

Concours blanc - épreuve 1 - sujet 1 : type Ecricome

Corrigé

Total sur 81 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points

Exercice 1 - Ecricome 2011

26 points

On considère l'application φ définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, y) = xy + \ln(x) \ln(y)$$

I - Etude des zéros de φ

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$
Interpréter graphiquement cette limite. 1,5 points

Par limite d'un produit, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x) = +\infty$ ainsi par addition de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

Puis pour tout $x > 0$, $\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x} - x \ln(x)$ et par produit de limites encore, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty$

et par addition de limites, on obtient alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = -\infty$$

en inversant la dernière limite, on comprend que $x \mapsto -x$ est négligeable devant φ et donc que φ décroît infiniment plus vite vers $-\infty$; en poussant plus l'étude, on pourrait montrer que, au voisinage de $+\infty$, $-x^3 \leq \varphi(x) \leq -x^2$, on parle alors de « branche parabolique » (vers le bas) pour la courbe représentative de φ

2. Prouver que φ est continue sur \mathbb{R}_+ 1 point

D'une part φ est continue sur \mathbb{R}_+^* comme produit et addition de fonctions usuelles continues sur \mathbb{R}_+^*
d'autre part, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x) = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - x^2 \ln(x) = 1 = \varphi(0)$ donc φ est continue en 0

donc φ est continue sur \mathbb{R}_+^* et en 0 donc φ est continue sur \mathbb{R}_+

3. Justifier la dérivabilité de φ sur \mathbb{R}_+^* et calculer sa fonction dérivée. 1 point

φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme produit et somme de fonctions usuelles dérivables (et même \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{R}_+^*

et par dérivation d'un produit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = -2x \ln(x) - x^2 \times \frac{1}{x} = -2x \ln(x) - x$

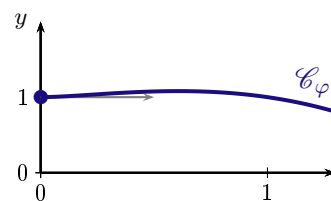
c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = -x(2 \ln(x) + 1)$

4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0 2 points

Pour tout $x > 0$, $\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \frac{1 - x^2 \ln(x) - 1}{x - 0} = \frac{-x^2 \ln(x)}{x} = -x \ln(x)$

or par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = 0$

donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$



ce qui signifie que la courbe représentative de φ admet une tangente horizontale en 0 au voisinage, et comme elle est croissante sur $[0, \dots [$ (nous allons le montrer à la question suivante), on peut proposer l'allure ci-contre au voisinage de 0

5. Dresser le tableau de variations de φ

2 points

D'après la question 3., pour $x > 0$, $\varphi'(x)$ est du signe opposé à celui de $2\ln(x) + 1$ donc pour $x > 0$

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < e^{-1/2}$ (par stricte croissance des fonctions exponentielles et \ln)

de plus $\varphi(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$ et

$$\varphi(e^{-1/2}) = 1 - (e^{-1/2})^2 \ln(e^{-1/2})$$

$$\text{soit } \varphi(e^{-1/2}) = 1 - e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2e}$$

on en déduit donc le tableau de variations de φ :

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	-
φ	1	$1 + \frac{1}{2e}$	$-\infty$

6. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$

3 points

Montrer l'existence d'un unique réel α tel que : $\varphi(\alpha) = 0$ et justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$

d'une part, $\forall x \in [0, e^{-1/2}]$, $\varphi(x) \geq 1 > 0$ donc φ ne s'annule pas sur $[0, e^{-1/2}]$

par ailleurs, φ est continue et strictement décroissante sur $[e^{-1/2}, +\infty[$, donc, d'après le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de $[e^{-1/2}, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x), \varphi(e^{-1/2}) \right[= \left] -\infty, 1 + \frac{1}{2e} \right[$

comme $1 + \frac{1}{2e} > 0$ alors $0 \in \left] -\infty, 1 + \frac{1}{2e} \right[$, donc 0 admet un unique antécédent par φ sur $[e^{-1/2}, +\infty[$

autrement dit, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $[e^{-1/2}, +\infty[$, que l'on nomme α

finalement : φ s'annule en un unique réel α sur \mathbb{R}_+ (et $\alpha > e^{-1/2}$)

de plus : $\varphi(2) = 1 - 4\ln(2) < 1 - 4 \times 0,6 < 0$

et : $\varphi(\sqrt{2}) = 1 - (\sqrt{2})^2 \ln(\sqrt{2}) = 1 - 2\ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right) = 1 - \ln(2) > 0$ car $\ln(2) < 1$

φ étant toujours continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution sur $[\sqrt{2}, 2]$ et même $]\sqrt{2}, 2[$ car $\varphi(\sqrt{2}) \neq 0$ et $\varphi(2) \neq 0$

or α est l'unique solution de cette équation sur \mathbb{R}_+ donc $\sqrt{2} < \alpha < 2$

