 4u_n - \frac{1}{n+1}$ . Le programme calcule les termes de  $u_n$  par récurrence en incrémentant  $n$  de 2 à chaque étape, d'où le paramètre 2 pour le saut dans le `range` à chaque fois.

Le programme teste la parité à l'aide de  $(-1)^n$ , puis si  $n$  est pair, on calcule  $u_n$  en utilisant la formule de récurrence et en partant de  $u_0$ . Si  $n$  est impair, on fait de même en partant de  $u_1$

Donc d'après la question précédente encore, dans chaque cas il suffit de compléter avec  $1/(n-1)$  car  $u_n = 4u_{n-2} + \frac{1}{n-1}$

4. a. Utiliser la définition de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour établir l'encadrement suivant :

2 points

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ , alors  $0 \leq x^2 \leq 1$  par croissance de la fonction carré sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $3 \leq 4 - x^2 \leq 4$  puis par décroissance de la fonction inverse

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{3} \text{ et en multipliant par } x^n \geq 0 \text{ car } x \in [0, 1], \text{ on obtient : } \frac{x^n}{4} \leq \frac{x^n}{4-x^2} \leq \frac{x^n}{3}$$

alors par croissance de l'intégrale (car  $a < b$ ),

$$\int_0^1 \frac{x^n}{4} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{3} dx \text{ soit } \frac{1}{4} \int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx$$

$$\text{or } \int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 \text{ donc}$$

$$\frac{1}{4(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{3(n+1)}$$

- b. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi que la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

0,5 point

La suite  $(u_n)$  est encadrée par les suites  $\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\left(\frac{1}{3(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  qui convergent toutes les deux vers 0. D'après le théorème des gendarmes, on conclut que la suite

$$(u_n) \text{ converge aussi vers } 0$$

- c. La série de terme général  $u_n$  est-elle convergente ou divergente? Pour quelle raison?

2 points

D'après la question 4.a.,  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4(n+1)} \leq u_n$

de plus,  $\frac{1}{4(n+1)} \sim \frac{1}{4n}$  car  $\frac{\frac{1}{4n}}{\frac{1}{4(n+1)}} = \frac{4(n+1)}{4n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$

et  $\frac{1}{n}$  est le terme général d'une série divergente (série harmonique)

donc par linéarité  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4} \times \frac{1}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n}$  diverge également

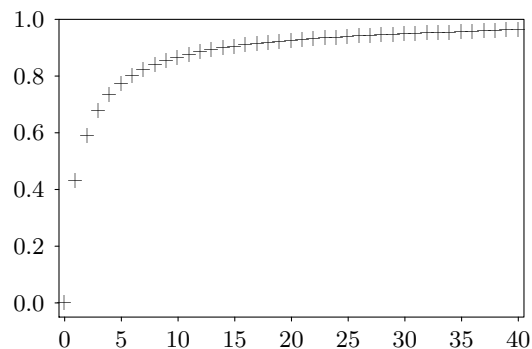
donc par comparaison de séries à terme positifs (équivalents puis inégalité) on en déduit que

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4(n+1)}$  puis  $\sum_{n \geq 1} u_n$  divergent et donc

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge}$$

5. a. On considère le script suivant qui utilise la fonction déclarée plus haut :

```
x = np.arange(0,41)
u = [] # liste vide
for n in range(41):
    u.append(3 * n * suite(n))
plt.plot(x,u, '+')
plt.show()
```



Ce script renvoie le graphique suivant :

Laquelle des quatre conjectures suivantes peut-on émettre quant au comportement de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au voisinage de  $+\infty$ ?

**A :**  $u_n \underset{+\infty}{\sim} 3n$

**B :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

**C :**  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$

**D :**  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

1,5 points

Ce programme affiche les points de coordonnées  $(n, 3nu_n)$  pour  $n$  allant de 0 à 40. On voit que l'ordonnée des points s'approche de 1 et on conjecture donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1$ , c'est-à-dire  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$

- b. Etablir, grâce à une intégration par parties, l'égalité suivante :

2 points

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $[0, 1]$  par :  $\forall x \in [0, 1], f(x) = \frac{1}{4-x^2}$  et  $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$   
 les fonctions  $f$  et  $g$  sont  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et  $\forall x \in [0, 1], f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$  (forme  $-\frac{u'}{u^2}$ ) et  $g'(x) = x^n$   
 donc par intégration par parties,  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4-x^2} dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{(n+1)(4-x^2)} \right]_0^1 - \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$

donc 
$$u_n = \frac{1}{3(n+1)} - \frac{2}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

c. Montrer par encadrement que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx = 0$  2 points

