Concours blanc - épreuve 2 - sujet 1 : type EM Lyon

Corrigé *Total sur 92 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points*

Exercice 1 - EM Lyon 2024 *27 points*

Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

Partie A : résolution d'un système différentiel

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad x'(t) = -x(t) + e^{-t}$
où x est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle homogène $x'(t) = -x(t)$ sur $\mathbb{R}$ *1 point*

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $x' = -x$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $\{t \mapsto \lambda e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

b. Déterminer une solution particulière x_0 de (E) de la forme $x_0 \colon t \mapsto (at+b)e^{-t}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Soient a et b deux nombres réels, on considère la fonction x_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : *1,5 points*
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_0(t) = (at+b)e^{-t}$
cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$x_0'(t) = ae^{-t} - (at+b)e^{-t} = ae^{-t} - x_0(t) = -x_0(t) + ae^{-t}$
donc x_0 est solution de (E) si et seulement si $a = 1$ et en particulier

$$\boxed{x_0 \colon t \mapsto te^{-t} \text{ est une solution particulière de } (E)}$$

c. Résoudre l'équation différentielle (E) *1 point*

D'après le principe de superposition, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $x = x_0 + x_1$ où x_0 est une solution particulière, et x_1 est une solution de l'équation homogène
ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $\{t \mapsto (t+\lambda)e^{-t}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

On s'intéresse maintenant au système différentiel : (S) : $\left\{\begin{array}{lcr} x'(t) & = & -x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -y(t) \end{array}\right.$
où x et y désignent des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

2. **a.** Donner la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

La matrice A est-elle diagonalisable ? *2 points*

En notant $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ et $\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ alors $AX(t) = \begin{pmatrix} -x(t)+y(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$
donc avec cette matrice A, le système (S) équivaut à $X'(t) = AX(t)$
Alors, la matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux, donc A admet -1 pour unique valeur propre
si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que
$A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$ alors $A = P(-I_2)P^{-1} = -PP^{-1} = -I_2$ ce qui est contradictoire avec la définition de A donc notre hypothèse est fausse, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

b. Justifier l'existence d'une unique solution (x, y) de (S) telle que $x(0) = 1$ et $y(0) = 1$ *0,5 point*

Le système différentiel (S) est linéaire à coefficients constants donc d'après le théorème de Cauchy $\boxed{(S) \text{ admet une unique solution } (x, y) \text{ telle que } (x(0), y(0)) = (1, 1)}$

c. Déterminer cette solution (x, y) en vous aidant de la question **1.** *1,5 points*

La fonction y vérifie $y'(t) = -y(t)$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y(t) = \lambda e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

de plus, la condition $y(0) = 1$ donne $\lambda = 1$, donc $\boxed{y(t) = e^{-t} \text{ sur } \mathbb{R}}$

La fonction x vérifie $x'(t) = -x(t) + y(t)$ soit $x'(t) = -x(t) + e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$
donc d'après la question **1.** il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $x(t) = (t + \mu)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

et la condition $x(0) = 1$ donne $\mu = 1$, donc $\boxed{x(t) = (t + 1)e^{-t} \text{ sur } \mathbb{R}}$

finalement $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad (x(t), y(t)) = ((t + 1)e^{-t}, e^{-t})}$

d. Etudier la convergence de la solution (x, y) vers un état d'équilibre lorsque t tend vers $+\infty$ *1,5 points*

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$ (fonction de référence) donc $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = 0$, et $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} + e^{-t} = 0$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$ par croissances comparées,
de plus $(0, 0)$ est un point d'équilibre, car il s'agit d'une solution constante du système différentiel

d'où finalement lorsque $t \to +\infty$ $\boxed{(x, y) \text{ converge vers l'état d'équilibre } (0, 0)}$

3. Recopier et compléter le programme en langage Python ci-dessous de manière à ce qu'il produise le graphique sur la droite représentant la trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$ pour $t \in [-2, 10]$

On rappelle que la commande `np.linspace(-2,10,200)` crée une liste de 200 valeurs régulièrement espacées allant de -2 à 10 *1,5 points*

