

Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :

- définir la négligeabilité et l'équivalence entre deux fonctions □
- donner et utiliser les développements limités de $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \ln(1+x)$; $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0 □
- donner la formule de Taylor-Young et déterminer le développement limité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ □

1 Comparaisons des fonctions : équivalents, négligeabilité

Définitions et propriétés	Exemples
<u>Définitions</u> : soit f et g deux fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a (réel ou ∞), • on dit que f est équivalente à g en a si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et on note : $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ • on dit que f est négligeable devant g en a si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, et on note : $f(x) = o(g(x))$ <u>pour x au voisinage de a</u>	• $x + 1 \sim_{x \rightarrow +\infty} x$ en effet $\frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow 1$ • pour x au voisinage de 0 : $x^3 = o(x^2)$ car $\frac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

Remarques :

- « $f(x) = o(g(x))$ pour x au voisinage de a » sera aussi noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$
- deux fonctions équivalentes en un point ont même limite en ce point, sous réserve de l'existence de la limite en ce point d'une des deux fonctions
- dans la pratique pour démontrer l'équivalence ou la négligeabilité, on pourra étudier la limite du quotient
- $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ signifie aussi $f(x) = g(x) + o(g(x))$ pour x au voisinage de a
- $f(x) = o(1)$ signifie que f tend vers 0 au point considéré.
- $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ est équivalent à $g(x) \sim_{x \rightarrow a} f(x)$

Une autre écriture des croissances comparées des fonctions usuelles

Croissances comparées	Ecriture avec des o
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{x^\alpha}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$	$\alpha \in \mathbb{R}$, pour x au voisinage de $+\infty$, $x^\alpha = o(e^x)$
Pour tout $\alpha > 0$, $\frac{\ln(x)}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$	$\alpha > 0$, pour x au voisin. de $+\infty$, $\ln(x) = o(x^\alpha)$
Pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$	$\alpha > 0$, pour x au voisinage de 0, $\ln(x) = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

Remarques (hors programme) :

- si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ (avec $a_n \neq 0$) alors $P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n$
- toute fonction polynomiale est négligeable devant l'exponentielle en $+\infty$

Opérations sur les équivalents

Définitions et propriétés	Exemples
Propriétés : si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$ alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$ $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ - avec $n \in \mathbb{Z}$, $(f_1(x))^n \underset{x \rightarrow a}{\sim} (g_1(x))^n$	$x+1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et $e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$ donc $(x+1)e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} xe^x$ $\frac{x^2+8}{x-5} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$ car $x^2+8 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ et $x-5 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ $x+1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ donc $(x+1)^3 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^3$

On peut donc multiplier, diviser ou élever à une puissance entière des équivalents mais

⚠ ne pas additionner, soustraire ou composer des équivalents.

Manipulation des o : dans une égalité, on ne fera apparaître qu'un seul o

2 Développements limités, formule de Taylor-Young

Définitions et propriétés	Interprétation graphique
<u>Définitions et propriété</u> : un développement limité (DL) à l'ordre n d'une fonction f au voisinage d'un point x_0 est l'écriture de f sous la forme : DL à l'ordre $n = 0$: $f(x) = \lambda_0 + o(1)$ DL à l'ordre $n = 1$: $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + o(x - x_0)$ DL à l'ordre $n = 2$: $f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ sont appelés coefficients du développement, et un tel développement, s'il existe, est unique.	Un développement limité peut être considéré comme une approximation de la fonction en un point, à l'ordre 0 : par la valeur de la fonction en ce point ($\lambda_0 = f(x_0)$) à l'ordre 1 : par une droite qui est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point à l'ordre 2 : par un polynôme du second degré
<u>Propriété - formule de Taylor-Young</u> : soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0 alors pour x au voisinage de x_0 : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$	<u>Remarque</u> : souvent $x_0 = 0$ avec $f(x) = e^{3x+1}$ et en 0 $f(x) = e + 3ex + \frac{9e}{2}x^2 + o(x^2)$

Développements limités et équivalents usuels

Développements limités pour x au voisinage de 0	Equivalents (déduts des DL)
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$

Nota bene : le DL à l'ordre 1 (ou à l'ordre 0) peut être obtenu en tronquant le DL à l'ordre 2