Corrigés, a minima des exercices non corrigés en classe.

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes ont un point d'inflexion et le déterminer :

2. $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

La fonction g est $\mathscr{C}^2$ sur son ensemble de définition, $]0, +\infty[$, en tant que quotient de fonctions $\mathscr{C}^2$ (logarithme et polynôme)
de plus $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln(x) \times 2x}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \dfrac{x(1 - 2\ln(x))}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$
et donc $f''(x) = \dfrac{\left(-\frac{2}{x}\right) x^3 - (1 - 2\ln(x))3x^2}{x^6} = \dfrac{-2x^2 - 3(1 - 2\ln(x))x^2}{x^6} = \dfrac{x^2(-2 - 3 + 6\ln(x))}{x^6}$
soit $f''(x) = \dfrac{-5 + 6\ln(x)}{x^4}$ donc $f''(x)$ est du signe de $-5 + 6\ln(x)$ (car $x^4 > 0$)
or $-5 + 6\ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow x \leqslant e^{\frac{5}{6}}$ (par croissance de ln et exponentielle)
donc f'' s'annule en changeant de signe en $x = e^{\frac{5}{6}}$, donc f'' admet un point d'inflexion en $x = e^{\frac{5}{6}}$

Exercice 5

Soit $f : x \longmapsto e^x + x^5$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g = f''$ sa dérivée seconde.
Etudier les variations de g. En déduire que f admet un et un seul point d'inflexion (on ne demande pas de le déterminer explicitement).

L'énoncé nous parle de $g = f''$, donc on admet son existence.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + 5x^4$ et donc $g(x) = f''(x) = e^x + 20x^3$ (qui est dérivable par somme de fonctions dérivables), de fait $g'(x) = e^x + 60x^2$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) > 0$ car $x^2 \geqslant 0$ et $e^x > 0$
donc g est strictement croissante et continue (car dérivable), donc d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$
or d'après les limites usuelles :
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
donc par somme, d'une part, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et d'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de fait 0 admet un unique antécédent par g que l'on peut noter a
donc, par stricte croissance de $g, \forall x < a, g(x) < g(a)$ i.e. $g(x) < 0$ et de même $\forall x > a, g(x) > 0$
autrement dit, f'' s'annule une seule fois, et en changeant de signe, donc f admet un unique point d'inflexion.

Exercice 6

Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

On peut tâtonner pour trouver une formule : en notant f la fonction,
on trouve $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ puis $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ puis $f^{(3)}(x) = \dfrac{-2 \times 3}{x^4}$ puis $f^{(4)}(x) = \dfrac{2 \times 3 \times 4}{x^5}$
On peut alors émettre une conjecture pour la formule,
on pose pour $n \in \mathbb{N}^*, P(n) : \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(1)}(x) = \dfrac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}} = \dfrac{-1}{x^2}$ ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie
donc par hypothèse, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$
donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)\,\prime}(x) = (-1)^n n! \times (-(n+1)) x^{-(n+1)-1}$
i.e. $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \times (-1) \times (n+1) x^{-(n+2)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$ donc $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie

Exercice 8

Remarque préliminaire : il s'agit d'étendre ici l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ (cf. cours de première année) à l'addition de n nombres réels.

1. Montrer par récurrence que, pour n ($n \geqslant 2$) réels $x_1, \dots x_n$:

$$|x_1 + x_2 + \dots x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$$

On pose pour $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, P(n) : \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, |x_1 + x_2 + \dots x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$
Initialisation : d'après l'inégalité triangulaire évoquée plus haut, $P(2)$ est vraie
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on suppose que $P(n)$ est vraie
soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on pose $a = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ et $b = x_{n+1}$
alors d'après l'inégalité triangulaire : $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
i.e. $|x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}| \leqslant |x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}|$
or par hypothèse de récurrence $|x_1 + x_2 + \dots x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n|$
donc $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| + |x_{n+1}| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n| + |x_{n+1}|$
et a fortiori $|x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots |x_n| + |x_{n+1}|$ i.e. $P(n+1)$ est vraie
donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, P(n)$ est vraie

2. Montrer que, pout tout couple de réels (x, y) : $\Big|\,|x| - |y|\,\Big| \leqslant |x - y|$

Remarque. On a aussi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big|\,|x| - |y|\,\Big| \leqslant |x + y|$

On utilise l'inégalité triangulaire en posant $a = x - y$ et $b = y$, on obtient alors :
$|x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$ i.e. $|x| \leqslant |x - y| + |y|$ et donc $|x| - |y| \leqslant |x - y|$
de même en posant $a = y - x$ et $b = x$:
$|y - x + x| \leqslant |y - x| + |x|$ i.e. $|y| \leqslant |y - x| + |x|$ et donc $|y| - |x| \leqslant |x - y|$
car $|y - x| = |-(x - y)| = |x - y|$
or $\Big|\,|x| - |y|\,\Big| = |x| - |y|$ ou $\Big|\,|x| - |y|\,\Big| = |y| - |x|$
mais dans tous les cas, on a montré que $\Big|\,|x| - |y|\,\Big| \leqslant |x - y|$