7. Etablir l'existence de l'intégrale $I = \int_0^\alpha \varphi(x)dx$ et vérifier que : $I = \frac{\alpha(6 + \alpha^2)}{9}$

4 points

D'après la question 2. φ est continue sur \mathbb{R}_+ donc l'intégrale I existe

Nous allons utiliser une intégration par parties pour transformer l'expression $x^2 \ln(x)$, cependant cette expression n'est pas valable en 0 :

donc avec Φ une primitive de φ , par définition $I = \Phi(\alpha) - \Phi(0) = \Phi(\alpha) - \lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t)$ car Φ est continue (car

dérivable puisqu'il s'agit d'une primitive de φ) et donc $I = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\alpha \varphi(x)dx$ et par linéarité de l'intégrale et

existence des limites (comme I existe et $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\alpha 1dx$ existe, la dernière limite existe aussi) :

$$I = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_t^\alpha 1dx - \int_t^\alpha x^2 \ln(x)dx \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\alpha 1dx - \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\alpha x^2 \ln(x)dx = \alpha - \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\alpha x^2 \ln(x)dx$$

alors, on pose pour $x \in]0, \alpha]$: $u(x) = \ln(x)$ donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$ donc $v'(x) = x^2$

les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \alpha]$, pour $t > 0$, on peut donc effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_t^\alpha x^2 \ln(x)dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_t^\alpha - \int_t^\alpha \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_t^\alpha - \int_t^\alpha \frac{x^2}{3} dx = \frac{\alpha^3}{3} \ln(\alpha) - \frac{t^3}{3} \ln(t) - \left[\frac{t^3}{9} \right]_t^\alpha \\ &= \frac{\alpha^3}{3} \ln(\alpha) - \frac{t^3}{3} \ln(t) - \frac{\alpha^3}{9} + \frac{t^3}{9} \end{aligned}$$

or, par croissances comparées, $\lim_{t \rightarrow 0} t^3 \ln t = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\alpha x^2 \ln(x)dx = \frac{\alpha^3}{3} \ln(\alpha) - \frac{\alpha^3}{9}$

et donc $\lim_{t \rightarrow 0} \int_t^\alpha \varphi(x) dx = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} \ln \alpha + \frac{\alpha^3}{9}$ i.e. $I = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} \ln(\alpha) + \frac{\alpha^3}{9}$
 or par définition $\varphi(\alpha) = 0$, donc : $\alpha^2 \ln(\alpha) = 1$

donc $I = \alpha - \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^3}{9} = \frac{9\alpha - 3\alpha + \alpha^3}{9} = \frac{6\alpha + \alpha^3}{9}$ c'est-à-dire : $I = \frac{\alpha(6 + \alpha^2)}{9}$

8. On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : 2 points
- $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$
 - pour tout $n \leq 0$, si $\varphi(a_n)\varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$
 - pour tout $n \leq 0$, si $\varphi(a_n)\varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$

Ecrire un programme avec Python calculant a_7 et b_7

On reconnaît un algorithme de dichotomie permettant d'obtenir des valeurs approchées de α , les suites (a_n) et (b_n) sont les suites des valeurs de « l'intervalle $[a, b]$ » qui se resserre autour de α (et convergent d'ailleurs vers α en vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \alpha \leq b_n$) ainsi a_7 donne une valeur approchée « par défaut » de α et b_7 donne une valeur approchée « par excès » de α

On peut au préalable définir φ (en fait les valeurs restent dans l'intervalle de départ donc la formule pour $x > 0$ suffit), ensuite le programme consiste simplement à calculer les termes de manière itérative avec la condition, jusqu'à obtenir a_7 et b_7 :

```
def phi(x):
    if x==0:
        return 1
    else :
        return np.log(x)*x**2
a=np.sqrt(2)
b=2
for i in range(1,8) :
    m=(a+b)/2
    if phi(a)phi(m)<0:
        b=m
    else :
        a=m
print(a,b)
```

II - Extrema de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$

Rappelons que α est l'unique réel vérifiant $\varphi(\alpha) = 0$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ 1 point

Les fonctions $(x, y) \mapsto x$; $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto xy$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ car polynomiales
 $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur \mathbb{R}_+^*

donc par composition, produit et addition de fonction \mathcal{C}^2 , f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que le point de coordonnées $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ est l'unique point critique de f sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ 3 points

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a : $\partial_1 f(x, y) = y + \frac{\ln(y)}{x}$ et $\partial_2 f(x, y) = x + \frac{\ln(x)}{y}$

alors, pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a les équivalences :

(x, y) est point critique de $f \Leftrightarrow \nabla f(x, y) = {}^t(0 \ 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1 f(x, y) = 0 \\ \partial_2 f(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + \ln(y) = 0 \\ xy + \ln(x) = 0 \end{cases}$ car $x \neq 0$ et

$y \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = \ln(y) \\ xy + \ln(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 \ln(x) = 0 \end{cases}$ (car \ln est bijective sur \mathbb{R}_+^*)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \ln(x) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \alpha \\ x = y \end{cases}$ d'après I.6.

