

Sujet d'entraînement n°1

D'après Ecricome 2022, exercice 2 (sur 3)

Pour tout réel $x > 0$, on pose : $g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$

Partie I : étude de la fonction g

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

- Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
 - Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
 - Démontrer que : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x^2}h(x)g(x)$
 - En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$
- Démontrer que :

$$g(x) - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x \ln(x)$$

Partie II : étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n existe et $u_n > 0$
- Ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel u_0 et un entier n et renvoie sous forme de liste les $n + 1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = u_0$
- Etudier le signe de $(x - 1)\ln(x)$ pour $x > 0$
 - Montrer que : $\forall x > 0, \frac{g(x)}{x} \geq 1$
- En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geq x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

- Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

- Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$

- Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$

- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$

- Dans cette question uniquement**, on suppose que $0 < u_0 < \frac{1}{2}$
La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Partie III : extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note :

$$f(x, y) = x^{y - \frac{1}{x}} = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

- Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
- Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) &= \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x, y) \\ \partial_2(f)(x, y) &= \ln(x) f(x, y) \end{cases}$$

- Montrer que la fonction f admet un unique point critique a et préciser les coordonnées de a

- Montrer que la matrice hessienne de f au point a est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

- La fonction f admet-elle en a un extremum local ?

- Démontrer que la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$