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , comme nous l'avons montré à la question 4.a., pour tout  $x \in [0, 1]$  :

$$0 \leq \frac{1}{4-x^2} \leq \frac{1}{4} \text{ et donc } 0 \leq \left( \frac{1}{4-x^2} \right)^2 \leq \left( \frac{1}{4} \right)^2 \text{ par croissance de la fonction carré sur } \mathbb{R}_+$$

$$\text{soit } 0 \leq \frac{1}{(4-x^2)^2} \leq \frac{1}{16} \text{ et donc } 0 \leq \frac{x^n}{(4-x^2)^2} \leq \frac{x^n}{16} \text{ car } x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0$$

$$\text{donc par croissance et positivité de l'intégrale (} a < b \text{), } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{9} dx$$

$$\text{d'où (cf. 3.a. pour } \int_0^1 x^{n+2} dx \text{) : } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx \leq \frac{1}{9(n+3)} \text{ et alors comme } \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} \text{ est}$$

encadrée par 0 et un terme qui converge vers 0, on peut conclure que 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} = 0$$

d. Vérifier la conjecture établie à la question 5.a. 1,5 points

$$\text{D'après la question 5.b., } 3nu_n = \frac{3n}{3(n+1)} - \frac{6n}{(n+1)} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2} dx$$

$$\text{or } \frac{3n}{3(n+1)} = \frac{n}{n+1} \text{ et comme vu à la question 4.c. } n+1 \sim n \text{ donc } \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$$

$$\text{donc } \frac{6n}{n+1} = 6 \times \frac{n}{n+1} \rightarrow 6 \text{ et donc par opérations sur les limites (avec 5.c.) } 3nu_n \rightarrow 1 - 6 \times 0 = 1$$

soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3nu_n = 1$  et donc par définition 
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n} \text{ conformément à la conjecture de la question 5.a.}$$

## Exercice 2 - EDHEC 2023

13 points

On considère deux réels  $a$  et  $b$  ainsi que la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

1. a. Montrer que si  $a = b$ , alors  $A$  ne possède qu'une seule valeur propre. 0,5 point

La matrice  $A$  est triangulaire (supérieure) donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux :  $\text{Sp}(A) = \{a, b\} = \{a\}$  car  $a = b$  ici

donc 
$$\text{dans ce cas (} a = b \text{), } A \text{ n'a qu'une seule valeur propre (à savoir } a \text{)}$$

b. En déduire par l'absurde que, si  $a \neq b$ , la matrice  $A$  n'est pas diagonalisable. 1,5 points

Supposons que  $A$  soit diagonalisable, alors il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  inversible et une matrice  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  diagonale telle que  $A = PDP^{-1}$

de plus, les coefficients diagonaux de  $D$  sont valeurs propres de  $A$   
 donc, d'après la question précédente,  $D = \text{Diag}(a, a)$ , i.e.  $D = aI_2$

par conséquent,  $A = P(aI_2)P^{-1} = aPI_2P^{-1} = aPP^{-1} = aI_2$ , ce qui est contradictoire avec la définition de  $A$  donc notre hypothèse de départ est fautive et donc dans ce cas ( $a = b$ ),  $A$  n'est pas diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que  $a \neq b$

a. Quelles sont les valeurs propres de  $A$ ?

0,5 point

Comme on l'a vu à la question 1.a., les valeurs propres de  $A$  sont  $a$  et  $b$ . Cette fois, il y en a deux (étant donné que  $a$  et  $b$  sont supposés distincts).

b. Calculer  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ . Qu'en déduire concernant les vecteurs  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$ ? 1 point

On calcule :  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $A \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b(b-a) \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$

on en déduit que  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $a$  et que  $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$

est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $b$  (car les vecteurs sont non nuls).

c. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ [-2mm]b-a \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  puis écrire la matrice  $P$  de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  à la base  $\mathcal{B}$  2 points

Soit  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  alors  $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (b-a)\mu = 0 \end{cases}$

donc  $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$  car  $b-a \neq 0$  par hypothèse donc  $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$

donc la famille  $\mathcal{B}$  est libre, comme de plus elle est constituée de 2 vecteurs de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  et que  $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ , on en déduit que la famille  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ .