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
T = np.linspace(-2,10,200)
x = [ ... for t in T]
y = [ ... for t in T]
plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(...)
plt.show()
```

Par définition une trajectoire est l'ensemble des points $(x(t), y(t))$, que l'on représenter ici pour $t \in [-2, 10]$, il suffit donc de donner les formules trouvées précédemment pour x et y : `x = [(t + 1)*np.exp(-t) for t in T]` et `y = [np.exp(-t) for t in T]` et de représenter ces points avec `plt.plot(x,y)`

Partie B : étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x + 1)e^{kx}$
On note $\mathcal{C}_k$ la courbe de f_k dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. **a.** Calculer les limites de la fonction f_k en $-\infty$ et en $+\infty$ *1 point*

En $+\infty$: par produit de limites de référence (puisque $k > 0$) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1)e^{kx} = +\infty}$

En $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$ (car $k > 0$) et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{kx} = 0$ par croissances comparées,

d'où par produit $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{kx} + e^{kx} = 0}$

b. Dresser le tableau de variation de f_k en y faisant figurer les valeurs prises par f_k en -1 et en 0 *2 pts*

La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables, de plus
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'_k(x) = e^{kx} + (x+1)ke^{kx} = (kx+k+1)e^{kx}$
comme $e^{kx} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'_k(x)$ est du signe de $kx+k+1$
or $kx+k+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow kx \geqslant -k-1 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{k+1}{k}$ (car $k > 0$) $\Leftrightarrow x \geqslant -1-\dfrac{1}{k}$
on en déduit le tableau de variation suivant, puisque $f_k(-1) = 0$ et $f_k(0) = 1$:

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{k}$		-1		0		$+\infty$
$f'_k(x)$		$-$	0			$+$			
$f_k(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. **a.** Etudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$. Vous préciserez leurs points d'intersection. *2,5 pts*

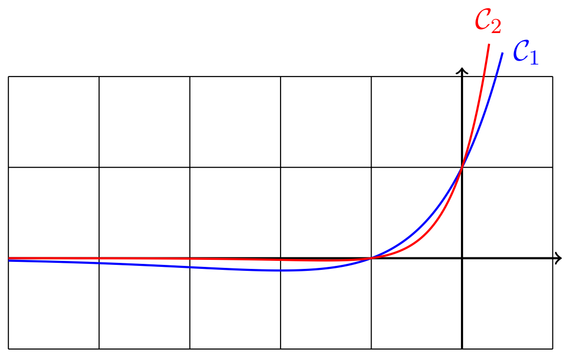
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ alors $f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x) \Leftrightarrow (x+1)e^{(k+1)x} \geqslant (x+1)e^{kx}$
$\Leftrightarrow (x+1)e^{kx}e^x \geqslant (x+1)e^{kx} \Leftrightarrow (x+1)e^x \geqslant x+1$ (en simplifiant par $e^{kx} > 0$) $\Leftrightarrow (x+1)(e^x-1) \geqslant 0$
or nous $e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$
on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\text{ainsi } \mathcal{C}_{k+1} \text{ se situe au-dessus de } \mathcal{C}_k \text{ pour } x \in]-\infty,-1] \cup [0,+\infty[\text{, et en-dessous de } \mathcal{C}_k \text{ pour } x \in [-1,0] \text{ et les courbes } \mathcal{C}_k \text{ et } \mathcal{C}_{k+1} \text{ s'intersectent aux points de coordonnées } (-1,0) \text{ et } (0,0)}$

b. Dessiner sur un même graphique l'allure de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$
2 points

On représente l'allure d'une des deux courbes ($\mathcal{C}_k$ par exemple) à l'aide des informations du tableau de variations, puis la deuxième ($\mathcal{C}_{k+1}$ alors) à l'aide de la position relative trouvée à la question précédente. Ci-contre, ce sont $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui sont représentées et on voit déjà pour $\mathcal{C}_2$ que le minimum n'est plus vraiment perceptible.



Partie C : étude d'une suite implicite

6. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ notée u_k *2 pts*

Soit $\in \mathbb{N}^*$, la fonction f_k prenant des valeurs négatives sur $]\infty,-1]$, l'équation $f_k(x) = k$ n'a pas de solution sur cet intervalle
par ailleurs, la fonction f_k est continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[-1,+\infty[$, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[-1,+\infty[$
sur $\left[f_k(-1), \lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x)\right[= [0,+\infty[$
comme $k \in [0,+\infty[$, l'équation $f_k(x) = k$ admet une unique solution sur $[0,+\infty[$
finalement $\boxed{\text{l'équation } f_k(x) = k \text{ admet une unique solution } u_k \text{ dans } \mathbb{R}}$ de plus $u_k \in [0,+\infty[$

b. Déterminer explicitement u_1 *1 point*

Il faut ici remarquer que $f_1(0)=1$, donc $\boxed{u_1=0}$ par unicité de la solution de l'équation $f_1(x)=1$

7. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$ *2 points*
En déduire que la suite (u_k) converge et donner sa limite.

Soit $k \geqslant 1$, on trouve $f_k(0)=1$ et
$f_k\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)=\left(\dfrac{\ln(k)}{k}+1\right)\exp\left(k\times\dfrac{\ln(k)}{k}\right)=\left(\dfrac{\ln(k)}{k}+1\right)e^{\ln(k)}=\left(\dfrac{\ln(k)}{k}+1\right)\times k=\ln(k)+k$

or $1 \leqslant k \leqslant k+\ln(k)$ (car $k \geqslant 1 \Rightarrow \ln(k) \geqslant 0$) i.e. $f_k(0) \leqslant f_k(u_k) \leqslant f_k\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)$ donc $\boxed{0 \leqslant u_k \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}}$

car f_k est croissante sur $\mathbb{R}_+$

enfin, $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\ln(k)}{k}=0$ par croissances comparées, donc par théorème des gendarmes, on déduit de l'inégalité précédente que $\boxed{\text{la suite } (u_k) \text{ converge vers } 0}$

