Corrigés, a minima des exercices non abordés en classe

Les exercices suivants comportent des questions qui vont un peu plus loin que le programme, avec des compositions de développements limités présentés ici comme des changements de variables.

Exercice 7

1. Vérifier que, pour $x > 0$, $\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

On peut partir du terme « le plus compliqué », pour $x > 0$:

$$2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln\left(x^2 + x^2\times\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \ln(x^2+1)$$

2. Donner le développement limité de $\ln(1+u)$ pour u au voisinage de 0

D'après le cours, pour u au voisinage de 0 : $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

3. En déduire que, pour x au voisinage de $+\infty$: $\dfrac{1}{x}\ln(1+x^2) = \dfrac{2\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

Pour x au voisinage de $+\infty$ alors en posant $u = \dfrac{1}{x^2}$, on a u au voisinage de 0 et en injectant dans le développement précédent, on trouve, pour x au voisinage de $+\infty$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{x^2}\right)^2\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

donc d'après la relation de la première question :

$$\frac{1}{x}\ln(1+x^2) = \frac{1}{x}\left(2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$
$$= \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x}o\left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

car $-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x^5} + \dfrac{1}{x}o\left(\dfrac{1}{x^4}\right) = o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$

en effet $\dfrac{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x}o\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{1}{x^4}} = -\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\times\dfrac{o\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{1}{x^4}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par opérations car $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et par définition de la négligeabilité : $\dfrac{o\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{1}{x^4}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Exercice 8 - Difficile et en partie hors programme

Montrer que, pour x au voisinage de $+\infty$: $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{1}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Indication : poser $u = 1/x$ et utiliser un développement limité de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 2

En déduire que : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - e \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-e}{2x}$

D'après le cours, pour u au voisinage de 0 : $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$

donc pour $x \to +\infty$ alors en posant $u = \dfrac{1}{x}$, on a u au voisinage de 0 et en injectant dans le

développement précédent, on trouve, pour x au voisinage de $+\infty$:
$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
donc $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x} - \frac{x}{2x^2} + xo\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + xo\left(\frac{1}{x^2}\right)$
or $\frac{xo\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} = x^2 o\left(\frac{1}{x^2}\right) \to 0$ par définition de $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
et donc par définition $xo\left(\frac{1}{x^2}\right) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ et finalement $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
l'équivalent demandé ensuite nous oriente vers un « passage à l'exponentielle », on va donc préparer le terrain.
d'après l'égalité précédente $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1 = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
soit $\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] - \ln(e) = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et donc $\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \times \frac{1}{e}\right] = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
et donc par propriété $\ln\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$
on note $u(x) = \ln\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]$ alors, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ (si une des deux fonctions équivalentes admet une limite, l'autre fonction a la même limite)
alors, d'après le développement limité d'exponentielle en 0, $e^x - 1 \sim x$ on déduit $\lim\limits_{X\to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$
donc par composition avec $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$ on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$ i.e. $e^{u(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} u(x)$
de plus d'après ce que nous venons de montrer $u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$ donc $e^{u(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$
(on a utilisé ici $f \sim g$ et $g \sim h \Rightarrow f \sim h$ ce qui se démontre par un produit de limites)
or $e^{u(x)} - 1 = \exp\left(\ln\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]\right) - 1 = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1$
d'où $\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}$ et enfin par produit d'équivalent (en multipliant par e qui est non nul), on trouve : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{e}{2x}$

Exercice 9

1. Donner le développement limité de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$ en 0 à l'ordre 1

   D'après le cours, pour x au voisinage de 0 : $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + (-1)\times(-2)\times\frac{x^2}{2} + o(x^2)$
   donc en posant $x = -u$, avec $u \to 0$ alors $x \to 0$ et donc $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(-u) = 1 + u + o(u)$
   car par définition $o(u) = o(-u)$

2. En utilisant le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2, montrer que, pour x au voisinage de 0 : $\frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x}\times\frac{1}{1-u(x)}$ avec $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$

   D'après le cours, pour u au voisinage de 0 : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{o(x^2)}{x}\right)$

donc $\dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{1}{x\left(1-\frac{x}{2}+\frac{o(x^2)}{x}\right)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{2}+\frac{o(x^2)}{x}\right)} = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{(1-u(x))}$

avec $u(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{o(x^2)}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$

car par définition $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^2)}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{o(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^2)}{x} = 0$

3. En déduire que : $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x} + \lambda + o(1)$ où λ est une constante à déterminer.

D'après **1.** et comme $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$ alors $\dfrac{1}{(1-u(x))} = 1 + u(x) + o(u(x))$ (*Nota bene* : on extrapole ici notre définition des développements limités, en y intégrant des $o(u(x))$, ce qui n'est pas au programme pour nous)

donc $\dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{1}{x} \times (1 + u(x) + o(u(x))) = \dfrac{1}{x} \times \left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{o(x^2)}{x} + o(u(x))\right)$

$= \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{o(x^2)}{x^2} + \dfrac{o(u(x))}{x}$

or par définition $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^2)}{x^2} = 0$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(u(x))}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(u(x))}{u(x)} \times \dfrac{u(x)}{x} = 0$

car par définition $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(u(x))}{u(x)} = 0$ et $u(x) = x - \dfrac{o(x^2)}{x}$ donc $\dfrac{u(x)}{x} = 1 - \dfrac{o(x^2)}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^2)}{x^2} = 0$

donc $-\dfrac{o(x^2)}{x^2} + \dfrac{o(u(x))}{x} = o(1)$ et finalement $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} + o(1)$

4. On pose : $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ pour $x > 0$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0

D'après la question précédente, pour x au voisinage de 0 :

$f(x) = \dfrac{1}{x} - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2} + o(1)\right) = -\dfrac{1}{2} + o(1)$ (rappel : $o(1) = -o(1)$)

donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ (f est continue par ailleurs par opérations et composition de fonctions continues).