La matrice de passage  $P$  de la base canonique de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  à la base  $\mathcal{B}$  est la matrice des vecteurs de  $\mathcal{B}$  décomposés selon la base canonique soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix}$$

*Nota bene* : on aurait pu dire que  $\mathcal{B}$  est libre car composée de deux vecteurs non proportionnels (car  $a \neq b$ ) ou encore que  $\mathcal{B}$  est composée de deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes (car  $a \neq b$ ) donc ils forment une famille libre.

d. Déterminer une matrice diagonale  $D$  telle que  $AP = PD$ , puis conclure que  $A$  est diagonalisable.

On pose  $D = \text{diag}(a, b)$  et on calcule,

1,5 points

$$AP = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b-a) \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b(b-a) \end{pmatrix}$$

donc  $AP = PD$  et étant donné que  $P$  est inversible (c'est une matrice de passage d'une base à une autre), on en déduit que  $A = PDP^{-1}$  et donc que  $A$  est diagonalisable.

3. On considère deux variables aléatoires,  $X$  et  $Y$ , indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$

- a. Etablir l'égalité :  $P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$  1,5 points

On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements  $([Y = n])_{n \in \mathbb{N}^*}$  :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = Y) \cap (Y = n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y = n))$$

ce qui donne bien, par indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n)$$

Remarque : on peut aussi écrire  $(X = Y) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ([X = n] \cap [Y = n])$  et passer aux probabilités en utilisant l'incompatibilité puis l'indépendance.

- b. En déduire explicitement  $P(X = Y)$  2 points

Comme  $X$  et  $Y$  suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre  $\frac{1}{2}$ , on déduit de la question précédente :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 \quad \text{par relation de Chasles} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{car il s'agit d'une série géométrique convergente de raison } \frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où finalement  $P(X = Y) = \frac{1}{3}$

4. Soit  $A(X, Y)$  la matrice aléatoire définie par  $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$

- a. Déterminer la probabilité  $p$  pour que  $A(X, Y)$  ne soit pas diagonalisable. 1 point

D'après les questions 1.b. et 2.d.,  $A(X, Y)$  est non diagonalisable si et seulement si  $X = Y$ , donc, d'après

la question précédente, la probabilité que  $A(X, Y)$  ne soit pas diagonalisable est  $p = \frac{1}{3}$

- b. On considère le script Python suivant : 1,5 points

```
m=int(input("Entrez une
valeur entière pour m : "))
c=0
for k in range(m):
    X=rd.geometric(1/2)
    Y=rd.geometric(1/2)
    if X==Y:
        c=c+1
i=1-c/m
print(i)
```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel  $m$ , de quel réel le contenu de la variable  $i$  est-il proche ?

Le programme effectue  $m$  simulations des variables aléatoires  $X$  et  $Y$ . Le réel  $c/m$  est la proportion de simulations où  $X$  et  $Y$  prennent des valeurs identiques. Pour  $m$  grand, c'est donc une valeur approchée de  $p = P(X = Y)$

étant donné que  $i = 1 - c/m$ , on en déduit que pour  $m$  grand,

$i$  est une valeur approchée de  $1 - p = P(X \neq Y)$ , i.e.  $\frac{2}{3}$

d'après la question précédente.

### Exercice 3 - EDHEC 2021

15,5 points

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

#### Partie 1

1. Justifier que  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$

0,5 point

$f$  est une fonction polynomiale, donc elle de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$

2. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$

1 point

En dérivant selon  $x$ , on trouve  $\partial_1 f(x, y) = 3x^2 - 3y$  et selon  $y$ ,  $\partial_2 f(x, y) = 3y^2 - 3x$

b. Déterminer les points critiques de  $f$

2 points

Les points critiques de  $f$  sont les couples  $(x, y)$  qui annulent le gradient :  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$

on doit donc résoudre :

$$\begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } x^3 = 1 \end{cases}$$

car  $x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$  puisque la fonction cube est bijective et  $1^3 = 1$

donc  $f$  admet deux points critiques :  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$

3. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$

1 point

On dérive les dérivées partielles d'ordre 1 trouvée plus haut et on obtient :

$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = 6x$ ,  $\partial_{2,2}^2 f(x, y) = 6y$  et  $\partial_{1,2}^2 f(x, y) = -3 = \partial_{2,1}^2 f(x, y)$  d'après le théorème de Schwarz

b. Vérifier que  $f$  ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

3 points

D'après la question précédente, la matrice hessienne de  $f$  en  $(x, y)$  vaut :

$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$  et comme  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert, si  $f$  admet un extremum local en un point, alors  $f$

admet un point critique en ce point. Nous allons donc étudier les valeurs propres des matrices hessiennes aux deux points trouvés à la question précédente :