Nota bene : on peut aussi utiliser le théorème des valeurs intermédiaires à partir de $f_k(0) \leqslant k \leqslant f_k\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)$ pour montrer que $f_k(x)=k$ admet une solution sur $\left[0, \dfrac{\ln(k)}{k}\right]$ qui est donc u_k

<u>Option B pour l'inégalité</u> : par définition $f(u_k)=k$ i.e. $(u_k+1)e^{ku_k}=k$
or $u_k \geqslant 0$ et $k \geqslant 0 \Rightarrow 1 \leqslant (u_k+1)$ et donc $1 \leqslant e^{ku_k} \leqslant (u_k+1)e^{ku_k}$ i.e. et $e^{ku_k} \leqslant k$ puis on compose par ln

8. **a.** Soit $k \geqslant 1$ un entier, montrer que : $u_k=\dfrac{\ln(k)}{k}-\dfrac{\ln(u_k+1)}{k}$ *1 point*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, par définition $f_k(u_k)=k$ i.e. $(u_k+1)e^{ku_k}=k$ et les termes étant strictement positifs :

$\ln(u_k+1)+\ln(e^{ku_k})=\ln(k)$ soit $ku_k=\ln(k)-\ln(u_k+1)$ d'où $\boxed{u_k=\dfrac{\ln(k)}{k}-\dfrac{\ln(u_k+1)}{k}}$

b. En déduire que $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$ *1,5 points*

Pour $k \geqslant 2$, $\dfrac{u_k}{\frac{\ln(k)}{k}}=u_k\times\dfrac{k}{\ln(k)}$ et d'après l'égalité précédente, $u_k\times\dfrac{k}{\ln(k)}=1-\dfrac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)}$

or, sachant que (u_k) converge vers 0, par opération (« $\dfrac{0}{+\infty}$ »), $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)}=0$

donc $\lim\limits_{k\to+\infty}u_k\times\dfrac{k}{\ln(k)}=1$, i.e. $\boxed{u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k} \text{ lorsque } k \to +\infty}$

9. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$? *1,5 points*

La série de Riemann $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k}$ est divergente, or si $k \geqslant 3$ alors $\ln(k) \geqslant \ln(3) \geqslant \ln(e)$ (par croissance de ln)

donc $0 \leqslant \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{\ln(k)}{k}$ pour tout $k \geqslant 3$, donc la série $\sum\limits_{k\geqslant 3}\dfrac{\ln(k)}{k}$ diverge par théorème comparaison de séries à termes positifs et donc $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{\ln(k)}{k}$ également (<u>N.B.</u> : on peut aussi raisonner en montrant que $\dfrac{1}{k}=o\left(\dfrac{\ln(k)}{k}\right)$)

or $u_k \sim \dfrac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$, donc les séries (à termes positifs) $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{\ln(k)}{k}$ sont de même nature d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, ainsi $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{k\geqslant 1} u_k \text{ diverge}}$

Exercice 2 - EM Lyon 2018 *33 points*

On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A donnée par :

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&-5\\-2&0&4\\1&1&0\end{pmatrix}$$

On considère également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad g(x,y,z)=(x+y-z,\ 2y,\ -x+y+z)$$

Par ailleurs, on pose : $u=e_1-e_2=(1,-1,0)$ et $v=f(e_1)+e_1$

Enfin, **on admet le résultat suivant** : deux matrices semblables ont le même spectre (donc les mêmes valeurs propres).

1. **a.** Calculer v *1 point*

On a $v=f(e_1)+e_1$ mais, puisque A est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$, la lecture de sa première colonne permet de trouver $f(e_1)=-2e_2+e_3$

ainsi, $\boxed{v=f(e_1)+e_1=e_1-2e_2+e_3}$

b. Montrer que la famille $\mathcal{C}=(u,v,e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ *1,5 points*

Montrons que la famille $\mathcal{C}=(u,v,e_1)$ est libre, soit $(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3$, tels que $\lambda u+\mu v+\gamma e_1=0_{\mathbb{R}^3}$ alors $\lambda(e_1-e_2)+\mu(e_1-2e_2+e_3)+\gamma e_1=0$ donc $(\lambda+\mu+\gamma)e_1+(-\lambda-2\mu)e_2+\mu e_3=0$

donc $\left\{\begin{aligned}\lambda+\mu+\gamma&=0\\-\lambda-2\mu&=0\\\mu&=0\end{aligned}\right.$ et donc $\lambda=\mu=\gamma=0$

ainsi, $\mathcal{C}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et puisque $\mathrm{Card}(\mathcal{C})=\dim(\mathbb{R}^3)=3$ alors $\boxed{\mathcal{C}\text{ est une base de }\mathbb{R}^3}$

c. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$ *2 points*
Expliciter la matrice P et calculer P^{-1}

Par définition de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, $\boxed{P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-2&0\\0&1&0\end{pmatrix}}$

pour calculer P^{-1}, on peut procéder à un calcul d'inverse on peut aussi utiliser le fait que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ et inverser les relations qui définissent u,v et e_1 à partir de (e_1,e_2,e_3)puis
$u=e_1-e_2$ alors $e_2=e_1-u$
et $v=e_1-2e_2+e_3$ d'où $e_3=v-e_1+2e_2=v-e_1+2(e_1-u)=-2u+v+e_1$

d'où $\left\{\begin{aligned}e_1&=0\times u+0\times v+1\times e_1\\e_2&=-u+e_1\\e_3&=-2u+v+e_1\end{aligned}\right.$ ainsi, $\boxed{P^{-1}=P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}0&-1&-2\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}}$

2. **a.** Etablir le lien entre les matrices A, A', P et P^{-1} où A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ *1 point*

D'après la formule de changement de base, $M_{\mathcal{B}}(f)=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}}(f)P_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$ donc $A=PA'P^{-1}$

