

Corrigés, a minima des exercices non abordés en classe

Exercices types : suites récurrentes

Exercice 2 (d'après un exercice EML)

Eléments de corrigé

Soit $f : x \mapsto \frac{1+x}{1+e^x}$ et $g : x \mapsto 1 - xe^x$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité : 2cm).

1. Justifier que f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$

Addition, quotient et produit de fonctions $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$).

2. Etude de g :

- a. Déterminer les variations de g . Préciser les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

$g'(x) = -(1+x)e^x$ donc g est croissante sur $] -\infty, -1]$ et décroissante ensuite
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (opérations)

- b. Montrer qu'il existe un et un seul réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(\alpha) = 0$

$g'(x) > 0$ sur $] -\infty, -1]$ donc ne s'annule pas puis bijection (la croissance est stricte) de $[-1, +\infty[$ sur $] -\infty, g(-1)] =] -\infty, 1 + e^{-1}]$ et $1 + e^{-1} > 0$ d'où l'unique solution.

- c. Montrer que $0 < \alpha < 1$ et dresser le tableau de signe de g .

$g(0) = 1$ et $g(1) = 1 - e$ d'où l'existence d'une solution sur $[0; 1]$ et même $]0; 1[$ qui n'est autre que α
 puis g positive sur $] -\infty, \alpha]$ et négative sur $[\alpha, +\infty[$

3. a. Déterminer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1 + e^x - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{g(x)}{(1+e^x)^2}$$

- b. A l'aide des résultats de la question précédente, déterminer les variations de f .

f' est donc du signe de g i.e. positive sur $] -\infty, \alpha]$ et négative sur $[\alpha, +\infty[$
 donc f est croissante sur $] -\infty, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, +\infty[$

- c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (opérations) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (factorisation ou équivalents, puis croissances comparées)

4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet pour unique solution α

$$f(x) = x \Leftrightarrow 1 + x = x(1 + e^x) \Leftrightarrow 1 + x - x - xe^x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

5. Etude d'une suite récurrente

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 0$

On pourra utiliser les valeurs approchées : $f'(1/2) \approx 0,025$, $f'(1) \approx -0,124$

- a. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \alpha$ pour $n \geq 1$

Il est plus simple de montrer d'abord la deuxième partie ($\frac{1}{2} \leq u_n \leq \alpha$) par récurrence :
 initialisation à $n = 1$ (non vérifié pour u_0) vérifiée car $u_1 = f(0) = \frac{1}{2}$ (et $f(0) \leq f(\alpha) = \alpha$)

puis on compose par f pour l'hérédité sachant que f est croissante sur $[0, \alpha]$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(0) = \frac{1}{2}$

Pour les variations, on procède alors par récurrence en posant $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ puis en composant par f (croissante sur $[0, \alpha]$ pour l'hérédité

Option B : on étudie $f(x) \geq x \Leftrightarrow g(x) \geq 0$ (cf. question 4.) $\Leftrightarrow x \leq \alpha$ (cf. 2.c.)

on alors besoin de $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$ (récurrence), alors d'après $f(x) \geq x$ pour $x \leq \alpha$ on a $f(u_n) \geq u_n$ i.e. $u_{n+1} \geq u_n$

b. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

Théorème de la limite monotone (d'après 5.a. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée) puis théorème du point fixe (hypothèses à préciser), puis α est l'unique point fixe d'après 4.

c. Montrer que : $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], |f'(x)| \leq 0,125$

g est décroissante sur cet intervalle, donc $g\left(\frac{1}{2}\right) \leq g(x) \leq g(1)$

et $(1 + e^x)^2$ est comprise entre ses valeurs en $\frac{1}{2}$ et 1 (croissance de l'exponentielle puis du carré sur $\mathbb{R}_+$) puis on encadre f' entre ses valeurs en 1 et en $\frac{1}{2}$ et on trouve le résultat grâce aux valeurs approchées données dans l'énoncé.

d. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leq (0,125)^{n-1}$

D'après l'inégalité des accroissements finis car $a = \alpha$ et $b = u_n$

et car $u_n \in \left[\frac{1}{2}, \alpha\right]$ et donc a fortiori $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et de même pour α

on démontre dans un premier temps, pour $n \geq 1$ $|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,125|u_n - \alpha|$ puis on montre l'inégalité demandée par récurrence en utilisant pour l'initialisation que $|u_1 - \alpha| \leq 1$ puisque $0 \leq u_1 = \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$

e. Ecrire un programme Python qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-8} près.

Classique en faisant les calculs itératifs des termes avec `while (0.125)**(n-1)>10**(-8):` puis `n=n+1`

Séries de Riemann et séries télescopiques

Exercice 5

Dans cet exercice, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Justifier que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge. Quelle est sa limite ?

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la série de Riemann avec $\alpha = 1$ dite « série harmonique », on sait par propriété du cours que cette série diverge et c'est forcément vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone sur les séries à termes positifs.

2. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, et $x \in [k, k+1]$: $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

En déduire que : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [k, k+1]$ alors $k \leq x \leq k+1$ et donc par application de la fonction inverse qui est décroissante sur $]0, +\infty[$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

on pose $f(x) = \ln(x)$ alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ et en posant $I = [k, k+1]$, d'après l'inégalité précédente

$$\forall x \in I, \frac{1}{k+1} \leq f'(x) \leq \frac{1}{k}$$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis, appliquée à $a = k$ et $b = k+1$, on obtient :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \text{ i.e. } (k+1-k) \frac{1}{k+1} \leq f(k+1) - f(k) \leq (k+1-k) \frac{1}{k}$$

soit $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ et ceci est valable quel que soit l'intervalle $I = [k, k+1]$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

3. Déduire de la relation précédente que, pour tout entier $n \geq 2$: $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1}$
On pourra faire une somme pour k allant de 1 à $n-1$

Soit $n \geq 2$, comme indiqué, on additionne les inégalités démontrées précédemment :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\text{or } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_{n-1} \text{ et par changement d'indice } (i = k+1), \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - 1 = S_n - 1$$

$$\text{et par télescopage } \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

$$\text{d'où, finalement, } S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1}$$

4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

D'après la double inégalité précédente, pour $n \geq 2$, d'une part $S_n - 1 \leq \ln(n)$ donc $S_n \leq \ln(n) + 1$ et d'autre part $\ln(n) \leq S_{n-1}$ donc $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_{n-1} + \frac{1}{n}$ i.e. $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n$ car $S_{n-1} + \frac{1}{n} = S_n$
d'où, en assemblant, $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$ ce qui est vrai aussi pour $n = 1$ car $S_1 = 1$

5. En déduire un équivalent simple de S_n quand $n \rightarrow +\infty$

La question précédente nous fait comprendre que $S_n \ll$ « croît au rythme de $\ln(n)$ », on va donc montrer que c'est l'équivalent recherché :

d'après l'inégalité précédente, et pour $n \geq 2$ (pour éviter la division par $\ln(1)$) :

$$\frac{\ln(n) + \frac{1}{n}}{\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)} \text{ i.e. } 1 + \frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1$$

or d'après les limites usuelles, $\frac{1}{n \ln(n)} \rightarrow 0$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

donc d'après le théorème des gendarmes, $\frac{S_n}{\ln(n)} \rightarrow 1$ i.e. $S_n \sim \ln(n)$

Nota bene : on a donc montré la divergence (vers $+\infty$) de la série harmonique

Exercice 6

Soit $\lambda \in]0, 1[$, calculer successivement $\sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda^k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\lambda^k$, $\sum_{k=0}^{+\infty} k^2\lambda^k$

Par propriété sur les séries géométriques si $\lambda \in]0, 1[$

lors $\sum_{k \geq 0} k\lambda^{k-1}$ converge (série géométrique « dérivée ») et $\sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda^{k-1} = \frac{1}{(1-\lambda)^2}$

donc par propriété sur les séries, $\sum_{k \geq 0} k\lambda^k$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda^k = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda^{k-1} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$

De manière analogue (propriété sur les séries géométriques « dérivée » seconde) :

$\sum_{k \geq 1} k(k-1)\lambda^k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\lambda^k = \lambda^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\lambda^{k-2} = \frac{2\lambda^2}{(1-\lambda)^3}$

enfin par linéarité de la convergence des séries et propriété des séries géométriques :

$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2\lambda^k = \sum_{k=0}^{+\infty} [k(k-1) + k]\lambda^k = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\lambda^k + \sum_{k=0}^{+\infty} k\lambda^k = \frac{2\lambda^2}{(1-\lambda)^3} + \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$

En déduire les valeurs des sommes suivantes :

D'après les résultats précédents et par linéarité de la convergence, ces trois séries convergent et :

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2 \quad B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 4$$

$$C = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k+1)}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{2k}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^{2k}} \right] = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{4^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{4^k} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} + \frac{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3} \right)$$

donc $C = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \times 2 + \frac{8}{27} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{24 + 8}{27} \right) = \frac{16}{27}$

Rappels sur les suites (séries) rencontrées en première année

Suites (séries) géométriques et assimilées

Exercice 7 - suite arithmético-géométrique

On pose $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}$

Soit c le réel tel que $c = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}$

- Déterminer le réel c

$$c = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{1}{3}$$

Nota bene : on a trouvé le « point fixe » (de la fonction f sous-jacente).

- Montrer que la suite v définie par $v_n = u_n - c$ pour $n \in \mathbb{N}$ est géométrique ; on précisera sa raison.