- Au point  $(0, 0)$ ,  $\nabla^2 f(0, 0) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix}$ .

ainsi,  $\lambda$  est valeur propre de  $\nabla^2 f(0, 0) \Leftrightarrow \det(\nabla^2 f(0, 0) - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 9 = 0$   
 $\Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3$  ou  $\lambda = 3$

les deux valeurs propres de  $\nabla^2 f(0, 0)$  sont 3 et  $-3$  qui sont de signes opposés et donc par propriété

$f$  n'a pas d'extremum au point  $(0; 0)$  (il s'agit d'un point col/selle).

- Au point  $(1, 1)$ ,  $\nabla^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$  dont les valeurs propres sont les racines du polynôme :

$$\det(\nabla^2 f(1, 1) - \lambda I_2) = \mathit{mathrmdet} \left( \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -3 \\ -3 & 6 - \lambda \end{pmatrix} \right) = (6 - \lambda)^2 - 3^2 = (6 - \lambda - 3) \cdot (6 - \lambda + 3) =$$

$$(3 - \lambda)(9 - \lambda)$$

les deux valeurs propres de  $\nabla^2 f(1, 1)$  sont 3 et 9 et sont donc strictement positives donc, par propriété :

$f$  admet un minimum local en  $(1, 1)$  qui vaut  $f(1, 1) = -1$

4. Cet extremum est-il global?

1 point

$f(1, 1) = -1$  n'est pas un minimum global puisque  $f(0, -2) = -8 < f(1, 1)$

*Nota bene* : avec les termes  $x^3$  et  $y^3$  (qui prédominent sur les termes en  $x$  et  $y$ ) on comprend que la fonction peut prendre toutes les valeurs de  $-\infty$  à  $+\infty$

**Partie 2**

On note  $g$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x, 1)$

5. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 4, l'équation  $g(x) = n$ , d'inconnue  $x$ , possède une unique solution que l'on notera  $u_n$  3 points

$g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car polynomiale et  $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 3x^2 - 3$

alors  $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$  (par croissance de  $x \mapsto \sqrt{x}$ )  $\Leftrightarrow x \notin ]-1, 1[$

de plus  $g(x) = x(x^2 - 3) + 1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$

donc par opérations sur les limites

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$  (pas indispensable) et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

de plus  $g(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) + 1 = 3$  et  $g(1) = 1 - 3 + 1 = -1$  d'où le tableau :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$3$	$-1$	$+\infty$	

On en déduit donc que :

- d'une part  $\forall x < 1, g(x) \leq 3$  et donc que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 4 : l'équation  $g(x) = n$  n'a pas de solution dans  $] -\infty, 1[$
- d'autre part  $g$  réalise une bijection (car continue et strictement croissante sur cet intervalle) de  $[1, +\infty[$  sur  $[g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)[ = [-1, +\infty[$  et comme tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 4 appartient à  $[-1, +\infty[$ ,  $n$  admet un unique antécédent par  $g$ , autrement dit l'équation  $g(x) = n$  possède une unique solution dans  $[1, +\infty[$ , que l'on notera  $u_n$

6. On note  $h$  la restriction de  $g$  à  $[1, +\infty[$

- a. Dresser le tableau de variations de  $h^{-1}$  1 point

Comme nous l'avons vu à la question précédente,  $h$  réalise une bijection, continue et strictement croissante de  $[1, +\infty[$  sur  $[-1, +\infty[$ , donc par propriété sa bijection réciproque  $h^{-1}$  est elle aussi strictement croissante de  $[-1, +\infty[$  sur  $[1, +\infty[$ , d'où son tableau de variation :

$x$	$-1$	$+\infty$
$h^{-1}(x)$	$1$	$+\infty$

- b. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  1 point

Par définition de  $u_n, g(u_n) = h(u_n) = n \Rightarrow u_n = h^{-1}(n)$

de plus (la propriété n'est pas officiellement dans notre programme), on comprend de la question précédente que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = +\infty$  donc par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} h^{-1}(n) = +\infty$$

Option B : comme nous l'avons vu  $g(u_n) = n$  i.e.  $u_n^3 - u_n + 1 = n$  et donc  $u_n^3 = n + u_n - 1$  donc  $u_n^3 \geq n$  comme  $u_n \in [1, +\infty[$  donc par théorème des gendarmes (version infinie),  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^3 = +\infty$

puis on obtient le résultat par composition avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{3}} = +\infty$

