

Corrigés, a minima des exercices non corrigés en classe.

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes ont un point d'inflexion et le déterminer :

2. $g : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$

La fonction g est $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition, $]0, +\infty[$, en tant que quotient de fonctions $\mathcal{C}^2$ (logarithme et polynôme)

de plus $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln(x))}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$

et donc $f''(x) = \frac{\left(-\frac{2}{x}\right)x^3 - (1 - 2 \ln(x))3x^2}{x^6} = \frac{-2x^2 - 3(1 - 2 \ln(x))x^2}{x^6} = \frac{x^2(-2 - 3 + 6 \ln(x))}{x^6}$

soit $f''(x) = \frac{-5 + 6 \ln(x)}{x^4}$ donc $f''(x)$ est du signe de $-5 + 6 \ln(x)$ (car $x^4 > 0$)

or $-5 + 6 \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq \frac{5}{6} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{5}{6}}$ (par croissance de $\ln$ et exponentielle)

donc f'' s'annule en changeant de signe en $x = e^{\frac{5}{6}}$, donc f'' admet un point d'inflexion en $x = e^{\frac{5}{6}}$

Exercice 5

Soit $f : x \mapsto e^x + x^5$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g = f''$ sa dérivée seconde.

Etudier les variations de g . En déduire que f admet un et un seul point d'inflexion (on ne demande pas de le déterminer explicitement).

L'énoncé nous parle de $g = f''$, donc on admet son existence.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + 5x^4$ et donc $g(x) = f''(x) = e^x + 20x^3$ (qui est dérivable par somme de fonctions dérivables), de fait $g'(x) = e^x + 60x^2$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ car $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$

donc g est strictement croissante et continue (car dérivable), donc d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) [$

or d'après les limites usuelles :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

donc par somme, d'une part, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de fait 0 admet un unique antécédent par g que l'on peut noter a

donc, par stricte croissance de $g, \forall x < a, g(x) < g(a)$ i.e. $g(x) < 0$ et de même $\forall x > a, g(x) > 0$

autrement dit, f'' s'annule une seule fois, et en changeant de signe, donc f admet un unique point d'inflexion.

Exercice 6

Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

On peut tâtonner pour trouver une formule : en notant f la fonction,

on trouve $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ puis $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ puis $f^{(3)}(x) = \frac{-2 \times 3}{x^4}$ puis $f^{(4)}(x) = \frac{2 \times 3 \times 4}{x^5}$

On peut alors émettre une conjecture pour la formule,

on pose pour $n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(1)}(x) = \frac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}} = \frac{-1}{x^2}$ ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie

donc par hypothèse, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)'}(x) = (-1)^n n! \times (-(n+1)) x^{-(n+1)-1}$

i.e. $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \times (-1) \times (n+1) x^{-(n+2)} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}$ donc $P(n+1)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie

Exercice 8

Remarque préliminaire : il s'agit d'étendre ici l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leq |a| + |b|$ (cf. cours de première année) à l'addition de n nombres réels.

1. Montrer par récurrence que, pour n ($n \geq 2$) réels $x_1, \dots, x_n$:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P(n) : \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

Initialisation : d'après l'inégalité triangulaire évoquée plus haut, $P(2)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on suppose que $P(n)$ est vraie

soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose $a = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et $b = x_{n+1}$

alors d'après l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leq |a| + |b|$

i.e. $|x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}|$

or par hypothèse de récurrence $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

donc $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|$

et a fortiori $|x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |x_{n+1}|$ i.e. $P(n+1)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, P(n)$ est vraie

2. Montrer que, pour tout couple de réels $(x, y) : \left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$

Remarque. On a aussi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y|$

On utilise l'inégalité triangulaire en posant $a = x - y$ et $b = y$, on obtient alors :

$|x - y + y| \leq |x - y| + |y|$ i.e. $|x| \leq |x - y| + |y|$ et donc $|x| - |y| \leq |x - y|$

de même en posant $a = y - x$ et $b = x$:

$|y - x + x| \leq |y - x| + |x|$ i.e. $|y| \leq |y - x| + |x|$ et donc $|y| - |x| \leq |x - y|$

car $|y - x| = |-(x - y)| = |x - y|$

or $\left| |x| - |y| \right| = |x| - |y|$ ou $\left| |x| - |y| \right| = |y| - |x|$

mais dans tous les cas, on a montré que $\left| |x| - |y| \right| \leq |x - y|$

Exercice 9

On pose, pour $x \in [0, 1[, f(x) = -\ln(1-x)$ et $g(x) = f(x) - \lfloor f(x) \rfloor$

1. Déterminer les variations de f . Préciser sa limite en 1

f est dérivable (composition de fonctions dérivables) et $\forall x \in [0, 1[, f'(x) = -\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

or $x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0$ donc $\forall x \in [0, 1[, f'(x) > 0$ donc f est (strictement) croissante

par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 1} 1 - x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$

donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) = -\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

2. Justifier que f est bijective de $[0, 1[$ vers un intervalle J à préciser et déterminer $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$

f est strictement croissante et continue (car dérivable) donc f réalise une bijection de $[0; 1[$ dans

$\left[f(0), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right[= [0, +\infty[$ car $f(0) = -\ln(1) = 0$

Nota bene : comme on va déterminer la réciproque ci-dessous, le recours au théorème de la bijection ci-dessus n'était pas nécessaire.

