

Corrigé

Total sur 29 points

Exercice 1

10 points

On pose $g : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 1}$

1. Déterminer $\mathcal{D}_g$, l'ensemble de définition de g

0,5 point

g est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$ donc son dénominateur ne s'annule pas.

2. A l'aide d'équivalents, déterminer les limites de g aux bornes $\mathcal{D}_g$

1 point

Pour $x \neq 0$, $\frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$ de fait $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1$
 donc $x^2 + 1 \underset{-\infty}{\sim} x^2$ et $x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$

donc par quotient d'équivalents : $\frac{x^3}{x^2 + 1} \underset{-\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^2}$ donc $g(x) \underset{-\infty}{\sim} x$ et de même $g(x) \underset{+\infty}{\sim} x$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

3. Dresser le tableau de variations complet de g

1,5 points

g est $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions polynômiales, de plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(3x^2 + 3 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$g'(x)$ est donc un quotient de termes positifs, donc g est croissante (et même strictement car s'annule seulement pour $x = 0$), d'où le tableau de variations (d'après 2. pour les limites)

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

4. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\frac{x^3}{x^2 + 1} = n$ admet une unique solution, notée x_n , dans $\mathbb{R}$

D'après la question précédente, on sait que g est strictement croissante, étant par ailleurs continue (car $\mathcal{C}^1$), d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) [= \mathbb{R}$ (d'après la question 2.)

1 point

or $\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}$ donc l'équation $g(x) = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ (que l'on note x_n)

5. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, g(x_{n+1}) > g(x_n)$. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. 1,5 points

Pour $n \in \mathbb{N}$, par définition, $g(x_n) = n$ et donc $g(x_{n+1}) = n + 1$ de fait $g(x_n) < g(x_{n+1})$

or g est bijective et croissante, donc sa bijection réciproque (g^{-1}) est également croissante (et même strictement) de fait $g^{-1}(g(x_n)) \leq g^{-1}(g(x_{n+1}))$ donc $x_n \leq x_{n+1}$ (par propriété de la réciproque) i.e. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x_n \leq n + 1$

3 points

$$g(n) = \frac{n^3}{n^2 + 1} \text{ or } n^2 + 1 \geq n^2 \text{ donc (fonction inverse décroissante sur }]0, +\infty[) \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\text{et donc } (n \geq 0 \Rightarrow n^3 \geq 0), \frac{n^3}{n^2 + 1} \leq \frac{n^3}{n^2} \text{ i.e. } g(n) \leq n$$

$$\text{et } g(n + 1) = \frac{(n + 1)^3}{(n + 1)^2 + 1} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n + 2} \text{ donc } g(n + 1) \geq n \Leftrightarrow \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n + 2} \geq n$$

donc $g(n+1) \geq n \Leftrightarrow$ (facteur positif) $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \geq n^3 + 2n^2 + 2n \Leftrightarrow n^2 + n + 1 \geq 0$ ce qui est toujours vrai ($n \geq 0$) d'où $\forall n \in \mathbb{N}, g(n+1) \geq n$
 finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, g(n) \leq n$ et $g(n+1) \geq n$, donc, g étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists x \in [n, n+1], g(x) = n$

or x_n est l'unique solution de cette équation sur $\mathbb{R}$, donc $x_n \in [n, n+1]$ et ce $\forall n \in \mathbb{N}$

7. En déduire la limite de x_n et un équivalent quand n tend vers $+\infty$ 1,5 points

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x_n \leq n+1$

donc par encadrement (théorème des gendarmes, version infinie), $x_n \rightarrow +\infty$ (car $n \rightarrow +\infty$)

de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$ or $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ donc (limite usuelle) $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$

et donc par théorèmes des gendarmes, $\frac{x_n}{n} \rightarrow 1$ i.e. $x_n \sim n$

Exercice 2

19 points

On considère les fonctions f et g définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \ln(x+1)$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifier que : $\forall x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x\sqrt{x}}$ 1,5 points

Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$, elle est donc $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle par quotient de composition de fonctions $\mathcal{C}^1 : x \mapsto 1+x, x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

de plus $\forall x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\sqrt{x} - \ln(1+x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\frac{1}{1+x}\sqrt{x} - \ln(1+x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$$= \frac{\sqrt{x} \left(\frac{1}{1+x}\sqrt{x} - \ln(1+x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{\sqrt{x}x} = \frac{\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x) \times \frac{1}{2} \right)}{x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{x\sqrt{x}}$$

2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0$ 2,5 points
 f est-elle continue en 0 ? dérivable en 0 ?

D'après les développements limités de référence, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc par quotient d'équivalents :

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{x}} \text{ i.e. } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{x} \text{ de fait } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 = f(0)$$

donc f est continue en 0

par ailleurs $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$ donc d'après le résultat précédent et par quotient d'équivalents :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable en 0

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ 1 point

$$\text{Pour } x > 0, f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x) + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\sqrt{x}}$$

or par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

d'après les limites usuelles

donc par continuité de $\ln$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$ donc par opérations, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $g'(x)$ pour $x > 0$ 1,5 points

Par quotient (de fonctions polynômiales), composition et opérations, g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+^*$

et pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{x+1}{2(x+1)^2} = \frac{1-x}{2(x+1)^2}$

5. On donne : $\ln(2) \approx 0,7$ à 10^{-1} près. Déterminer les variations de g 4 points
En déduire que f' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel α vérifiant $1 < \alpha < 7$