- c. En déduire, en revenant à la définition de  $u_n$ , le réel  $\alpha$  pour lequel on a :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$  2 points

Comme nous l'avons évoqué à la question précédente, la définition de  $u_n$  donne

$$n = g(u_n) = u_n^3 - 3u_n + 1 = u_n^3 \left( 1 - \frac{3}{u_n^2} - \frac{1}{u_n^3} \right)$$

donc puisque d'après la question précédente

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors par opérations  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{u_n^3} = 1$  et la fonction  $x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$  est continue sur  $]0, +\infty[$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{u_n^3} \right)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} = 1$  et  $\left( \frac{n}{u_n^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{(u_n^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{n^{\frac{1}{3}}}{u_n}$  donc nous avons montré que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{u_n} = 1$

soit par définition  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$  et

le réel  $\alpha$  pour lequel on a :  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$  est donc  $\alpha = \frac{1}{3}$

Dans ce problème, on identifie une matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  à un réel.

On considère deux urnes  $A$  et  $B$  contenant initialement une boule blanche et une boule noire chacune. On procède à une suite d'épreuves, chaque épreuve consistant à tirer au hasard une boule dans chaque urne, la boule tirée de  $A$  étant remise dans  $B$  et la boule tirée de  $B$  étant remise dans  $A$

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans  $A$  avant la  $(n + 1)^e$  épreuve. On pose :  $a_n = P(X_n = 0)$ ,  $b_n = P(X_n = 1)$ ,  $c_n = P(X_n = 2)$  et  $U_n = (a_n \ b_n \ c_n)$

1. a. Donner les valeurs de  $a_0, b_0$  et  $c_0$  1 point

La variable  $X_0$  correspond au nombre de boules blanches présentes dans  $A$  initialement. D'après l'énoncé, on a  $X_0 = 1$  et donc  $a_0 = 0, b_0 = 1$  et  $c_0 = 0$

- b. Déterminer la loi de  $X_1$  et en déduire les valeurs de  $a_1, b_1$  et  $c_1$  1,5 points

Comme il peut y avoir 0, 1 ou 2 boules blanches, on a  $X_1(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

- $X_1 = 0$  si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule blanche dans l'urne  $A$  et une boule noire dans l'urne  $B$ . Chaque tirage étant indépendant,  $a_1 = P(X_1 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  donc  $a_1 = \frac{1}{4}$

- $X_1 = 2$  si et seulement au premier tirage, on a tiré une boule noire dans l'urne  $A$  et une boule blanche dans l'urne  $B$ . Par indépendance à nouveau :  $c_1 = P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$  donc  $c_1 = \frac{1}{4}$

- enfin  $X_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ ,  $([X_1 = 0], [X_1 = 1], [X_1 = 2])$ , est un système complet d'événements et on a donc :  $b_1 = P(X_1 = 1) = 1 - P(X_1 = 0) - P(X_1 = 2)$  soit  $b_1 = \frac{1}{2}$

Option B : on peut aussi raisonner avec les 4 couples de tirages possibles (tous équiprobables) dont un mène à  $X_1 = 0$ , deux à  $X_1 = 1$  et un à  $X_1 = 2$

- c. Justifier rapidement que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1,  $((X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2))$  est un système complet d'événements. 1 point

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme précédemment : il y a dans l'urne  $A$ , 0, 1 ou 2 boules blanches donc  $X_n(\Omega) \subset \{0, 1, 2\}$  de plus, comme nous l'avons vu avec  $X_1$ , ces trois valeurs admettent une probabilité non nulle et on comprend que ce sera le cas après tous les tirages suivants (pour bien faire, il faudrait le montrer par récurrence :  $a_n > 0, b_n \dots$ ). Finalement  $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$  donc par propriété sur les variables aléatoires :

$([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$  est un système complet d'événements.

- d. En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , la valeur de la somme  $a_n + b_n + c_n$  0,5 point

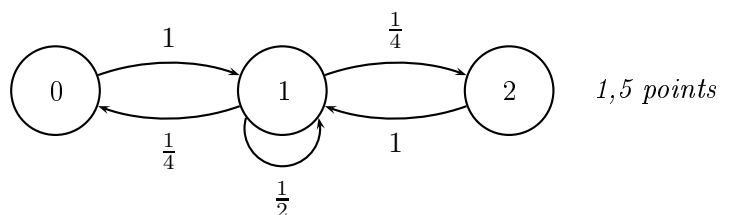
C'est le cas pour  $n = 0$  d'après la question 1.a. et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme  $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$  est un système complet d'événements, par propriété

$a_n + b_n + c_n = P([X_n = 0]) + P([X_n = 1]) + P([X_n = 2]) = 1$  (finalement valable  $\forall n \in \mathbb{N}$ )

On admet dans la suite que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , les probabilités  $a_n, b_n$  et  $c_n$  sont non nulles.