$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\alpha}$ ainsi f admet un unique point critique sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$: le point $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$

3. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et établir que pour tous réels x et y strictement positifs :

2,5 points

$$\begin{cases} \partial_{1,1}^2 f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right) \\ \partial_{1,2}^2 f(x, y) = 1 + \frac{1}{xy} \\ \partial_{2,2}^2 f(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{cases}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,
 $\partial_{1,1}^2 f(x, y) = -\frac{\ln(y)}{x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\ln(x)}{y^2}$
 et $\partial_{1,2}^2 f(x, y) = 1 + \frac{1}{xy}$ (= $\partial_{1,2}^2 f(x, y)$ d'après le théorème de Schwarz)

on vérifie alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{y}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{\ln(y)}{x^2} = \partial_{1,1}^2 f(x, y), \text{ on trouve donc bien :}$$

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{y}\right)\right) \text{ et par un calcul symétrique : } \partial_{2,2}^2 f(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \left(1 - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

4. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$? Si oui, en donner sa nature (maximum ou minimum).

3 points

$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 , donc si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, nécessairement (x_0, y_0) est un point critique de f

ainsi le seul point en lequel f peut éventuellement admettre un extremum local est le point $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$

on étudie alors la matrice hessienne de f en ce point : $H = \nabla^2 f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ et comme $\varphi\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \varphi(\alpha) = 0$

$$\text{on a } \partial_{1,1}^2 f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}}\right)^2 = 1 \quad ; \quad \partial_{1,2}^2 f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = 1 + \alpha^2 \quad ; \quad \partial_{2,2}^2 f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}}\right)^2 = 1$$

$$\text{donc } H = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \alpha^2 \\ 1 + \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\det(H - \lambda I_2) = (1 - \lambda)^2 - (1 + \alpha^2)^2 = (1 - \lambda + 1 + \alpha^2)(1 - \lambda - (1 + \alpha^2)) = (2 + \alpha^2 - \lambda)(-\alpha^2 - \lambda)$
 les racines de ce polynôme, et donc les valeurs propres de H , sont $2 + \alpha^2$ et $-\alpha^2$ qui sont non nulles et de signes opposés donc f n'admet pas d'extremum local en $\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$ (on pourrait préciser qu'il s'agit d'un point

col) donc f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

Exercice 2 - Ecricome 2015

23 points

On désigne par $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM

I - Premiers résultats sur l'application φ_A et la matrice A

1. Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1,5 points

Tout d'abord si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\varphi_A(M) = AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Démontrons maintenant que φ_A est linéaire, soit M et N deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ un réel, alors $\varphi_A(M + \lambda N) = A(M + \lambda N) = AM + A(\lambda N) = AM + \lambda AN = \varphi_A(M) + \lambda \varphi_A(N)$

donc φ_A est linéaire et donc φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2

0,5 point

Si φ_A est bijectif alors par définition, $I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet un unique antécédent par φ_A
i.e. $\exists! N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \varphi_A(N) = I_2 \Leftrightarrow \exists! N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AN = I_2$

ainsi, il existe une unique matrice N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$

3. Montrer que l'application φ_A est un endomorphisme bijectif (donc un isomorphisme) de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible. 2 points

\Rightarrow Supposons que φ_A soit bijective, alors d'après la question précédente, il existe une (unique) matrice N telle que $AN = I_2$, autrement dit A est inversible.

\Leftarrow Supposons que A soit inversible, on va montrer que le noyau de φ_A est réduit à l'élément nul
soit $M \in \text{Ker}(\varphi_A)$ alors $\varphi_A(M) = 0_2$ i.e. $AM = 0$

et donc (A étant inversible et donc simplifiable à gauche) $M = 0_2$ ainsi, $\text{Ker}(\varphi_A) = \{0_2\}$
et puisque φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors par caractérisation φ_A est bijectif

finalement φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ssi A est inversible.

