ECG 2a - mathématiques **TD 1 - compléments sur les fonctions** Septembre 2026

Exercice 1

1. Quand a-t-on $\ln(1+x) = o(1)$?
2. Montrer que $x^2 = o(x^5)$ au voisinage de $+\infty$
3. Montrer que $x^5 = o(x^2)$ au voisinage de 0
4. Montrer que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x+1)$

Exercice 2

Dans chaque cas, trouver un équivalent simple de la fonction f en $+\infty$:

1. $f(x) = x - e^x$
2. $f(x) = \ln(x) + x^2$
3. $f(x) = x + e^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}}$
5. $f(x) = 2x^3 + x\ln(x)$
6. $f(x) = 3xe^{-x} - 3x^2 + \dfrac{e^x}{x}$
7. $f(x) = \ln(1+x^2)$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Montrer que f est « prolongeable par continuité » en 0 (*c'est-à-dire que f admet une limite finie en 0, qui permet de définir $f(0)$ tout en conservant la continuité de f*). On notera encore f ce prolongement.
3. Montrer que ce prolongement est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$

Exercice 4

1. Déterminer les DL à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :
   a. $x \longmapsto \sqrt{1+2x}$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ **c.** $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$
2. Déterminer les DL à l'ordre 2 en 0 des fonctions suivantes :
   a. $x \longmapsto (1+x)e^{-x}$ **b.** $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1-x}$ **c.** $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$

Exercice 5

On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0
2. En déduire des équivalents de $x\ln(1+x)$ et de $\ln(1+x) - x$ pour x au voisinage de 0
3. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0

Exercice 6

On considère la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $\forall x > 0, \quad \widetilde{f}(x) = (1-x)e^{-\frac{1}{x}}$

1. Montrer que $\widetilde{f}$ est prolongeable par continuité en 0
   On note f la fonction ainsi prolongée. Préciser la valeur de $f(0)$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$
4. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$. En déduire que est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
5. Déterminer la limite et un équivalent simple de f en $+\infty$
6. Déterminer les variations de f. Montrer que f admet un maximum que l'on précisera.
7. Montrer que la courbe associée à f admet un point d'inflexion d'abscisse a que l'on précisera.
8. *Questions Python* :
   a. Calculer des valeurs approchées de $f(a)$ et de $f'(a)$
   b. Tracer la courbe associée à f et sa tangente en a

Les exercices suivants comportent des questions qui vont un peu plus loin que le programme, avec des compositions de développements limités présentés ici comme des changements de variables.

Exercice 7

1. Vérifier que, pour $x > 0$, $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
2. Donner le développement limité de $\ln(1+u)$ pour u au voisinage de 0
3. En déduire que, pour x au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{1}{x}\ln(1+x^2) = \dfrac{2\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

Exercice 8

Montrer que, pour x au voisinage de $+\infty$: $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Indication : poser $u = 1/x$ et utiliser un développement limité de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 2.

En déduire que : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - e \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-e}{2x}$

Exercice 9

1. Donner le développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$ en 0 à l'ordre 1.
2. En utilisant le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2, montrer que, pour x au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{1-u(x)}$ avec $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$
3. En déduire que : $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x} + \lambda + o(1)$ où λ est une constante à déterminer.
4. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ pour $x > 0$
   Montrer que f est prolongeable par continuité en 0