

Exercice 1

1. Montrer que, pour $x \in [0, 1[$, $\ln(1 - x) + x \leq 0$

2. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Indication : poser $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ et étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}_+$

3. Soit $x \in]0, 1[$. Montrer que, pour tout $t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$

Exercice 2

1. Montrer que l'équation $xe^x = 2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$

2. Soit $f : x \mapsto -\ln(1 - x)$

a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f

b. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$

c. Montrer que f est bijective.

d. Pour $y \in f(\mathcal{D})$, déterminer $f^{-1}(y)$

3. (Edhec) Soit $f : x \mapsto x^3 - 9x^2 - 27x + 53$

Déterminer les variations de f

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles x_1, x_2, x_3 telles que $x_1 < 0 < x_2 < 3 < x_3$

Exercice 3

Dériver deux fois les fonctions suivantes, en précisant (et justifiant) l'intervalle de validité :

1. $x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$

2. $x \mapsto \ln(1 + x^2)$

3. $x \mapsto \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes ont un point d'inflexion et le déterminer :

1. $f : x \mapsto e^x - x^2$

2. $g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$

Exercice 5

Soit $f : x \mapsto e^x + x^5$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g = f''$ sa dérivée seconde.

Etudier les variations de g . En déduire que f admet un et un seul point d'inflexion (on ne demande pas de le déterminer explicitement).

Exercice 6

Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Exercice 7

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes (préciser les intervalles de validité) :

1. $x \mapsto (1 + x)^{1/x}$

2. $x \mapsto x^{\ln(x)}$

Exercice 8

1. Montrer par récurrence que, pour n ($n \geq 2$) réels $x_1, \dots, x_n$:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

2. Montrer que, pour tout couple de réels (x, y) : $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Remarque. On a aussi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad ||x| - |y|| \leq |x + y|$

Exercice 9

On pose, pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = -\ln(1 - x)$ et $g(x) = f(x) - \lfloor f(x) \rfloor$

1. Déterminer les variations de f . Préciser sa limite en 1
2. Justifier que f est bijective de $[0, 1[$ vers un intervalle J à préciser et déterminer $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$
3. Justifier que, pour tout $x \in [0, 1[$, $g(x) \in [0, 1[$
4. Soit $\alpha \in [0, 1[$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $g(x) \leq \alpha$ (*difficile*)

5. On rappelle que la commande `rd.rand(n)` renvoie un tableau à n colonnes contenant des nombres choisis aléatoirement entre 0 et 1

Que fait le programme Python ci-contre ?

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
Y=-np.log(1-rd.rand(1000))
Z=Y-np.floor(Y)
L=0
for z in Z:
    if z<= 0.5:
        L=L+1
print(L/1000)
```

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad f(x) = \begin{cases} x - 1 + (1 - x) \ln(1 - x) & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$ et calculer $f'(x)$ pour $x < 1$
3. En déduire les variations de f
4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
5. Déterminer la limite de f en $-\infty$
6. Etudier la convexité de f
7. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
Donner la tangente à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1
Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ sous Python (on donnera le script).
8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions 1 et α vérifiant $-2 < \alpha < 0$
9. On souhaite trouver une valeur approchée de α à 10^{-p} près, p étant un entier supérieur ou égal à 3
Compléter le programme Python ci-contre permettant de répondre à la question.

```
import numpy as np
def f(x):
    ...
    ...
    ...
    ...

def ValeurApprochee(p):
    a=-2
    b=0
    while ...
        m=(a+b)/2
        if f(m)>0:
            ...
        else:
            ...
    return m

print(ValeurApprochee(3))
```