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

- a. Déterminer, en les justifiant, les probabilités conditionnelles  $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$ , pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, 2 \rrbracket^2$ , puis en déduire que le graphe suivant représente la chaîne de Markov décrite ci-dessus.



Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons que l'évènement  $(X_n = 0)$  soit réalisé. Dans ce cas l'urne  $A$  contient deux boules noires et l'urne  $B$  contient forcément deux boules blanches. Le tirage va donc forcément aboutir à ce

que chaque urne contienne une boule noire et une boule blanche,

$$\text{donc } P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) = 0, \quad P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1 \quad \text{et} \quad P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) = 0$$

Supposons maintenant que l'événement  $(X_n = 1)$  soit réalisé. On est alors dans la même situation qu'avant le premier tirage,

$$\text{donc } P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{4}, \quad P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = \frac{1}{4}$$

Supposons maintenant que l'événement  $[X_n = 2]$  soit réalisé. On est alors dans une situation symétrique à celle où  $[X_n = 0]$ , où les rôles des boules noires et des boules blanches sont inversées.

$$\text{On trouve alors } P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = 0, \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1 \quad \text{et} \quad P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) = 0$$

Toutes ces probabilités correspondent bien aux poids des arêtes du graphe donné dans l'énoncé.

- b.** Ecrire la matrice de transition  $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 0,2 \rrbracket^2}$ , où  $m_{i,j} = P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$ , associée à cette chaîne de Markov. On remarquera que la première ligne et la première colonne de cette matrice sont numérotées 0, la deuxième ligne et la deuxième colonne sont numérotées 1 et la troisième ligne et la troisième colonne sont numérotées 2. On vérifiera avant de poursuivre que la somme des éléments de chaque ligne de  $M$  est égale à 1 1 point

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , par définition,  $M$  est la matrice des probabilités conditionnelles :

$$M = (P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j))_{(i,j) \in \llbracket 0,2 \rrbracket^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La somme des éléments de chaque ligne de la matrice est bien égale à 1 ( $M$  est stochastique).

- c.** Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$

D'après la question **1.c.**,  $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$  est un système complet d'événements. 2 points

On peut alors utiliser la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}=0) = P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) + P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) + P(X_n=2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0)$$

i.e.  $a_{n+1} = \frac{b_n}{4}$  avec les notations de l'énoncé et d'après les résultats de la question **2.a.**

$$P(X_{n+1}=1) = P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) + P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) + P(X_n=2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)$$

$$P(X_{n+1}=2) = P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) + P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) + P(X_n=2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)$$

$$\text{soit } b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{b_n}{4}$$

- 3.** Vérifier que les relations trouvées à la question **2.c.** restent valables pour  $n = 0$

0,5 point

D'après **1.a.**  $(a_0, b_0, c_0) = (0, 1, 0)$  et d'après **1.b.**  $(a_1, b_1, c_1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

On vérifie alors  $\frac{b_0}{4} = \frac{1}{4} = a_1 = c_1$  et  $a_0 + \frac{b_0}{2} + c_0 = \frac{1}{2} = b_1$

les relations de la question précédente sont donc bien vérifiées.

- 4. a.** Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , exprimer  $E(X_{n+1})$  en fonction de  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$

1 point

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $X_{n+1}$  est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance et

$$E(X_{n+1}) = 0 \times P(X_{n+1}=0) + 1 \times P(X_{n+1}=1) + 2 \times P(X_{n+1}=2) = b_{n+1} + 2c_{n+1}$$

b. En déduire que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $E(X_{n+1}) = 1$  1 point

D'après la question 2.c.,  $a_{n+1} = c_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc d'après la question précédente,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $E(X_{n+1}) = b_{n+1} + 2c_{n+1} = b_{n+1} + a_{n+1} + c_{n+1}$

donc  $E(X_{n+1}) = 1$  car  $([X_{n+1} = 0], [X_{n+1} = 1], [X_{n+1} = 2])$  est un système complet d'évènement.

c. Etablir finalement la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n + 2c_n = 1$  0,5 point