D'après 4., pour $x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $1-x$ or $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

donc g est strictement croissante sur $]0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

de plus par continuité des fonctions et par opérations, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{0}{0+1} - \frac{1}{2} \ln(1) = 0$

comme g est strictement croissante sur $]0; 1]$ on en déduit que $\forall x \in]0; 1], g(x) > 0$ de fait g ne s'annule pas sur $]0; 1]$

par ailleurs, $g(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} (1 - \ln(2))$

et $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ donc d'après les limites usuelles et par opérations $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$

donc par opérations, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

finalement, puisque g est continue (car $\mathcal{C}^1$) et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1) \right] = \left] -\infty, \frac{1}{2} (1 - \ln(2)) \right]$

et donc $g(1) > 0$ d'après l'indication de l'énoncé (car $\ln(2) < 1$) donc $0 \in \left] -\infty, \frac{1}{2} (1 - \ln(2)) \right]$

et donc 0 admet un unique antécédent par g sur cet intervalle, i.e. $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1, +\infty[$ (que l'on note α) et donc sur $]0, +\infty[$ puisque g ne s'annule pas sur $]0, 1]$

enfin $g(7) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} \ln(8) = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} \ln(2^3) = \frac{7}{8} - \frac{3 \ln(2)}{2} = \frac{7 - 12 \ln(2)}{8}$

or d'après l'indication de l'énoncé $\ln(2) \geq 0,6$ donc $12 \ln(2) \geq 7,2$ et donc $7 - 12 \ln(2) < 0$ et $g(7) < 0$; d'où $g(1) > 0$ et $g(7) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (g est toujours continue), g s'annule sur $[1; 7]$ et même $]1; 7[$ car $g(1) \neq 0$ et $g(7) \neq 0$

or α est l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $1 < \alpha < 7$

et, d'après 1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$

donc f' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+^*$ en un réel α vérifiant $1 < \alpha < 7$

6. En 0, déterminer un développement limité de g à l'ordre 2 puis un équivalent de $g(x)$ 3 points

Option A : en utilisant les développements limités usuels, en se plaçant au voisinage de 0

d'après le cours $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + (-1)x + (-1)(-2)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $\frac{x}{1+x} = x \times \frac{1}{1+x} = x (1 - x + x^2 + o(x^2)) = x - x^2 + x^3 + xo(x^2)$

or $x^3 = o(x^2)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ et $xo(x^2) = o(x^2)$ car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$ par

produit de limites (et puisque par définition $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$)

donc $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + o(x^2)$ et on additionne alors les deux égalités (un peu à la limite du

programme puisqu'on fait apparaître deux $o(\dots)$ ce qui est contre-indiqué dans le cours) :

soit $\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2} \ln(x+1) = x - x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)$ donc $\boxed{g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}$

en effet $o(x^2) + \frac{1}{2}o(x^2) = o(x^2)$

puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2) + \frac{1}{2}o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} + \frac{1}{2} \frac{o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$ car ces deux limites existent et valent 0 par définition

on déduit alors du développement limité à l'ordre 2 celui à l'ordre 1 : $g(x) = \frac{x}{2} + o(x)$

puis $\boxed{g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}}$ (avec la propriété $f(x) = g(x) + o(g(x)) \Rightarrow f(x) \sim g(x)$)

Option B : on va utiliser la formule de Taylor-Young, considérant que la formule qui définit g est valable en 0 et puisqu'alors g est $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+$

pour le calcul de g'' , on utilise, pour $x \geq 0$, l'expression (valable aussi en 0 donc) :

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x} \text{ et donc } \forall x \geq 0, g''(x) = -2 \times 1 \times (1+x)^{-3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+x)^2}$$

d'où $g(0) = 0$; $g'(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $g''(0) = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$

et d'après la formule de Taylor-Young, $g(x) = 0 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ soit $\boxed{g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}$

7. Avec Python, écrire un programme permettant de déterminer la valeur de α à 10^{-3} près par la méthode de dichotomie. 2 points

Programme classique que l'on prend soin d'adapter : entre autres g est décroissante et notre intervalle de départ est $[1; 7]$ (et on importe `numpy` pour le logarithme).

```
import numpy as np
def g(x):
    return x/(x+1) - 1/2*np.log(1+x)

a=1
b=7
while b-a>10**(-3):
    m=(a+b)/2
    if g(m)>0:
        a=m
    else:
        b=m
print(m)
```

8. Donner le tableau des variations de f 1 point

D'après la question 5., on connaît le signe de g qui est le même que celui de f' et avec les valeurs de $f(0)$ et de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (voir question suivante pour $f(\alpha)$) on peut donc établir les tableaux de signe et de variations :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	$f(\alpha)$	0

9. Montrer que le maximum M de f vérifie : $M = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$ et $0 < M < 1$ 2,5 points

Par définition $g(\alpha) = 0$ i.e. $\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{1}{2} \ln(1+\alpha) = 0$ d'où $\ln(1+\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$

or, puisque $\alpha > 0$, $f(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha)}{\sqrt{\alpha}}$ on en déduit $f(\alpha) = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$

et comme nous l'avons vu à la question précédente (d'après le tableau), f admet un maximum

en α que l'on note M et donc $\boxed{M = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}}$

enfin d'après le tableau de variations, f est strictement positive pour $x > 0$ donc $M = f(\alpha) > 0$ et $\alpha > 1$ d'après 5. donc par stricte croissance de la racine, $\sqrt{\alpha} > \sqrt{1}$ i.e. $\sqrt{\alpha} - 1 > 0$ et donc par stricte croissance du carré sur $\mathbb{R}_+$, $(\sqrt{\alpha} - 1)^2 > 0$ soit $\alpha - 2\sqrt{\alpha} + 1 > 0$ et donc $1 + \alpha > 2\sqrt{\alpha}$

puis (car $1 + \alpha > 0$), $1 > \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$ d'où, finalement, $\boxed{0 < M < 1}$