On va appliquer la méthode pour déterminer la réciproque :

$$\begin{aligned} \text{soit } y \in [0, +\infty[, \text{ alors } \exists x \in [0; 1[, f(x) = y &\Leftrightarrow \exists x \in [0; 1[, -\ln(1-x) = y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in [0; 1[, \ln(1-x) = -y \\ &\Leftrightarrow \exists x \in [0; 1[, 1-x = e^{-y} \quad \text{car } a = b \Leftrightarrow e^a = e^b \end{aligned}$$

$$\text{finalement } \forall y \in [0, +\infty[, \text{ alors } \exists x \in [0; 1[, f(x) = y \Leftrightarrow x = 1 - e^{-y}$$

on vérifie que l'antécédent trouvé est bien dans l'ensemble de définition de f : en effet $y \geq 0 \Rightarrow -y \leq 0 \Rightarrow 0 < e^{-y} \leq e^0$ car l'exponentielle est croissante et strictement positive, i.e. $0 < e^{-y} \leq 1$ donc $0 > -e^{-y} \geq -1$ et enfin $1 > 1 - e^{-y} \geq 0$ i.e. $1 - e^{-y} \in \mathcal{D}_f = [0; 1[$

cela signifie que tout élément de $[0, +\infty[$ admet un unique antécédent par f (dans $[0, 1[$) et que cet antécédent est $1 - e^{-y}$, autrement dit f est bijective et sa bijection réciproque est

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \rightarrow & [0; 1[\\ y & \mapsto & 1 - e^{-y} \end{array}$$

3. Justifier que, pour tout $x \in [0, 1[, g(x) \in [0, 1[$

Par définition de la partie entière, $\forall x \in [0; 1[, \lfloor f(x) \rfloor \leq f(x) < \lfloor f(x) \rfloor + 1$
donc $0 \leq f(x) - \lfloor f(x) \rfloor < 1$ i.e. $g(x) \in [0; 1[$

4. Soit $\alpha \in [0, 1[$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $g(x) \leq \alpha$ (*difficile*)

$$\begin{aligned} \text{Soit } x \in [0; 1[, \text{ alors } g(x) \leq \alpha &\Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq \alpha \Leftrightarrow 0 \leq f(x) - \lfloor f(x) \rfloor \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \lfloor f(x) \rfloor \leq f(x) \leq \lfloor f(x) \rfloor + \alpha \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n \leq f(x) \leq n + \alpha \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f^{-1}(n) \leq f^{-1}(f(x)) \leq f^{-1}(n + \alpha) \end{aligned}$$

car la réciproque d'une fonction bijective a le même sens de variation

$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, 1 - e^{-n} \leq x \leq 1 - e^{-(n+\alpha)}$$

$$\text{finalement } g(x) \leq \alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} [1 - e^{-n}, 1 - e^{-(n+\alpha)}]$$

il s'agit donc de la réunion d'une infinité d'intervalles

5. On rappelle que la commande `rd.rand(n)` renvoie un tableau à n colonnes contenant des nombres choisis aléatoirement entre 0 et 1

Que fait le programme Python ci-contre ?