D'après les deux questions précédentes  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_{n+1} + 2c_{n+1} = 1$  i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n + 2c_n = 1$

de plus  $b_0 + 2c_0 = 1 + 2 \times 0 = 1$  d'où finalement  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $b_n + 2c_n = 1$

5. On pose  $V = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  et on considère, pour tout entier naturel  $n$ , la matrice-ligne  $U_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$  élément de  $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$

a. Montrer que la suite  $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique et donner sa raison. 1,5 points

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule d'abord (le nombre)  $U_n V = (a_n \quad b_n \quad c_n) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2a_n - b_n + 2c_n$

donc  $U_{n+1} V = 2a_{n+1} - b_{n+1} + 2c_{n+1} = 2\frac{b_n}{4} - a_n - \frac{b_n}{2} - c_n + 2\frac{b_n}{4} = -a_n + \frac{b_n}{2} - c_n = \frac{-1}{2}(2a_n - b_n + c_n)$

d'après les résultats de la question 2.c. donc  $U_{n+1} V = -\frac{1}{2}U_n V$  i.e. la suite  $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$

b. Pour tout entier naturel  $n$ , en déduire explicitement  $2a_n - b_n + 2c_n$  en fonction de  $n$  1 point

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , d'après ce qui précède, on a  $2a_n - b_n + 2c_n = U_n V$

or, on a montré que  $(U_n V)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$  et de premier terme

$U_0 V = 2a_0 - b_0 + 2b_0 = -1$  on en déduit que :  $2a_n - b_n + 2c_n = U_n V = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

6. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  puis donner la loi de  $X_n$  1,5 points

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , d'après les questions 1.a. et 2.c. que  $a_n = c_n$  pour tout entier  $n$

d'après la question 4.c.,  $b_n = 1 - 2c_n = 1 - 2a_n$  donc avec le résultat de la question précédente,

$-\left(\frac{-1}{2}\right)^n = 2a_n - b_n + 2c_n = 2a_n - (1 - 2a_n) + 2a_n = 6a_n - 1$  on en déduit que

$$a_n = c_n = \frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \quad \text{puis } b_n = 1 - 2a_n = 1 - \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \quad \text{i.e. } b_n = \frac{1}{3} \left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$$

les valeurs de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  nous permettent de déduire directement la loi de  $X_n$  :

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \quad , \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{3} \left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) \quad , \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)$$

7. Montrer que la suite des variables  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers une variable  $X$  dont on déterminera la loi.  
*Précision* : on dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers  $X$  si  $\forall x \in X(\Omega)$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$  1,5 pts

Comme  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\{0, 1, 2\}$ , pour étudier la convergence en loi de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , il suffit d'étudier les limites des suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

or  $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$  (forme  $q^n$  avec  $|q| = \frac{1}{2} < 1$ )

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{-0 + 1}{6} = \frac{1}{6}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{0 + 2}{3} = \frac{2}{3}$

on en déduit que la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge en loi vers une variable aléatoire  $X$

dont la loi est donnée par :  $(P(X=0), P(X=1), P(X=2)) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$

8. On se propose de retrouver la loi de  $X_n$  par une autre méthode.

a. Calculer  $M^2$  et  $M^3$ , puis vérifier que  $2M^3 = M^2 + M$

1 point

$$M^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{16} & \frac{5}{8} & \frac{3}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\text{on vérifie alors l'égalité de l'énoncé : } M^2 + M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = 2M^3$$

b. En déduire les valeurs propres de  $M$  et donner une base de chacun de ses sous-espaces propres. 6 pts

On déduit de la question précédente que le polynôme  $P(x) = 2x^3 - x^2 - x$  est annulateur de  $M$

or  $P(x) = x(2x^2 - x - 1)$  1 est racine évidente de  $2x^2 - x - 1$ , on trouve donc  $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

de fait  $P(x) = 2x(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$  et on en déduit que  $\text{Sp}(M) \subset \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$

reste alors à vérifier si chacune des racines  $\lambda$  de  $P$  est valeur propre de  $M$  ou non

• cas  $\lambda = -\frac{1}{2}$  alors

$$M + \frac{1}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{donc avec } X = {}^t(x \ y \ z), \left(M + \frac{1}{2}I_3\right)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & | & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ z = -2y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow X \in \{ {}^t(-2y \ y \ -2y), y \in \mathbb{R} \}$  le système possède des solutions non nulles, donc  $-\frac{1}{2}$  est une

valeur propre de  $M$  et  $E_{-\frac{1}{2}}(M) = \text{Vect}({}^t(-2 \ 1 \ -2))$

