Exercices de révision **Sujet n°4**

Exercice

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1
On note F_V la fonction de répartition de V et on pose $W = -\ln(V)$
On admet que W est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_W ; sa loi est appelée loi de Gumbel.

1. **a.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}$

b. En déduire que W est une variable à densité.

On désigne par n un entier naturel non nul, et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est-à-dire la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$
On considère la variable aléatoire Y_n définie par : $Y_n = \max(X_1, \ldots X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout $\omega \in \Omega : Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots X_n(\omega))$
On admet enfin que Y_n est aussi une variable à densité.

2. **a.** Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(1 - e^{-x}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b. En déduire une densité f_{Y_n} pour Y_n

3. **a.** Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t$ converge.

b. Etablir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\mathrm{d}t$$

c. Montrer que : $\lim\limits_{z \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

d. En déduire que Y_n admet une espérance, et que :

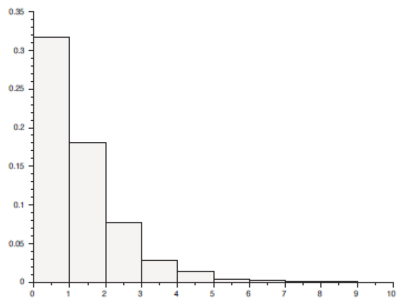
$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t$$

4. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$

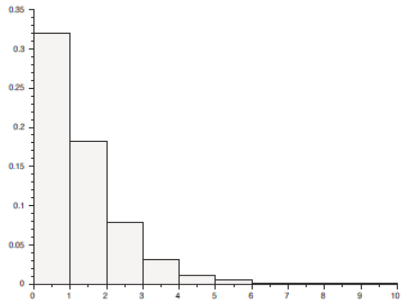
a. Ecrire une fonction `SimulW()` sous Python qui renvoie 10 000 réalisations indépendantes de la loi de Gumbel.

b. Ecrire une fonction `SimulZ(n)` qui renvoie 10 000 réalisations de la variable Z_n pour un entier $n > 0$ donné en entrée.

c. On exécute les fonctions `Simu1W()` et `Simu1Z(1000)` et on regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1],]1,2], \ldots,]9,10]$ et trace l'histogramme correspondant.
La largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe.
L'histogramme 1 ci-dessous correspond à la représentation de `SimulW()`, soit 10 000 réalisations de la loi de Gumbel, tandis que l ?histogramme 2 correspond à celle de `SimulZ(1000)`, soit 10 000 réalisations de la loi de Z_{1000}



Histogramme 1



Histogramme 2

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

5. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n

a. Justifier que, pour tout réel x : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$

b. Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

c. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$

d. Démontrer le résultat conjecturé à la question **4.c.**

Exercices de révision **Sujet n°4**

Exercice

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1
On note F_V la fonction de répartition de V et on pose $W = -\ln(V)$
On admet que W est aussi une variable aléatoire dont la fonction de répartition est notée F_W ; sa loi est appelée loi de Gumbel.

1. **a.** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}$

b. En déduire que W est une variable à densité.

On désigne par n un entier naturel non nul, et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est-à-dire la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$
On considère la variable aléatoire Y_n définie par : $Y_n = \max(X_1, \ldots X_n)$, c'est-à-dire que, pour tout $\omega \in \Omega : Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots X_n(\omega))$
On admet enfin que Y_n est aussi une variable à densité.

2. **a.** Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(1 - e^{-x}\right)^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b. En déduire une densité f_{Y_n} pour Y_n

3. **a.** Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t$ converge.

b. Etablir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\mathrm{d}t$$

c. Montrer que : $\lim\limits_{z \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

d. En déduire que Y_n admet une espérance, et que :

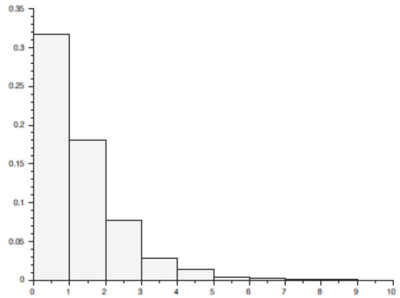
$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t$$

4. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$

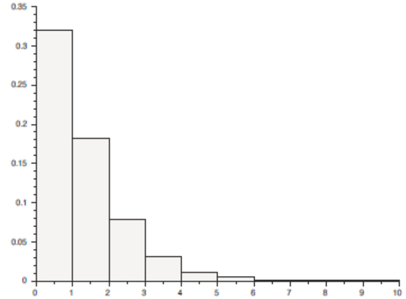
a. Ecrire une fonction `SimulW()` sous Python qui renvoie 10 000 réalisations indépendantes de la loi de Gumbel.

b. Ecrire une fonction `SimulZ(n)` qui renvoie 10 000 réalisations de la variable Z_n pour un entier $n > 0$ donné en entrée.

c. On exécute les fonctions `Simu1W()` et `Simu1Z(1000)` et on regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0,1],]1,2], \ldots,]9,10]$ et trace l'histogramme correspondant.
La largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe.
L'histogramme 1 ci-dessous correspond à la représentation de `SimulW()`, soit 10 000 réalisations de la loi de Gumbel, tandis que l ?histogramme 2 correspond à celle de `SimulZ(1000)`, soit 10 000 réalisations de la loi de Z_{1000}



Histogramme 1



Histogramme 2

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

5. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n

a. Justifier que, pour tout réel x : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$

b. Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

c. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right) = -e^{-x}$

d. Démontrer le résultat conjecturé à la question **4.c.**