II - Un exemple

Dans cette partie et uniquement cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On note $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que la matrice A est diagonalisable. 3 points

A est une matrice triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux 1 et -1
on détermine des vecteurs propres associés :

$$AX = X \Leftrightarrow (A - I_2)X = 0_{2,1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$$

donc ${}^t(1 \ 0)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1

de même, $AX = -X \Leftrightarrow (A + I_2)X = 0_{2,1} \Leftrightarrow 2x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$

donc ${}^t(1 \ -1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre -1

on pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et on vérifie $AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc $AP = PD$ et P est inversible car $\det(P) = -1 \neq 0$ donc $A = PDP^{-1}$ i.e. A est diagonalisable

2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ_A dans la base \mathcal{B} est : 2 points

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{En calculant les images des vecteurs de la} \\ \text{base } \mathcal{B} \text{ et en les décomposant selon cette} \\ \text{même base (cf. ci-dessous), la matrice de} \\ \varphi_A \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ (qui correspond aux} \\ \text{images des éléments de la base } \mathcal{B} \text{ décom-} \\ \text{posés selon cette même base) est :} \end{array} \quad M_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_A \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} \quad \varphi_A \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{12}$$

$$\text{i.e. } \varphi_A(E_{11}) = E_{11} \text{ et } \varphi_A(E_{12}) = E_{12} \text{ puis } \varphi_A(E_{21}) = \varphi_A \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

soit $\varphi_A(E_{11}) = 2E_{11} - E_{21}$ et enfin $\varphi_A(E_{22}) = \varphi_A \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2E_{12} - E_{22}$

3. Préciser les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de T 4 points

T est une matrice triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux soit -1 et 1

• Recherche de $E_{-1}(T)$: soit $X = {}^t(a \ b \ c \ d)$

$$X \in E_{-1}(T) \Leftrightarrow TX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = -a \\ b + 2d = -b \\ -c = -c \\ -d = -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -d \end{cases} \text{ ainsi, } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et donc $E_{-1}(T) = \text{Vect} \left({}^t(1 \ 0 \ -1 \ 0), {}^t(0 \ 1 \ 0 \ -1) \right)$

et $({}^t(1 \ 0 \ -1 \ 0), {}^t(0 \ 1 \ 0 \ -1))$ est une famille libre, car composée de deux vecteurs non proportionnels et génératrice de $E_{-1}(T)$ par définition du Vect, c'est donc une base de $E_{-1}(T)$

• Recherche de E_1 : soit $X = {}^t(a \ b \ c \ d)$.

$$X \in E_1 \Leftrightarrow TX = X \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2c = a \\ b + 2d = b \\ -c = c \\ -d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \text{ ainsi, } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc $E_1(T) = \text{Vect} \left({}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0), {}^t(0 \ 1 \ 0 \ 0) \right)$

et $({}^t(1 \ 0 \ 0 \ 0), {}^t(0 \ 1 \ 0 \ 0))$ est une famille libre, car composée de deux vecteurs non proportionnels et génératrice de $E_1(T)$ par définition du Vect, c'est donc une base de $E_1(T)$

4. Montrer que la matrice T est diagonalisable. 3 points

On définit P et D puis on calcule TP et PD :

Nota bene : P est composé des vecteurs propres et D des valeurs propres correspondantes (dans le même ordre). On notera d'ailleurs l'ordre choisi pour P qui permet d'obtenir une matrice triangulaire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} TP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et on a donc montré que } PD = TP$$

or P est inversible car elle est triangulaire et ses éléments diagonaux sont tous non nuls

donc $PD = TP \Rightarrow T = PDP^{-1}$ donc T est diagonalisable

III - D'autres résultats sur l'application φ_A et la matrice A

On désigne par $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes à 2 lignes.

1. Soit un réel λ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant : $\varphi_A(M) = \lambda M$ (1) 1,5 points
Montrer par un raisonnement par l'absurde que la matrice $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible.

Soit λ un réel tel qu'il existe une matrice M non nulle telle que $\varphi_A(M) = \lambda M$ i.e. $AM = \lambda M$

supposons que $A - \lambda I_2$ soit inversible, alors $A - \lambda I_2$ est simplifiable à gauche

donc $AM = \lambda M \Rightarrow AM - \lambda M = 0 \Rightarrow (A - \lambda I_2)M = 0 \Rightarrow M = 0_2$ ce qui est contradictoire avec notre

hypothèse de départ (M non nulle), donc cette hypothèse est fautive i.e. $A - \lambda I_2$ est non inversible.

2. Soit un réel μ tel qu'il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $AX = \mu X$ 1,5 points

On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$

Montrer que N et N' vérifient la condition (1) avec le réel μ

$$AX = \mu X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ autrement dit } \begin{cases} ax + by = \mu x \\ cx + dy = \mu y \end{cases}$$

$$\varphi_A(N) = A \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by & 0 \\ cx + dy & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x & 0 \\ \mu y & 0 \end{pmatrix} = \mu N$$

ainsi $N \neq 0_2$ (car X non nulle) donc N vérifie la condition (1) avec le réel μ

$$\varphi_A(N') = A \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax + by \\ 0 & cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu 0 & x \\ \mu 0 & y \end{pmatrix} = \mu N' \text{ ainsi } N' \text{ vérifie la condition (1) avec le réel } \mu$$