b. Expliciter la matrice A' *1,5 points*

D'après la question précédente $A = PA'P^{-1}$ donc $P^{-1}AP = P^{-1}PA'P^{-1}P = I_3A'I_3 = A'$ et on calcule : $AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ soit $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$

Option B : on peut aussi calculer les images, on trouve $f(u) = 2u$, $f(v) = -v$ et utiliser que par définition de v, $f(e_1) = v - e_1$

c. En déduire les valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés. *5 points*

La matrice A' est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\mathrm{Sp}(A') = \{-1, 2\}$ or A et A' sont semblables, donc d'après la propriété de l'énoncé, $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A')$ ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}}$

on détermine alors les sous-espaces propres :

• pour $\lambda = -1$ alors pour $X = {}^{\mathrm{t}}(x \quad y \quad z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX = -X \Leftrightarrow (A + I_3)X = 0_{3,1}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 5z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 2y + 5z \\ y &= -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= -2z \end{cases} \Leftrightarrow X \in \{{}^{\mathrm{t}}(z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

donc $\boxed{E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}({}^{\mathrm{t}}(1, -2, 1))}$

• pour $\lambda = 2$ alors pour $X = {}^{\mathrm{t}}(x \quad y \quad z) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $AX = -X \Leftrightarrow (A - 2I_3)X = 0_{3,1}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z &= 0 \\ -9z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -y \\ z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \{{}^{\mathrm{t}}(-y, y, 0), z \in \mathbb{R}\}$$

donc $\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}({}^{\mathrm{t}}(-1, 1, 0))}$

d. L'endomorphisme f est-il bijectif ? *1 point*

D'après la question précédente, $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ donc A est inversible et donc par caractérisation $\boxed{f \text{ est bijectif}}$.

3. **a.** Déterminer la matrice B de g dans la base $\mathcal{B}$ *1 point*

On calcule :
$g(e_1) = g(1, 0, 0) = (1, 0, -1) = e_1 - e_3$
$g(e_2) = g(0, 1, 0) = (1, 2, 1) = e_1 + 2e_2 + e_3$
$g(e_3) = g(0, 0, 1) = (-1, 0, 1) = -e_1 + e_3$

ainsi, $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

b. Montrer : $B^2 = 2B$ *1 point*

Le produit matriciel donne :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2B \text{ donc } \boxed{B^2 = 2B}$$

c. En déduire les valeurs propres de B , ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre. *5 points*

D'après **3.b.**, $B^2 - 2B = 0$ donc $x^2 - 2x$ est un polynôme annulateur de B donc les valeurs propres possibles pour B sont les racines de $x^2 - 2x = x(x-2)$, ainsi, $\mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 2\}$

Soit $X = {}^{\mathrm{t}}(x \quad y \quad z) \in \mathcal{M}_{3,1}$ alors $X \in E_0(B) \Leftrightarrow BX = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow X \in \{{}^{\mathrm{t}}(x \quad 0 \quad x), x \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left({}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 1)\right)$ ainsi, $BX = 0_{3,1}$ admet des solutions non nulles donc $\boxed{0 \text{ est valeur propre, } E_0(B) = \mathrm{Vect}\left({}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 1)\right) \text{ et } {}^{\mathrm{t}}(1 \quad 0 \quad 1) \text{ est une base } E_0(B)}$ car il forme une famille libre de $E_0(B)$ (composée d'un seul vecteur non nul) et génératrice par définition du Vect

De même, $X \in E_2(B) \Leftrightarrow BX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 2x \\ 2y &= 2y \\ -x + y + z &= 2z \end{cases} \Leftrightarrow x = y - z$

$\Leftrightarrow X \in \{{}^{\mathrm{t}}(y - z \quad y \quad z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \Leftrightarrow X \in \{y\,{}^{\mathrm{t}}(1 \quad 1 \quad 0) + z\,{}^{\mathrm{t}}(-1 \quad 0 \quad 1), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$
$\Leftrightarrow X \in \mathrm{Vect}\left({}^{\mathrm{t}}(1 \quad 1 \quad 0), (-1 \quad 0 \quad 1)\right)$ ainsi, $BX = 2X$ admet des solutions non nulles donc

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 \text{ est valeur propre, } E_2(B) = \mathrm{Vect}\left({}^{\mathrm{t}}(1 \quad 1 \quad 0), {}^{\mathrm{t}}(-1 \quad 0 \quad 1)\right) \\ \text{et } \left({}^{\mathrm{t}}(1 \quad 1 \quad 0), {}^{\mathrm{t}}(-1 \quad 0 \quad 1)\right) \text{ est une base } E_2(B) \end{array}}$$

car elle forme une famille libre de $E_2(B)$ (composée de deux vecteurs qui sont non proportionnels) et génératrice par définition du Vect

d. La matrice B est-elle diagonalisable ? *2,5 points*

On pose $D = \mathrm{Diag}(0, 2, 2)$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors Q est une matrice de passage et elle est donc inversible. En effet Q contient en colonnes une concaténation de familles libres associées à des valeurs propres distinctes, cette concaténation est donc une famille libre et donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle contient 3 éléments et $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$. De plus

