

Devoir à rendre en binôme, obligatoirement.

Exercice 1

On pose $g : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 1}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_g$, l'ensemble de définition de g
2. A l'aide d'équivalents, déterminer les limites de g aux bornes $\mathcal{D}_g$
3. Dresser le tableau de variations complet de g
4. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\frac{x^3}{x^2 + 1} = n$ admet une unique solution, notée x_n , dans $\mathbb{R}$
5. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x_{n+1}) > g(x_n)$
En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \leq x_n \leq n + 1$.
7. En déduire la limite de x_n et un équivalent quand n tend vers $+\infty$

Exercice 2

On considère les fonctions f et g définies pour $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \ln(x+1)$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifier que : $\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x\sqrt{x}}$
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0$
 f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$
4. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $g'(x)$ pour $x > 0$
5. On donne : $\ln(2) \approx 0,7$ à 10^{-1} près.
Déterminer les variations de g
En déduire que f' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel α vérifiant $1 < \alpha < 7$
6. En 0, déterminer un développement limité de g à l'ordre 2 puis un équivalent de $g(x)$
7. Avec Python, écrire un programme permettant de déterminer la valeur de α à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie.
8. Donner le tableau des variations de f
9. Montrer que le maximum M de f vérifie : $M = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$ et $0 < M < 1$