Exercice 9

On pose, pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = -\ln(1 - x)$ et $g(x) = f(x) - \lfloor f(x) \rfloor$

1. Déterminer les variations de f. Préciser sa limite en 1

f est dérivable (composition de fonctions dérivables) et $\forall x \in [0, 1[, f'(x) = -\dfrac{-1}{1 - x} = \dfrac{1}{1 - x}$
or $x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0$ donc $\forall x \in [0, 1[, f'(x) > 0$ donc f est (strictement) croissante
par ailleurs $\lim\limits_{x \to 1} 1 - x = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$
donc par composition, $\lim\limits_{x \to 1} \ln(1 - x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$

2. Justifier que f est bijective de $[0, 1[$ vers un intervalle J à préciser et déterminer $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$

f est strictement croissante et continue (car dérivable) donc f réalise une bijection de $[0; 1[$ dans $\Big[f(0), \lim\limits_{x \to 1} f(x)\Big[= [0, +\infty[$ car $f(0) = -\ln(1) = 0$

Nota bene : comme on va déterminer la réciproque ci-dessous, le recours au théorème de la bijection ci-dessus n'était pas nécessaire.

On va appliquer la méthode pour déterminer la réciproque :
soit $y \in [0,+\infty[$, alors $\exists x \in [0;1[, f(x) = y \Leftrightarrow \exists x \in [0;1[, -\ln(1-x) = y$
$\Leftrightarrow \exists x \in [0;1[, \ln(1-x) = -y$
$\Leftrightarrow \exists x \in [0;1[, 1-x = e^{-y}$ car $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
finalement $\forall y \in [0,+\infty[$, alors $\exists x \in [0;1[, f(x) = y \Leftrightarrow x = 1 - e^{-y}$
on vérifie que l'antécédent trouvé est bien dans l'ensemble de définition de f : en effet $y \geqslant 0 \Rightarrow -y \leqslant 0 \Rightarrow 0 < e^{-y} \leqslant e^0$ car l'exponentielle est croissante et strictement positive, i.e. $0 < e^{-y} \leqslant 1$ donc $0 > -e^{-y} \geqslant -1$ et enfin $1 > 1 - e^{-y} \geqslant 0$ i.e. $1 - e^{-y} \in \mathscr{D}_f = [0;1[$
cela signifie que tout élément de $[0,+\infty[$ admet un unique antécédent par f (dans $[0,1[$) et que cet antécédent est $1 - e^{-y}$, autrement dit f est bijective et sa bijection réciproque est
$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0;1[\\ y & \mapsto & 1-e^{-y} \end{array}$

3. Justifier que, pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) \in [0,1[$

Par définition de la partie entière, $\forall x \in [0;1[, \lfloor f(x) \rfloor \leqslant f(x) < \lfloor f(x) \rfloor + 1$
donc $0 \leqslant f(x) - \lfloor f(x) \rfloor < 1$ i.e. $g(x) \in [0;1[$

4. Soit $\alpha \in [0,1[$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $g(x) \leqslant \alpha$ (*difficile*)

Soit $x \in [0;1[$, alors $g(x) \leqslant \alpha \Leftrightarrow 0 \leqslant g(x) \leqslant \alpha \Leftrightarrow 0 \leqslant f(x) - \lfloor f(x) \rfloor \leqslant \alpha$
$\Leftrightarrow \lfloor f(x) \rfloor \leqslant f(x) \leqslant \lfloor f(x) \rfloor + \alpha$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n \leqslant f(x) \leqslant n + \alpha$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f^{-1}(n) \leqslant f^{-1}(f(x)) \leqslant f^{-1}(n+\alpha)$
car la réciproque d'une fonction bijective a le même sens de variation
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, 1 - e^{-n} \leqslant x \leqslant 1 - e^{-(n+\alpha)}$
finalement $g(x) \leqslant \alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[1 - e^{-n}, 1 - e^{-(n+\alpha)}\right]$
il s'agit donc de la réunion d'une infinité d'intervalles

5. On rappelle que la commande `rd.rand(n)` renvoie un tableau à n colonnes contenant des nombres choisis aléatoirement entre 0 et 1
Que fait le programme Python ci-contre ?