$$BQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } QD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ainsi $BQ = QD$ donc $BQQ^{-1} = QDQ^{-1}$ i.e. $B = QDQ^{-1}$ et donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable.}}$

On pose : $\mathcal{E} = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid BM = MA\}$

4. a. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel. *1,5 points*

On montre que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

- $\mathcal{E}$ est inclus dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par définition.
- $B \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$ donc $0_3 \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ est donc non vide)
- soit $M, N \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $B(\lambda M + N) = \lambda BM + BN = \lambda MA + NA \quad (\text{car } M, N \in \mathcal{E})$
  donc $B(\lambda M + N) = (\lambda M + N)A$ ainsi, $\lambda M + N \in \mathcal{E}$

donc $\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et donc un espace vectoriel.}}$

b. Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$ *1,5 points*

Montrer que M n'est pas inversible *(on pourra raisonner par l'absurde).*

Soit M une matrice appartenant à $\mathcal{E}$, on a donc $BM = MA$
supposons que M soit inversible, alors $BM = MA \Rightarrow A = M^{-1}BM$
les matrices A et B sont donc semblables
donc d'après la propriété donnée par l'énoncé A est B ont les mêmes valeurs propres ce que l'on peut écrire $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$ or $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ et $\mathrm{Sp}(B) = \{0, 2\}$
ce qui est donc contradictoire, donc notre hypothèse de départ est fausse

ainsi, $\boxed{\text{si } M \in \mathcal{E}, \text{ alors } M \text{ n'est pas inversible.}}$

5. On cherche à montrer que $\mathcal{E}$ n'est pas réduit à l'ensemble $\{0\}$

a. Justifier que, pour tout réel λ, les matrices $A - \lambda I_3$ et $({}^{t}A) - \lambda I_3$ ont même rang, la matrice I_3 désignant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *1 point*

Le rang étant conservé par transposition, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}({}^{t}(A - \lambda I_3)) = \mathrm{rg}({}^{t}A - {}^{t}(\lambda I_3)) = \mathrm{rg}({}^{t}A - \lambda I_3)}$$

b. En déduire que les matrices B et ${}^{t}A$ admettent une valeur propre en commun, notée α *1 point*

On a montré en **2.c** et **3.c** que $2 \in \mathrm{Sp}(A)$ et $2 \in \mathrm{Sp}(B)$
donc $A - 2I_2$ n'est pas inversible et donc d'après la question précédente, ${}^{t}A - 2I_2$ non plus (sinon leurs rangs seraient différents), et donc 2 est valeur propre de ${}^{t}A$

$\boxed{\text{donc 2 est valeur propre de } B \text{ et de } {}^{t}A}$

c. Soient X un vecteur propre de B associé à la valeur propre α, et Y un vecteur propre de ${}^{t}A$ associé à la valeur propre α. On note : $N = X{}^{t}Y$ *3 points*

Montrer que la matrice N est non nulle et que N appartient à $\mathcal{E}$

On a $X \in E_2(B)$ donc $BX = 2X$ et $Y \in E_2({}^{t}A)$ donc ${}^{t}AY = 2Y$
alors $BN = BX{}^{t}Y = 2X{}^{t}Y = 2N$ et $NA = X{}^{t}YA = X{}^{t}({}^{t}AY) = X{}^{t}(2Y) = 2X{}^{t}Y = 2N$

donc $\boxed{BN = NA \text{ et donc } N \in \mathcal{E}}$ reste à montrer que N n'est pas la matrice nulle

on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ alors $X{}^{t}Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3 \\ x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3 \\ x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3 \end{pmatrix}$

comme X et Y sont des vecteurs propres alors ils sont non nuls
donc $\exists i_0 \in [\![1, 3]\!], x_{i_0} \neq 0$ et $\exists j_0 \in [\![1, 3]\!], y_{j_0} \neq 0$ donc $x_{i_0}y_{j_0} \neq 0$ et donc N n'est pas la matrice nulle (elle possède au moins un coefficient non nul) ainsi, $\boxed{N \in \mathcal{E} \setminus \{0_3\}}$

d. En déduire : $\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2$ *2,5 points*

On sait d'après **3.c** que $E_2(B)$ est de dimension 2, soit (X_1, X_2) une base de $E_2(B)$ et $Y \in E_2({}^{t}A)$
alors d'après la question **5.c.** $N_1 = X_1{}^{t}Y$ et $N_2 = X_2{}^{t}Y$ sont des éléments non nuls de $\mathcal{E}$
montrons alors que la famille (N_1, N_2) est libre, soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3$
alors $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3 \Rightarrow \lambda_1 X_1{}^{t}Y + \lambda_2 X_2{}^{t}Y = 0_3 \Rightarrow (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2){}^{t}Y = 0_3$
$E_2(B)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, si on pose $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, on a $X \in E_2(B)$ et $X{}^{t}Y = 0_3$ alors à nouveau d'après la question **5.c** que $X = 0$ et donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$
la famille (X_1, X_2) étant une base de $E_2(B)$, elle est en particulier libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

ainsi, (N_1, N_2) est une famille libre formée de deux vecteurs de $\mathcal{E}$ et donc $\boxed{\dim(\mathcal{E}) \geqslant 2}$

Exercice 3 - *L'entropie en probabilité* - EM Lyon 2023

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $[\![1,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n : $\quad [\![1,n]\!] = \{k \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$