3. Comparer le spectre de la matrice A et l'ensemble des réels permettant de vérifier la condition (1) 1 point

On note E cet ensemble (ensemble des réels permettant de vérifier la condition (1))

d'après la question 1., si $\lambda \in E$ alors $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible donc λ est valeur propre de A i.e. $\lambda \in \text{Spec}(A)$, et donc $E \subset \text{Spec}(A)$

et d'après la question 2., si $\mu \in \text{Spec}(A)$ alors $\mu \in E$ (et même doublement car on trouve deux matrices distinctes) ainsi, $\text{Spec}(A) \subset E$

finalement le spectre de la matrice A est égal à l'ensemble des réels permettant de vérifier la condition (1)

4. Montrer que si la matrice A soit diagonalisable, alors $M_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$ est diagonalisable, où \mathcal{B} est la base canonique introduite à la **partie II**. 3 points

Supposons que A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où P est une matrice inversible dont les colonnes sont des vecteurs propres de A

on note $C_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ les colonnes de P et λ_1 et λ_2 les valeurs propres associées

alors en posant $N_1 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}$, $N'_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}$ et $N'_2 = \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$

d'après la question 2. $\varphi_A(N_1) = \lambda_1 N_1$, $\varphi_A(N'_1) = \lambda_1 N'_1$, $\varphi_A(N_2) = \lambda_2 N_2$ et $\varphi_A(N'_2) = \lambda_2 N'_2$
de plus (N_1, N'_1, N_2, N'_2) forme une famille libre, en effet si pour $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$, $\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N'_1 + \alpha_3 N_2 + \alpha_4 N'_2 = 0_2$ alors $\alpha_1 C_1 + \alpha_3 C_2 = 0_{2,1}$ et $\alpha_2 C_1 + \alpha_4 C_2 = 0_{2,1}$

or (C_1, C_2) forme une famille libre car ce sont deux vecteurs propre de A associés à des valeurs propres distinctes donc $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ et $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$

de plus $\text{Card}(N_1, N'_1, N_2, N'_2) = 4 = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ donc (N_1, N'_1, N_2, N'_2) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

on note \mathcal{B}' cette base, donc d'après la formule de changement de base d'une application linéaire : $M_{\mathcal{B}}(\varphi_A) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}'}(\varphi_A) P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$

or d'après les valeurs des images de la base \mathcal{B}' , $M_{\mathcal{B}'}(\varphi_A) = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2)$ et par propriété $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1}$

donc $M_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$ est diagonalisable (forme PDP^{-1})

Exercice 3 - Ericome 2024

29 points

Pour toute variable aléatoire discrète X à valeurs dans \mathbb{N}^* , et pour tout entier naturel k , on pose

$$R_X(k) = P(X > k)$$

La partie **II** est indépendante des autres parties ; les résultats de la partie **I** pourront intervenir dans la partie **III**.

Partie I

1. Soit p un réel de $]0, 1[$. Dans cette question uniquement, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre p

a. Calculer $R_X(k)$ pour tout entier naturel k

2 points

Soit k un entier naturel. Si $k = 0$, alors $R_X(0) = P(X > 0) = 1 = (1 - p)^0$ car X est à valeurs dans \mathbb{N}^* si $k \geq 1$, alors $R_X(k) = P(X > k) = 1 - P(X \leq k)$

or $[X \leq k] = \bigcup_{i=1}^k [X = i]$ donc par incompatibilité $P(X \leq k) = \sum_{i=1}^k P(X = i)$

donc $R_X(k) = 1 - \sum_{i=1}^k P(X = i) = 1 - \sum_{i=1}^k (1 - p)^{i-1} p$ car X suit une loi géométrique

donc $R_X(k) = 1 - p \sum_{j=0}^{k-1} (1 - p)^j$ par changement d'indice $j = i - 1$

donc $R_X(k) = 1 - p \times \frac{1 - (1 - p)^k}{1 - (1 - p)} = 1 - p \times \frac{1 - (1 - p)^k}{p} = 1 - (1 - (1 - p)^k) = (1 - p)^k$

d'où finalement $\forall k \in \mathbb{N}, R_X(k) = (1 - p)^k$

Remarque : on peut aussi remarquer que $[X > k]$ est réalisé si et seulement si on a obtenu k échecs consécutifs (en précisant que la loi géométrique modélise le temps d'attente du premier succès lors de répétitions indépendantes et identiques d'un même schéma de Bernoulli de paramètre p , ce qui donnerait tout de suite $(1 - p)^k$)

b. Vérifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = 1 - p$

0,5 point

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, comme $k \geq 1$, on a $k - 1 \in \mathbb{N}$

donc, grâce à la question précédente, $\frac{R_X(k)}{R_X(k-1)} = \frac{(1 - p)^k}{(1 - p)^{k-1}} = 1 - p$ comme attendu.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N}^*

a. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $P(X = k)$ à l'aide de la fonction R_X

1 point

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, comme $[X > k - 1] = [X = k] \cup [X > k]$ et que ces événements sont incompatibles, on a

$P(X > k - 1) = P(X = k) + P(X > k)$ et donc $P(X = k) = R_X(k - 1) - R_X(k)$

b. En déduire que X et Y suivent la même loi si et seulement si, pour tout entier naturel k ,

1,5 points

$R_X(k) = R_Y(k)$

On montre cette équivalence par double implication.