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
Y=-np.log(1-rd.rand(1000))
Z=Y-np.floor(Y)
L=0
for z in Z:
    if z<= 0.5:
        L=L+1
print(L/1000)
```

Le programme cherche à donner la probabilité que $g(x) \leq \frac{1}{2}$ en étudiant 1 000 « valeurs » de la fonction g générées aléatoirement. Concrètement, il commence par créer une liste Y de 1 000 images par f dont les abscisses sont tirées aléatoirement (dans $[0; 1[$), puis il crée la liste Z des valeurs correspondantes pour la fonction g . Enfin avec une boucle il calcule le nombre de valeurs de Z inférieures ou égales à $\frac{1}{2}$ et donne la fréquence pour laquelle $g(x) \leq \frac{1}{2}$

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad f(x) = \begin{cases} x - 1 + (1-x) \ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.

$x \mapsto 1 - x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$ et reste strictement positive, donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$

Par produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est donc aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$

il reste la continuité en 1 :

par croissances comparées $\lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln(X) = 0$ et par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0^+$

donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) \ln(1 - x) = 0$

on en déduit donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$ donc f est continue en 1 et donc sur $] - \infty, 1]$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \infty, 1[$ et calculer $f'(x)$ pour $x < 1$

On a déjà vu que f était de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - \infty, 1[$ elle est donc en particulier $\mathcal{C}^1$

de plus $\forall x < 1, f'(x) = 1 + (-1) \times \ln(1 - x) + (1 - x) \times \frac{-1}{1 - x} = 1 - \ln(1 - x) - 1$

d'où $\forall x < 1, f'(x) = -\ln(1 - x)$

3. En déduire les variations de f

Pour $x < 1, -\ln(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 - x) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - x \leq 1$ par croissance de $\ln$ et de l'exponentielle
d'où $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

On en déduit les variations (la limite en $-\infty$ est abordée plus bas) :

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	-1	0

4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Pour le savoir il faut étudier le taux d'accroissement car les théorèmes généraux ne s'appliquent que sur $] - \infty, 1[$ et : pour $x < 1, \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1 - \ln(1 - x)$

or $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0^+$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$ donc par composition et somme $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = +\infty$

donc f n'est pas dérivable en 1 (nota bene : f admet une tangente verticale en 1)

5. Déterminer la limite de f en $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition

$\lim_{x \rightarrow -\infty} = \ln(1 - x) = +\infty$ puis par produit et addition de limites

(car pour $x < 1, f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) - 1$) on trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

6. Etudier la convexité de f

On dérive f' qui est de la forme $-\ln(u)$ donc $f'' = -\frac{u'}{u}$ (avec $u(x) = 1 - x$ donc $u'(x) = -1$)

plus précisément, pour $x < 1, f''(x) = \frac{1}{1 - x} > 0$ (car $x < 1 \Leftrightarrow 1 - x > 0$) donc f est convexe

7. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Donner la tangente à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1

Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ sous Python (on donnera le script).

Tangente en 1 : comme nous l'avons vu plus haut, il s'agit d'une tangente verticale d'équation $x = 1$ et la tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ i.e. $y = -1$ (c'est donc une tangente horizontale)

enfin, un script Python pour le tracé de f est :

```
import numpy as np # pour le logarithme et linspace
import matplotlib.pyplot as plt # pour le tracé
def f(x):
    return (x-1)+(1-x)*np.log(1-x)

x=np.linspace(-3, 0.99, 50) # on choisit de représenter sur [-3;1[
y=[f(t) for t in x] # ou y=f(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions 1 et α vérifiant $-2 < \alpha < 0$

$f(1) = 0$ d'après l'énoncé

sur $[0, 1[$, f est strictement croissante et puisque $f(1) = 0$, alors f ne s'y annule pas

sur $] -\infty, 0]$, f est strictement décroissante et continue, donc induit une bijection entre $\mathbb{R}_-$ et

$$\left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] = [-1, +\infty[$$

comme $0 \in [-1, +\infty[$, f s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_-$ en un réel α

de plus, $f(-2) = 3(\ln(3) - 1) > 0$ car $3 > e$ et $\ln(e) = 1$, et $f(0) = -1 > 0$

donc, f étant toujours continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur $[-2; 0]$ et même $] -2; 0[$ car $f(-2) \neq 0$ et $f(0) \neq 0$

or α est l'unique solution de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_-$ donc on a bien $-2 > \alpha > 0$

Conclusion : f s'annule exactement deux fois, en 1 et en un réel α tel que $-2 < \alpha < 0$

9. On souhaite trouver une valeur approchée de α à 10^{-p} près, p étant un entier supérieur ou égal à 3
Compléter le programme Python ci-contre permettant de répondre à la question.

```
import numpy as np
def f(x):
    ...
    ...
    ...
    ...

def ValeurApprochee(p):
    a=-2
    b=0
    while ...
        m=(a+b)/2
        if f(m)>0:
            ...
        else:
            ...
    return m

print(ValeurApprochee(3))
```

On redéfinit f (inutile, on l'avait déjà fait plus haut),

puis on applique la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[-2; 0]$ (attention f est décroissante sur cet intervalle, donc « $f(m) \geq 0 \Rightarrow a = m$ ») :

```
import numpy as np
def f(x):
    return (x-1)+(1-x)*np.log(1-x)

def ValeurApprochee(p):
    a=-2.
    b=0.
    while b-a>10**(-p):
        m=(a+b)/2
        if f(m)>0:
            a=m
        else:
            b=m
    return m

print(ValeurApprochee(3))
```