Les parties II et III sont indépendantes, mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire

1. Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a. Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$ *1 point*

La fonction h est continue sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle. De plus, on sait, par croissances comparées, que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$, ce qui montre la continuité de h en 0 (à droite). Finalement h est continue sur $]0,+\infty[$ et en 0

donc $\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+}$

b. La fonction h est-elle dérivable en 0 ? *1 point*

On étudie la limite du taux d'accroissement en 0 :

pour tout $x > 0$, $\dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \dfrac{h(x)}{x} = \ln(x)$, or $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = -\infty$

donc $\boxed{h \text{ n'est pas dérivable en } 0}$

Remarque : sa courbe représentative présente une (demi-)tangente verticale (et vers le bas) en 0

c. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h *1 point*

Par définition de $h(0)$, 0 est déjà un antécédent de 0 par la fonction h. Cherchons maintenant les antécédents strictement positifs

soit $x > 0$, alors $h(x) = 0 \Leftrightarrow x\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \quad$ car $x > 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\boxed{\text{Finalement, 0 admet exactement 2 antécédents par la fonction } h\text{, qui sont 0 et 1}}$

2. Pour tout x dans $[0;1]$ on pose $g(x) = -h(x) - h(1-x)$ *2,5 points*

Dresser le tableau de variations de la fonction g

On peut remarquer au préalable que g est bien définie car, pour tout $x \in [0,1], x \in \mathbb{R}^+$ et $1-x \in \mathbb{R}^+$

de plus, pour tout $x \in]0;1[$, on a $x > 0$ et $1-x > 0$, donc $g(x) = -x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)$

ainsi, g est dérivable sur $]0,1[$ par opérations et composition de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]0;1[$:

$g'(x) = -\ln(x) - x \times \dfrac{1}{x} - (-1)\ln(1-x) - (1-x) \times \dfrac{-1}{1-x} = -\ln(x) - 1 + \ln(1-x) + 1 = -\ln(x) + \ln(1-x)$

donc, pour tout $x \in]0;1[\,, g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\ln(x) + \ln(1-x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < \ln(1-x) \Leftrightarrow x < 1-x$

par stricte croissance de l'exponentielle $\Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

alors de même, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$, et $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$, de plus,

$g(0) = -h(0) - h(1) = 0$, $g(1) = -h(1) - h(0) = 0$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln(2)$

enfin, puisque g est continue (addition et composition de fonctions continues), on peut donner son tableau de variations sur $[0,1]$:

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	-	
g	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0

Partie II - Des variables aléatoires discrètes

*Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **l'entropie** de X est, sous réserve d'existence :* $\quad H(X) = -\sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X = x))$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut : $\quad H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i) \quad$ *où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = P(X = x_i)$*

3. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$ *1,5 points*
Déterminer $H(U)$

La variable aléatoire U est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(U = k) = \dfrac{1}{n}$

d'où par définition, $H(U) = -\sum_{k=1}^{n} h\left(\dfrac{1}{n}\right) = -nh\left(\dfrac{1}{n}\right) = -n \times \dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$

c'est-à-dire : $\boxed{H(U) = \ln(n)}$

4. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0; 1[$ *2 points*
Démontrer que $H(X) \leqslant \ln(2)$ avec égalité si et seulement $p = \dfrac{1}{2}$. On pourra utiliser la question **2**.

La variable aléatoire U est à valeurs dans $\{0, 1\}$ avec $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1)$
d'où $H(X) = -\Big(h(1 - p) + h(p)\Big) = g(p)$
or, d'après les variations de g étudiées à la question **2.**, g admet un maximum sur $[0, 1]$, qui est $\ln(2)$

par conséquent, $\boxed{H(X) \leqslant \ln(2)}$

de plus, comme g est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, pour tout $p \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$, $g(p) < g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, soit $g(p) < \ln(2)$

de même, par stricte décroissance de g sur $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ on a $g(p) < \ln(2)$ pour tout $p \in \left]\dfrac{1}{2}; 1\right]$

ainsi, $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln(2)$, mais $g(p) < \ln(2)$ pour tout $p \in [0; 1] \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

finalement $\boxed{H(X) = \ln(2) \text{ si et seulement si } p = \dfrac{1}{2}.}$

5. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2, définies sur le même espace probabilisé.
Soit Z la variable aléatoire telle que :
- $Z(\Omega) = \{0, 1\}$
- l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.

On définit le réel p par : $p = P(Z = 1)$

a. Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$? *0,5 point*

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc $\boxed{X_1 + X_2 \text{ est à valeurs dans } \{0, 1, 2\}}$