Supposons que X et Y suivent la même loi,

alors, $\forall i \in \mathbb{N}^*, P(X = i) = P(Y = i)$, et donc $\forall k \in \mathbb{N}, P(X > k) = P(Y > k)$ i.e. $R_X(k) = R_Y(k)$

Réciproquement, supposons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $R_X(k) = R_Y(k)$

tout d'abord $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente,

$P(X = k) = R_X(k - 1) - R_X(k) = R_Y(k - 1) - R_Y(k)$ par hypothèse et donc $P(X = k) = P(Y = k)$

à nouveau d'après la question précédente donc X et Y suivent bien la même loi.

Partie II

3. a. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!}$

1 point

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\frac{a}{n!} - \frac{b}{(n+1)!} = \frac{an + a - b}{(n+1)!}$ ainsi, par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}}$$

Nota bene : on ne demande pas ici de montrer qu'il y a une unique solution pour a et b , donc on peut partir du résultat (si on l'a trouvé) et montrer l'égalité.

- b. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}$ est convergente et déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 1,5 points

Nous allons étudier la somme partielle : pour $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la question précédente

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \text{ par télescopage}$$

or $\frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 0$ donc par addition de limites $\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1}$

4. Dans cette question, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{n}{(n+1)!}$$

- a. Montrer que la variable aléatoire $X + 1$ admet une espérance et calculer $E(X + 1)$ 2,5 points
En déduire que X admet une espérance et calculer $E(X)$

D'après le théorème de transfert, $X + 1$ admet une espérance $\iff \sum_{n \geq 1} (n+1)P(X = n)$ converge (absolument).

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)P(X = n) = (n+1) \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}$

On reconnaît le terme général (« décalé ») d'une série exponentielle de paramètre 1

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n (k+1)P(X = k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}$ par changement d'indice $i = k - 1$

ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} (n+1)P(X = n)$ converge (et absolument car elle est à termes positifs)

donc $\boxed{X + 1 \text{ admet une espérance}}$, de plus, $\boxed{E(X + 1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)P(X = n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{j!} \boxed{= e}$

enfin, par linéarité,

comme $\boxed{X = X + 1 - 1, X \text{ admet aussi une espérance}}$ et $\boxed{E(X) = E(X + 1) - 1 = e - 1}$

- b. Montrer que la variable aléatoire $(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance et calculer $E((X - 1)(X + 1))$ 3 points
En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$

Toujours avec le théorème de transfert,

$(X - 1)(X + 1)$ admet une espérance $\iff \sum_{n \geq 2} (n-1)(n+1)P(X = n)$ converge (absolument)

or, pour tout entier $n \geq 2$, $(n-1)(n+1)P(X = n) = (n-1)(n+1) \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!}$

et c'est à nouveau une série exponentielle (décalée de deux indices) :

pour $n \geq 2$, $\sum_{k=2}^n (k-1)(k+1)P(X = k) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{i!}$ par changement d'indice $i = k - 2$

ainsi $\boxed{(X - 1)(X + 1) \text{ admet une espérance}}$ et $\boxed{E((X - 1)(X + 1))} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1^i}{i!} \boxed{= e}$

or $(X - 1)(X + 1) = X^2 - 1$ donc $X^2 = (X - 1)(X + 1) + 1$, donc par linéarité X^2 admet une espérance et $E(X^2) = e + 1$

alors d'après la formule de Kœnig-Huygens, X admet une variance et,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e + 1 - (e - 1)^2 = e + 1 - e^2 + 2e - 1 \text{ soit } V(X) = e(3 - e)$$

Partie III

Soit $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement compris entre 0 et 1

On étudie la durée de vie en années d'un appareil. Tout au long de l'année initiale $k = 0$, on suppose que l'appareil fonctionne. Puis, à l'issue de chaque année numéro k (k étant un entier naturel non nul), l'appareil possède une certaine probabilité de tomber en panne.

Plus précisément, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, si la machine fonctionne encore à l'issue de la $(k - 1)^{\text{ème}}$ année, alors elle cesse de fonctionner à la fin de l'année k avec la probabilité α_k , et elle continue à fonctionner après la fin de l'année k avec probabilité $1 - \alpha_k$

On note X la variable aléatoire égale à la durée de vie en années de l'appareil.