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
Y=-np.log(1-rd.rand(1000))
Z=Y-np.floor(Y)
L=0
for z in Z:
  if z<= 0.5:
  L=L+1
print(L/1000)
```

Le programme cherche à donner la probabilité que $g(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ en étudiant 1 000 « valeurs » de la fonction g générées aléatoirement. Concrètement, il commence par créer une liste `Y` de 1 000 images par f dont les abscisses sont tirées aléatoirement (dans $[0;1[$), puis il créé la liste `Z` des valeurs correspondantses pour la fonction g. Enfin avec une boucle il calcule le nombre de valeurs de `Z` inférieures ou égales à $\dfrac{1}{2}$ et donne la fréquence pour laquelle $g(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :
$$\forall x \in]-\infty,1], \quad f(x) = \begin{cases} x - 1 + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.

$x \mapsto 1 - x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$ et reste strictement positive, donc par composition, $x \mapsto \ln(1-x)$ est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$

Par produit et somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, f est donc aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,1[$

il reste la continuité en 1 :
par croissances comparées $\lim\limits_{X\to 0+} X\ln(X) = 0$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0^+$
donc par composition, $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = 0$

on en déduit donc : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en 1 et donc sur }]-\infty, 1]}$.

2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer $f'(x)$ pour $x < 1$

On a déjà vu que f était $\boxed{\text{de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-\infty, 1[\text{ elle est donc en particulier } \mathscr{C}^1}$

de plus $\forall x < 1, f'(x) = 1 + (-1) \times \ln(1-x) + (1-x) \times \dfrac{-1}{1-x} = 1 - \ln(1-x) - 1$

d'où $\boxed{\forall x < 1,\ f'(x) = -\ln(1-x)}$

3. En déduire les variations de f

Pour $x < 1, -\ln(1-x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1-x \leqslant 1$ par croissance de ln et de l'exponentielle
d'où $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$
On en déduit les variations (la limite en $-\infty$ est abordée plus bas) :

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖
f	$+\infty$	↘	-1	↗	0

4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Pour le savoir il faut étudier le taux d'accroissement car les théorèmes généraux ne s'appliquent que sur $]-\infty, 1[$ et : pour $x < 1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 - \ln(1-x)$

or $\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty$ donc par composition et somme $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en 1}}$ (nota bene : f admet une tangente verticale en 1)

5. Déterminer la limite de f en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} (1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition
$\lim\limits_{x\to -\infty} = \ln(1-x) = +\infty$ puis par produit et addition de limites

(car pour $x < 1, f(x) = (1-x)\ln(1-x) - 1$) on trouve $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty}$

6. Etudier la convexité de f

On dérive f' qui est de la forme $-\ln(u)$ donc $f'' = -\dfrac{u'}{u}$ (avec $u(x) = 1-x$ donc $u'(x) = -1$)

plus précisément, pour $x < 1$, $f''(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$ (car $x < 1 \Leftrightarrow 1-x > 0$) donc $\boxed{f \text{ est convexe}}$

7. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
Donner la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1
Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ sous Python (on donnera le script).

Tangente en 1 : comme nous l'avons vu plus haut, il s'agit d'une tangente verticale d'équation $x = 1$ et la tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ i.e. $y = -1$ (c'est donc une tangente horizontale)
enfin, un script Python pour le tracé de f est :

```
import numpy as np # pour le logarithme et linspace
import matplotlib.pyplot as plt # pour le tracé
def f(x):
      return (x-1)+(1-x)*np.log(1-x)

x=np.linspace(-3, 0.99, 50) # on choisit de représenter sur [-3;1[
y=[f(t) for t in x] # ou y=f(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions 1 et α vérifiant $-2 < \alpha < 0$

$f(1) = 0$ d'après l'énoncé
sur $[0, 1[$, f est strictement croissante et puisque $f(1) = 0$, alors f ne s'y annule pas
sur $]-\infty, 0]$, f est strictement décroissante et continue, donc induit une bijection entre $\mathbb{R}_-^*$ et $\left[f(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[= [-1, +\infty[$
comme $0 \in [-1, +\infty[$, f s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_-$ en un réel α
de plus , $f(-2) = 3(\ln(3) - 1) > 0$ car $3 > e$ et $\ln(e) = 1$, et $f(0) = -1 > 0$
donc, f étant toujours continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule sur $[-2; 0]$ et même $]-2; 0[$ car $f(-2) \neq 0$ et $f(0) \neq 0$
or α est l'unique solution de $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_-$ donc on a bien $-2 > \alpha > 0$

Conclusion : f s'annule exactement deux fois, en 1 et en un réel α tel que $-2 < \alpha < 0$

9. On souhaite trouver une valeur approchée de α à 10^{-p} près, p étant un entier supérieur ou égal à 3
Compléter le programme Python ci-contre permettant de répondre à la question.

```
import numpy as np
def f(x):
  ...
  ...
  ...
  ...

def ValeurApprochee(p):
  a=-2
  b=0
  while ...
    m=(a+b)/2
    if f(m)>0:
      ...
    else:
      ...
  return m

print(ValeurApprochee(3))
```

On redéfinit f (inutile, on l'avait déjà fait plus haut),
puis on applique la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[-2; 0]$ (attention f est décroissante sur cet intervalle, donc « $f(m) \geqslant 0 \Rightarrow a = m$ ») :

```
import numpy as np
def f(x):
  return (x-1)+(1-x)*np.log(1-x)

def ValeurApprochee(p):
  a=-2.
  b=0.
  while b-a>10**(-p):
    m=(a+b)/2
    if f(m)>0:
      a=m
    else:
      b=m
  return m

print(ValeurApprochee(3))
```