b. Démontrer que $p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$ *1,5 points*

Par définition de $Z, [Z=1] = \Big([X_1=1]\cap[X_2=0]\Big) \cup \Big([X_1=0]\cap[X_2=1]\Big)$

donc par incompatibilité $P(Z=1) = P\Big([X_1=1]\cap[X_2=0]\Big) + P\Big([X_1=0]\cap[X_2=1]\Big)$

puis, par indépendance de X_1 et $X_2, P(Z=1) = P(X_1=1)P(X_2=0) + P(X_1=0)P(X_2=1)$

c'est-à-dire $\boxed{p = p_1(1-p_2) + (1-p_1)p_2}$

c. Vérifier que $1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$ *1 point*

D'après la question précédente :

$1-2p = 1-2p_1(1-p_2) - 2(1-p_1)p_2 = 1-(2p_1-2p_1p_2) - (2p_2-2p_1p_2) = 1-2p_1-2p_2+4p_1p_2$

or, $(1-2p_1)(1-2p_2) = 1-2p_1-2p_2+4p_1p_2$ et on trouve bien $\boxed{1-2p = (1-2p_1)(1-2p_2)}$

6. Soit $p \in]0;1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que :

- $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$
- l'événement $[Z_n=1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ? *1,5 points*

La variable S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p elle « compte » donc le nombre de succès lors de cette répétition d'épreuves de Bernoulli, par conséquent,

$\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (n,p)}$

Pour bien faire, on le démontre par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $P(n) : S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

<u>Initialisation</u> : $P(1)$ est vraie car $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$ vraie

alors par hypothèse $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, de plus $X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$ et d'après le lemme des coalitions, S_n et X_{n+1} sont indépendantes (car S_n est fonction de $X_1,\dots,X_n$ et les variables $X_1,\dots,X_{n+1}$ sont mutuellement indépendantes) donc par propriété $S_n + X_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n+1,p)$ i.e. $S_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ car $S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} X_k + X_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ i.e. $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1-2P(Z_n=1) = (1-2p)^n$ *4 points*

(on pourra raisonner par récurrence).

On suit l'indication, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la propriété $Q(n) : 1-2P(Z_n=1) = (1-2p)^n$

<u>Initialisation</u> : $1-2P(Z_1=1) = 1-2P(S_1 \text{ est impair}) = 1-2P(X_1 \text{ est impair})$ car $S_1 = X_1$ donc $1-2P(Z_1=1) = 1-2P(X_1=1) = 1-2p = (1-2p)^1$ donc $Q(1)$ est vraie

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose que $Q(n)$ est vraie

alors $P(Z_{n+1}=1) = P(S_{n+1} \text{ est impair}) = P(S_n + X_{n+1} \text{ est impair})$

donc, d'après la (petite) formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\Big([X_{n+1}=0],[X_{n+1}=1]\Big)$:

$$\begin{aligned}P(Z_{n+1}=1) &= P\Big([S_n+X_{n+1} \text{ est impair}]\cap[X_{n+1}=0]\Big) + P\Big([S_n+X_{n+1} \text{ est impair}]\cap[X_{n+1}=1]\Big)\\ &= P\Big([S_n \text{ est impair}]\cap[X_{n+1}=0]\Big) + P\Big([S_n \text{ est pair}]\cap[X_{n+1}=1]\Big)\end{aligned}$$

or, comme vu plus haut X_{n+1} est indépendante de $X_1,\dots,X_n$, donc de S_n donc :

$$\begin{aligned}P(Z_{n+1}=1) &= P(S_n \text{ est impair})P(X_{n+1}=0) + P(S_n \text{ est pair})P(X_{n+1}=1)\\ &= P(Z_n=1)P(X_{n+1}=0) + P(Z_n=0)P(X_{n+1}=1)\end{aligned}$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence et la définition de X_n :

Rectification d'une erreur et légère modification de la démarche : il est plus simple de travailler avec $P(Z_{n+1}=1)$ et de ne faire apparaitre $1-2P(Z_{n+1}=1)$ qu'à la fin :

$$\begin{aligned}P(Z_{n+1}=1) &= \frac{1-(1-2p)^n}{2}(1-p)+\left(1-\frac{1-(1-2p)^n}{2}\right)p\\ &= \frac{1}{2}(1-p)+\left(1-\frac{1}{2}\right)p+\frac{(1-2p)^n}{2}\left[-(1-p)+p\right]\\ &= \frac{1}{2}+\frac{(1-2p)^n}{2}\left[-(1-2p)\right]\\ &= \frac{1}{2}-\frac{(1-2p)^{n+1}}{2}\end{aligned}$$

et donc $2P(Z_{n+1}=1)=1-(1-2p)^{n+1}$ soit $1-2P(Z_{n+1}=1)=(1-2p)^{n+1}$

ce qui montre $Q(n+1)$ d'où l'hérédité et donc par théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*, Q(n)$ est vraie

finalement $\boxed{\text{on a montré (par récurrence) que, pour tout } n\in\mathbb{N}^*, \text{ on a } 1-2P(Z_n=1)=(1-2p)^n}$

c. Démontrer que $H(Z_n)\leqslant\ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ? *1,5 points*

La variable aléatoire Z_n suit une loi de Bernoulli, donc, d'après la question **4.**, on a $\boxed{H(Z_n)\leqslant\ln(2)}$

et, toujours d'après la question **4.**, $H(Z_n)=\ln(2)\Leftrightarrow P(Z_n=1)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2P(Z_n=1)=1$

$\Leftrightarrow 1-2P(Z_n=1)=0\Leftrightarrow(1-2p)^n=0$ (question précédente) $\Leftrightarrow 1-2p=0\Leftrightarrow p=\dfrac{1}{2}$

finalement $\boxed{H(Z_n)=\ln(2)\text{ si et seulement si } p=\frac{1}{2}}$

Partie III - Des variables à densité

*Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ de densité f, on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty}h\circ f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument ; **l'entropie** de X est alors :*

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{+\infty}h\circ f(t)dt$$

7. Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$ où a et b sont des réels tels que $a<b$