5. Justifier que, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = (1 - \alpha_k) R_X(k - 1)$ 1,5 points

Soit k un entier naturel non nul, dans un premier temps, on remarque que $[X > k] = [X > k - 1] \cap [X > k]$ de plus, d'après l'énoncé, on a $P_{[X > k - 1]}(X > k) = 1 - \alpha_k$ donc d'après les probabilités composées, $P(X > k) = P([X > k - 1] \cap [X > k]) = P(X > k - 1)P_{[X > k - 1]}(X > k) = P(X > k - 1)(1 - \alpha_k)$

autrement dit, $R_X(k) = (1 - \alpha_k) R_X(k - 1)$

6. En déduire, pour tout entier naturel k non nul : $R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$ 1,5 points

On montre la formule attendue par récurrence, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(k) : R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$

Initialisation : pour $k = 1$, d'après la question précédente $R_X(1) = 1 - \alpha_1 R_X(0) = 1 - \alpha_1$ car $R_X(0) = P(X > 0) = 1$ puisque dans tout l'exercice X est à valeurs dans \mathbb{N}^* , donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : supposons que, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, $P(k)$ soit vraie, alors, d'après la question précédente

$$R_X(k + 1) = (1 - \alpha_{k+1}) R_X(k) = (1 - \alpha_{k+1}) \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i) \text{ par hypothèse de récurrence}$$

donc $R_X(k + 1) = \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \alpha_i)$ (par relation de Chasles) i.e. $P(k + 1)$ est vraie d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(k)$ est vraie, i.e.

$$R_X(k) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i)$$

7. En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression de $P(X = k)$ en fonction des termes de la suite $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ 1,5 points

On pourra utiliser le résultat de la question 2.a.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors d'après la question 2.a. $P(X = k) = R_X(k - 1) - R_X(k)$

donc si $k = 1$, on a $P(X = 1) = R_X(0) - R_X(1) = 1 - (1 - \alpha_1)$ soit $P(X = 1) = \alpha_1$

et pour $k \geq 2$, et d'après la question précédente,

$$P(X = k) = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) - \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i) = \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) - (1 - \alpha_k) \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) \text{ par relation de Chasles}$$

donc $P(X = k) = (1 - (1 - \alpha_k)) \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i)$ soit $P(X = k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i)$

8. Etude de deux exemples.

- a. Dans cette question uniquement, on suppose que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constante, c'est-à-dire :
 $\forall k \in \mathbb{N}^*, \alpha_k = p$ 1 point

Reconnaitre la loi de X

On reconnaît alors une loi géométrique de paramètre p ; en effet, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{si } k = 1, \text{ alors } P(X = 1) = \alpha_1 = p \text{ si } k \geq 1, P(X = k) = \alpha_k \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \alpha_i) = p \prod_{i=1}^{k-1} (1 - p) = p(1 - p)^{k-1}$$

- b. Dans cette question uniquement, on suppose que, pour tout entier naturel k non nul, $\alpha_k = \frac{k}{k+1}$
 Déterminer la loi de X 2 points

A nouveau $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, soit $k \in \mathbb{N}^*$

si $k = 1, P(X = 1) = \alpha_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{(1+1)!}$ puis pour $k \geq 2$, d'après la question précédente

$$P(X = k) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{i+1}\right) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i+1} = \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{\prod_{i=1}^{k-1} (i+1)} = \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{k!}$$

car par changement d'indice $j = i + 1, \prod_{i=1}^{k-1} (i+1) = \prod_{j=2}^k j = \prod_{j=1}^k j = k!$

soit $P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}$ qui n'est rien d'autre que la loi étudiée dans la **partie II**.

Partie IV

Un fabricant d'ordinateurs souhaite publier des données statistiques sur la durée de vie de ses appareils fabriqués à partir de l'an 2000. Dans une base de données, on dispose d'une table **ordinateurs** contenant des informations sur tous les ordinateurs produits par le fabricant. Cette table possède les attributs (ou colonnes) suivants.

- **id** (de type **INTEGER**) : le numéro d'identification de l'ordinateur.
- **annee_fabrication** (de type **INTEGER**) : l'année de fabrication de l'ordinateur.
- **adresse_ip** (de type **INTEGER**) : l'adresse IP associée à l'ordinateur.
- **annee_panne** (de type **INTEGER**) : l'année où l'ordinateur a cessé de fonctionner, valant -1 si l'ordinateur est encore en état de marche.

Dans les questions qui suivent, en plus des commandes SQL au programme, on pourra utiliser les fonctions présentées dans l'**annexe** en fin de sujet.

9. a. Ecrire une requête SQL permettant de déterminer le nombre total d'ordinateurs produits par le fabricant.

