

Exercices types : suites récurrentes

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unités : 2cm en abscisse, 10cm en ordonnée).

1. a. Montrer que la fonction f est paire.

On pourra justifier et utiliser ici l'écriture : $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$

- b. Etudier les variations de f . Préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
- c. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
- d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f
2. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$
- b. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution ℓ et que $0 < \ell < \frac{1}{2}$
3. On définit la suite récurrente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
 $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
 - a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
 - b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$
 - c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$
 - d. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ
 - e. Ecrire une fonction Python donnant une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 2 (d'après un exercice EML)

Soit $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+e^x}$ et $g : x \mapsto 1 - xe^x$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité : 2cm).

1. Justifier que f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
2. Etude de g :
 - a. Déterminer les variations de g . Préciser les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b. Montrer qu'il existe un et un seul réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$
 - c. Montrer que $0 < \alpha < 1$ et dresser le tableau de signe de g .
3. a. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
- b. A l'aide des résultats de la question précédente, déterminer les variations de f .
- c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet pour unique solution α
5. Etude d'une suite récurrente On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 0$
 On pourra utiliser les valeurs approchées : $f'(1/2) \approx 0,025$, $f'(1) \approx -0,124$
 - a. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \alpha$ pour $n \geq 1$
 - b. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α
 - c. Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq 0,125$
 - d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq (0,125)^{n-1}$
 - e. Ecrire un programme Python qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-8} près.

Séries de Riemann et séries télescopiques

Exercice 3

Dire si les séries suivantes convergent en comparant les termes généraux à des séries de référence :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + n^2}$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + \ln(n)}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{1 + n^2}$
5. $\sum_{n \geq 1} \frac{n \ln(n)}{1 + n^2}$
6. $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$
7. $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n!}$
8. $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{1 + n^2}$
9. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n + \sqrt{n}} - \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \right)$

Exercice 4

1. Montrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ converge.
2. Vérifier que, pour $k > 0$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
3. En utilisant les sommes partielles, déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$
4. Justifier que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, puis en déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$

Exercice 5

Dans cet exercice, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Justifier que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge. Quelle est sa limite ?
2. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [k, k+1]$: $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$
En déduire que : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$
3. Déduire de la relation précédente que, pour tout entier $n \geq 2$:
 $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1}$
On pourra faire une somme pour k allant de 1 à $n-1$
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$
5. En déduire un équivalent simple de S_n quand $n \rightarrow +\infty$

Rappels sur les suites (séries) rencontrées en première année

Suites (séries) géométriques et assimilées

Exercice 6

Soit $\lambda \in]0, 1[$, calculer successivement $\sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\lambda^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2\lambda^k$

En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k}, \quad B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k+1}}, \quad C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{2^{2k+1}}$$