a. Démontrer que U admet une entropie. *1,5 points*

La variable aléatoire U a pour densité la fonction f définie par : $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

ainsi, $h\circ f$ est nulle en dehors de $[a,b]$ (puisque $h(0)=0$),

et pour tout $t\in[a,b]$, $h\circ f(t)=\dfrac{1}{b-a}\ln\left(\dfrac{1}{b-a}\right)=\dfrac{-\ln(b-a)}{b-a}$

on en déduit que $\boxed{U\text{ admet une entropie}}$ car nous sommes ramenés à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b\frac{\ln(b-a)}{b-a}dt$ qui converge absolument puisqu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue (constante) sur un segqment.

b. Déterminer $H(U)$ *1 point*

On finit le calcul débuté à la question précédente :

$H(U)=\displaystyle\int_a^b\frac{\ln(b-a)}{b-a}dt=\frac{\ln(b-a)}{b-a}\int_a^b 1dt=\frac{\ln(b-a)}{b-a}(b-a)$ et donc $\boxed{H(U)=\ln(b-a)}$

8. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, de densité f

a. Justifier de la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty}tf(t)dt$ et déterminer sa valeur. *1 point*

On reconnait l'espérance de la loi exponentielle, or si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, alors on sait d'après le cours que X admet une espérance et que $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} tf(t)dt \text{ est (absolument) convergente et } \int_0^{+\infty} tf(t)dt = \frac{1}{\lambda}}$

b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln(\lambda)$ *2,5 points*

La variable aléatoire X a pour densité la fonction f définie par : $f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

ainsi, $h \circ f$ est nulle sur $]0, +\infty[$ (puisque $h(0) = 0$), et pour tout $t \geqslant 0$, on a :
$h \circ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \ln\left(\lambda e^{-\lambda t}\right) = \lambda e^{-\lambda t}(\ln(\lambda) - \lambda t) = \lambda e^{-\lambda t}\ln(\lambda) - \lambda e^{-\lambda t}\lambda t = \ln(\lambda) f(t) - \lambda t f(t)$

ainsi, X admet une entropie si l'intégrale $\int_0^{+\infty} (-\ln(\lambda) f(t) + \lambda t f(t))\, dt$ converge absolument. Or, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut 1 (f est une densité de probabilité), et $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut $\frac{1}{\lambda}$ (question précédente) donc $\boxed{X \text{ admet une entropie}}$:

$H(X) = \int_0^{+\infty} (-\ln(\lambda) f(t) + \lambda t f(t))\, dt = -\ln(\lambda) \int_0^{+\infty} f(t)dt \,+\, \lambda \int_0^{+\infty} tf(t)dt$

$H(X) = -\ln(\lambda) \times 1 \,+\, \lambda \times \frac{1}{\lambda} = -\ln(\lambda) + 1$ ce qui donne bien : $\boxed{H(X) = 1 - \ln(\lambda)}$

9. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X

a. Donner l'espérance et la variance de X. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)\mathrm{d}t$

On sait, d'après le cours que X admet une espérance et une variance et que $\boxed{E(X) = m}$ et $\boxed{V(X) = \sigma^2}$.

Ensuite, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt$ est (absolument) convergente puisqu'il s'agit du moment d'ordre 2 de X (qui existe puisque X admet une variance).

de plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt = E(X^2) = V(X) + E(X)^2$ d'après la formule de Kœnig-Huygens

c'est-à-dire : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt = \sigma^2 + m^2}$ *1,5 points*

b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \dfrac{1 + \ln(2\pi\sigma^2)}{2}$ *3 points*

Pour tout $t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$, d'où

$$h \circ f(t) = \phi(t)\ln(\phi(t)) = \phi(t)\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\right) = \phi(t)\left[\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$
$$= \phi(t)\left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right] = -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\phi(t) - \frac{t^2 - 2mt + m^2}{2\sigma^2}\phi(t)$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\phi(t) - \frac{1}{2\sigma^2}t^2\phi(t) + \frac{m}{\sigma^2}t\phi(t) - \frac{m^2}{2\sigma^2}\phi(t)$$

or, $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut 1 (ϕ est une densité de probabilité), $\int_{-\infty}^{+\infty} t\phi(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut m (cf question précédente), et $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt$ est (absolument) convergente et vaut $\sigma^2 + m^2$ (cf question précédente)

par conséquent, $\boxed{X \text{ admet une entropie}}$ et :

$$
\begin{aligned}
H(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2)\phi(t) + \frac{1}{2\sigma^2}t^2\phi(t) - \frac{m}{\sigma^2}t\phi(t) + \frac{m^2}{2\sigma^2}\phi(t) \right) dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt \; + \; \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt \; - \; \frac{m}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t\phi(t)dt + \; \frac{m^2}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) \times 1 \; + \; \frac{1}{2\sigma^2} \times (\sigma^2 + m^2) \; - \; \frac{m}{\sigma^2} \times m \; + \; \frac{m^2}{2\sigma^2} \times 1 \\
&= \frac{\sigma^2 \ln(2\pi\sigma^2) + (\sigma^2 + m^2) - 2m^2 + m^2}{2\sigma^2} = \frac{\sigma^2 \ln(2\pi\sigma^2) + \sigma^2}{2\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2 \left(\ln(2\pi\sigma^2) + 1\right)}{2\sigma^2} \text{ ce qui se simplifie en : } \boxed{H(X) = \frac{\ln(2\pi\sigma^2) + 1}{2}}.
\end{aligned}
$$