Il suffit de compter le nombre total d'enregistrements de la table **ordinateurs**. Ce qu'on fait avec la requête : `SELECT COUNT(*) FROM ordinateurs` 1 point

- b. Ecrire une requête SQL permettant de déterminer le nombre d'ordinateurs ayant cessé de fonctionner exactement un an après leur production. 1 point

Il faut maintenant ajouter une condition en ne gardant que les enregistrements qui vérifient la condition voulue :

```
SELECT COUNT(*) FROM ordinateurs WHERE annee_panne = annee_fabrication +1
-- ou
SELECT COUNT(*) FROM ordinateurs WHERE annee_panne - annee_fabrication = 1
```

- c. Dans cette question uniquement, on suppose que la durée de vie en années d'un ordinateur est une variable aléatoire de loi géométrique, de paramètre p inconnu. 1 point

Expliquer de quelle manière le résultat des requêtes écrites dans les questions **9.a.** et **9.b.** peut être utilisé pour estimer le paramètre p

En calculant la proportion du nombre d'ordinateurs qui sont tombés en panne au bout de un an d'utilisation (c'est-à-dire le quotient du nombre calculé en **9.b.** par celui calculé en **9.a.**), on a donc une

valeur approchée de $P(X = 1) = p$ (par la loi faible des grands nombres) si X est la variable aléatoire égale à la durée de vie d'un ordinateur et car $X \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$

10. Un attribut `duree_vie`, de type `INTEGER`, a été ajouté à la table `ordinateurs`. Aux champs de l'attribut `duree_vie` a été affectée la valeur `-1`

Ecrire une requête SQL permettant de modifier la table `ordinateurs` en affectant, pour chaque ordinateur, sa durée de vie à l'attribut `duree_vie`. Dans le cas des ordinateurs qui sont encore en état de marche, on ne modifiera pas la valeur `-1` déjà affectée. 1,5 points

On utilise la requête `UPDATE` avec une condition pour ne modifier que les lignes où les ordinateurs sont tombés en panne. Plus précisément :

```
UPDATE ordinateurs
SET duree_vie = annee_panne - annee_fabrication WHERE annee_panne <>-1
```

11. Dans cette question, on cherche à déterminer s'il est raisonnable de représenter la durée de vie d'un ordinateur par une variable aléatoire de loi géométrique d'un certain paramètre p que l'on cherchera à approcher.

- a. Expliquer, en la complétant, comment le résultat de la requête suivante permet d'obtenir une valeur approchée de p 1,5 points

```
SELECT AVG(duree_vie) FROM ordinateurs WHERE ...
```

On complète la condition avec `WHERE duree_vie <>-1` ou `WHERE duree_vie >-1` pour retirer les valeurs qui ne correspondent pas à une durée de vie réelle et fausserait le calcul de la moyenne si on les intégrait. Cette requête renvoie alors la moyenne des valeurs de l'attribut `duree_vie`. D'après la loi faible des grands nombres, la moyenne empirique d'un échantillon d'une variable aléatoire renvoie une valeur approchée de l'espérance de la variable échantillonnée. Si la durée de vie est une loi géométrique de paramètre p , son espérance vaut $\frac{1}{p}$

Il faut donc prendre l'inverse de la valeur renvoyée par la requête pour une valeur approchée de p

- b. Quel(s) biais la requête précédente présente(nt)-elle ? 1 point

Ce jeu de données comporte plusieurs biais. Notamment, les ordinateurs à longue durée de vie sont sous-représentés, en particulier dans les dernières années, puisqu'ils n'ont pas encore « eu le temps » de tomber en panne. Cela va donc diminuer « artificiellement » l'espérance de X

La méthode utilisée à la question 9.c. serait donc meilleure pour estimer p , bien que le même biais existe (les ordinateurs fabriqués en 2025 et qui tomberont en panne en 2026 ne sont pas encore connus).

- c. La base de données compte au total 10 000 ordinateurs. On exécute les requêtes suivantes :

```
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateurs WHERE duree_vie = 1 ;
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateurs WHERE duree_vie = 2 ;
      :                               :                               :
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateurs WHERE duree_vie = 24 ;
```

En utilisant les résultats de la question 8, expliquer de quelle manière les données de la table `ordinateurs` peuvent être exploitées pour déterminer s'il est raisonnable de représenter la durée de vie d'un ordinateur par une variable aléatoire de loi géométrique. 1,5 points

Chacune des requêtes (pour k allant de 1 à 25)

```
SELECT COUNT(*)/10000 FROM ordinateurs WHERE duree_vie= k
```

renvoie la proportion des appareils avec une durée de vie de k années, qui devrait donner une *estimation* de la probabilité qu'un appareil ait une durée de vie de k années.

Si toutes les valeurs calculées sont les termes d'une suite géométrique, il est raisonnable d'utiliser une loi géométrique pour la durée de vie. Pour vérifier cela, on peut calculer les quotients des valeurs successives qui doivent être constants (comme le garantit la question 8.a.).

Rappel : la suite des valeurs d'une loi géométrique est une suite géométrique,

$$P(X = k + 1) = pq^k = qpq^{k-1} = qP(X = k)$$