1) a) Pour $x \in \mathbf{R}$, $F_W(x) = \mathbf{P}(W \leqslant x) = \mathbf{P}(V \geqslant e^{-x}) = 1 - F_V(e^{-x})$.
Comme $e^{-x} > 0$, $\boxed{F_W(x) = 1 - (1 - \exp(-\exp(-x))) = \exp(-\exp(-x))}$

b) F_W est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ (par composition), donc W est une variable à densité.
Remarque : il fallait avoir F_W continue sur $\mathbf{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de point (ici ce nombre est nul).

2) a) Pour $x \in \mathbf{R}$, $F_{Y_n}(x) = \mathbf{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leqslant x]\right)$.
Comme les variable $X_1, \dots X_n$ sont indépendantes et de même loi (que X_1 par exemple) :

$$F_{Y_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_k \leqslant x) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) F_{Y_n} est C^1 sur $\mathbf{R}^*$. Une densité f_{Y_n} de Y_n est donc donnée par : $f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}^*$, soit, par exemple :

$$f_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3) a) Pour $t > 0$, $F_{Y_n}(t) = (1-e^{-t})^n$.
Pour u au voisinage de 0 : $(1-u)^n = 1 - nu + o(u)$.
Donc, pour t au voisinage de $+\infty$, $F_{Y_n}(t) = 1 - ne^{-t} + o(e^{-t})$ et donc $\boxed{1 - F_{Y_n}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} ne^{-t}}$.

Les fonctions $t \mapsto 1-(1-e^{-t})^n$ et $t \mapsto ne^{-t}$ sont continues sur $\mathbf{R}_+$ et positives. Comme elles sont équivalentes en $+\infty$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-(1-e^{-t})^n\right) \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} ne^{-t}\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} ne^{-t}\mathrm{d}t = n\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = n$ donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \left(1-(1-e^{-t})^n\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (1-F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t \text{ converge}}.$$

b) On pose $G(x) = 1 - F_{Y_n}(x)$ pour $x \geqslant 0$. On a alors $G'(x) = -f_{Y_n}(x)$ pour $x \geqslant 0$.
Par IPP (en posant $u'(t) = 1$ et $v(t) = G(t)$) :

$$\begin{aligned} \int_0^x G(t)\mathrm{d}t &= \Big[tG(t)\Big]_0^x - \int_0^x t \times (-f_{Y_n}(t))\mathrm{d}t \\ \int_0^x (1-F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t &= x(1-F_{Y_n}(x)) + \int_0^x tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

c) $\boxed{x(1-F_{Y_n}(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} nxe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$ par croissances comparées.

d) Par passage à la limite quand $x \to +\infty$ dans la question 3b) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t$ converge et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} 1 - F_{Y_n}(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tf_{Y_n}(t)\mathrm{d}t = \mathbf{E}(Y_n)}$$

4) a) Par exemple :

```
def SimulW():
  X=rd.exponential(1, 10000)
  W = [-np.log(x) for x in X]
  return W
```

b)

```
def SimulZ(n):
  return np.max(rd.exponential(10000)) - np.log(n)
```

c) On conjecture que la Z_n converge en loi vers W.

5) a) $F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}(Z_n \leqslant x) = \mathbf{P}(Y_n \leqslant x + \ln(n)) = \boxed{F_{Y_n}(x + \ln(n))}$

b) $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ (1 - e^{-x-\ln(n)})^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)\right) & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{cases}$

c) Pour x fixé, $\ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) \sim \dfrac{-e^{-x}}{n}$ donc $n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) \sim -e^{-x}$ (constante non nulle), ce qui signifie : $\boxed{n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -e^{-x}}$.

d) Pour $x \in \mathbf{R}$ fixé, comme $\ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, à partir d'un certain rang, on aura $x + \ln(n) > 0$.
NB : à partir du rang $n_0 = \lfloor e^{-x} \rfloor + 1$.
Donc, pour n suffisamment grand : $F_{Z_n}(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)\right)$ qui tend vers $\exp(-\exp(-x))$ quand $n \to +\infty$ d'après la question précédente.

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_{Z_n}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} F_W(x)$, ce qui signifie : $\boxed{Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} W}$.