${}^t(-2 \ 1 \ -2)$  est un vecteur non nul, c'est donc une famille libre, de plus génératrice de  $E_{-\frac{1}{2}}(M)$

par définition du Vect, c'est donc une base de  $E_{-\frac{1}{2}}(M)$

• cas  $\lambda = 0$  alors avec les mêmes notations

$$MX = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow X \in \{ {}^t(x \ 0 \ -x), x \in \mathbb{R} \}$  donc 0 est une valeur propre de  $M$  et

$E_0(M) = \text{Vect}({}^t(1 \ 0 \ -1))$  et pour les mêmes raisons  ${}^t(1 \ 0 \ -1)$  est donc une base de  $E_0(M)$

• enfin, comme c'est le cas pour toutes les matrices stochastiques,  $M^t(1 \ 1 \ 1) = {}^t(1 \ 1 \ 1)$  donc 1 est valeur propre et  ${}^t(1 \ 1 \ 1)$  est une famille libre de  $E_1(M)$

or  $E_1(M)$  ne peut être de dimension supérieure stricte à 1, sinon, il aurait une base et donc une famille libre à plus de deux éléments, et par concaténation de familles libres associées à des vecteurs propres distinctes (avec les vecteurs trouvés précédemment), on pourrait constituer une famille libre à plus de 4 éléments, ce qui est impossible donc  $E_1(M)$  est de dimension 1 et

$$E_1(M) = \text{Vect}({}^t(1 \ 1 \ 1)) \quad \text{et de même} \quad {}^t(1 \ 1 \ 1) \text{ est donc une base de } E_1(M)$$

Remarque : on peut également observer que les colonnes de la matrice  $P$  de la question suivante donnent les potentiels vecteurs propres (et conclure avec les mêmes considérations de dimension).

- c. On pose  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Justifier sans calcul que  $P$  est inversible. 1 point

En notant  $C_1, C_2$  et  $C_3$  les colonnes de  $P$ , d'après la question précédente, ces vecteurs sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes et forment donc une famille libre de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  de plus  $\text{Card}(C_1, C_2, C_3) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$  donc  $(C_1, C_2, C_3)$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  et la matrice  $P$  de fait une matrice de passage, et donc  $P$  est inversible.

- d. On pose  $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $MP$  et  $PD$ , puis conclure que  $M$  est diagonalisable. 1 point

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } PD = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc  $MP = PD$  et comme  $P$  est inversible, alors  $M = PDP^{-1}$  et donc  $M$  est diagonalisable

- e. Etablir la relation suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n M$  1 point

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ alors } U_n M = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_n}{4} & a_n + \frac{b_n}{2} + c_n & \frac{a_n}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \end{pmatrix}$$

d'après les résultats de la question 2.c. soit  $U_{n+1} = U_n M$

- f. En déduire la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = U_0 M^n$  1 point

On montre cette égalité par récurrence, pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $Q(n) : U_n = U_0 M^n$

Initialisation :  $Q(0)$  est vraie  $\Leftrightarrow U_0 = U_0 M^0 \Leftrightarrow U_0 = U_0 I_3 \Leftrightarrow U_0 = U_0$

ce qui est vrai donc  $Q(0)$  est vraie

Hérédité : soit  $n$  un entier tel que  $U_n = U_0 M^n$

alors, d'après la question précédente,  $U_{n+1} = U_n M$  donc  $U_{n+1} = U_0 M^n M = U_0 M^{n+1}$  d'après l'hypothèse de récurrence, i.e.  $Q(n+1)$  est vraie d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$  est vraie i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 M^n$

- g. Donner, sans faire les calculs, une stratégie pour obtenir la loi de  $X_n$  à partir de cette dernière relation (on précisera les différentes étapes permettant de conclure). 1 point

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , par définition de  $a_n, b_n$  et  $c_n$ , la loi de  $X_n$  est donnée par les coefficients de  $U_n$ , il faut donc de calculer  $U_0 M^n$  et en remarquant que  $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , il suffit de calculer la seconde ligne de  $M^n$

ensuite, en utilisant la question 8.d., on peut démontrer par récurrence que  $M^n = P D^n P^{-1}$

enfin, après avoir déterminé  $P^{-1}$  par l'algorithme du pivot de Gauss, et par propriété sur les matrices diagonales on trouve  $D^n$  puis on peut trouver par le calcul la seconde ligne de  $M^n$