Pour $n \in \mathbb{N}$, par définition de v , $v_{n+1} = u_{n+1} - c$

donc $v_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} - c$ par définition de u

donc $v_{n+1} = -\frac{1}{2}(v_n + c) + \frac{1}{2} - c$ par définition de v

donc $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2} - c = -\frac{1}{2}v_n$ d'après 1.

i.e. v est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

3. Montrer que v converge, puis que u converge.

Par propriété sur les suites géométriques, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0$

or $q^n \rightarrow 0$ pour $|q| < 1$ donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$ et donc $v_n \rightarrow 0$ et donc par définition de $u, u_n \rightarrow c$

4. Exprimer u_n en fonction de n

Comme évoqué à la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n v_0$

or $v_0 = u_0 - c = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

puis $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + c$ i.e. $u_n = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$

Exercice 8 - suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit u la suite définie par :

$u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

On note a, b les solutions de l'équation $x^2 = x + 1$ avec $b < 0 < a$

1. Montrer, par récurrence, que u_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$

Par récurrence ! Il s'agit ici d'une récurrence double, puisqu'il faut une information sur deux rangs pour en déduire le rang suivant. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n \in \mathbb{N}$

Initialisation : elle se fait sur deux rangs pour la récurrence double, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies

Hérédité : ici l'hypothèse se fait sur deux rangs, soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies

par hypothèse, $u_n \in \mathbb{N}$ et $u_{n+1} \in \mathbb{N}$ alors de manière évidente $u_n + u_{n+1} \in \mathbb{N}$ i.e. $u_{n+2} \in \mathbb{N}$ et donc $P(n+2)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie

2. Déterminer a et b . Montrer que $1 < a < 2$ et que $b = 1 - a = -\frac{1}{a}$

$x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions ($\Delta = 5$) qui sont $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

on retrouve $b < 0$ car $5 > 1 \Rightarrow \sqrt{5} > \sqrt{1} = 1$ par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$

par ailleurs $4 < 5 < 9$ donc de même $\sqrt{2} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ i.e. $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $3 < 1 + \sqrt{5} < 4$ et

donc $\frac{3}{2} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{4}{2}$ i.e. $\frac{3}{2} < a < 2$ et a fortiori $1 < a < 2$

enfin d'une part, $1 - a = 1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2 - 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = b$ et d'autre part :

$$-\frac{1}{a} = -\frac{2}{1 + \sqrt{5}} = -\frac{2 \times (1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = -\frac{2 \times (1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = -\frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = b$$

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$

$x^2 - x - 1$ est l'équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc par propriété sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda a^n + \mu b^n$

de plus d'une part $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et d'autre part $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda a + \mu b$ donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda a + \mu b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu(b-a) = 1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = \frac{1}{b-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{b-a} \\ \mu = \frac{1}{b-a} \end{cases}$$

or par définition de a et b , $b-a = \frac{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-2\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5}$ d'où $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

finalement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}a^n - \frac{1}{\sqrt{5}}b^n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$

4. Montrer que les séries suivantes sont absolument convergentes :

$$\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}, \quad \sum n \frac{u_n}{2^{n+1}}, \quad \sum n^2 \frac{u_n}{2^{n+1}}$$

On utilise pour les trois séries que $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}(|a|^n + |b|^n)$ d'après l'inégalité triangulaire

$$\text{de fait } \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{|b|}{2}\right)^n \right) \text{ car } a > 0$$

$$\text{de plus } a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ donc } 0 \leq \frac{a}{2} < 1$$

$$\text{car } \sqrt{5} < \sqrt{9} \text{ par stricte croissance de racine puis } \frac{1+\sqrt{5}}{4} < \frac{1+3}{4} = 1$$

$$\text{et } |b| \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a < 1 \text{ par inégalité triangulaire}$$

$$\text{finalement } \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2\sqrt{5}}(q_1^n + q_2^n) \text{ avec } q_1 = \frac{a}{2} \text{ et } q_2 = \frac{|b|}{2}$$

$$\text{or } \sum_{n \geq 0} q_1^n \text{ et } \sum_{n \geq 0} q_2^n \text{ sont des séries géométriques convergentes (car } |q_1| < 1 \text{ et } |q_2| < 1)$$

$$\text{donc par linéarité } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\sqrt{5}}(q_1^n + q_2^n) \text{ converge}$$

$$\text{donc par théorème de comparaison (les séries sont à termes positifs), on en déduit que } \sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{2^{n+1}}$$

$$\text{converge, i.e. } \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{2^{n+1}} \text{ converge absolument (car } \left| \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| = \frac{|u_n|}{2^{n+1}}) \text{ et donc } \sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{2^{n+1}} \text{ converge}$$

(convergence absolue $\Rightarrow$ convergence)

$$\text{puis on fait de même pour les séries } \sum n \frac{u_n}{2^{n+1}} \text{ et } \sum n^2 \frac{u_n}{2^{n+1}} \text{ en comparant respectivement à}$$

des séries géométriques dérivées et dérivées secondes (cf. **exercice 6**).

5. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$

$$\text{La série converge d'après la question précédente et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{a^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{b^n}{2^n} \right) \text{ par}$$

convergence des ces deux séries (cf. question précédente)

$$\text{or comme à l'exercice 6 } \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{a^n}{2^n} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{a}{2}\right)^{n-2} + \frac{a}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{a^n}{2^n} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{2}{\left(1-\frac{a}{2}\right)^3} + \frac{a}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\text{or } 1 - \frac{a}{2} = \frac{2-a}{2} \quad \dots \text{ je vous laisse poursuivre!}$$

Convergence et comportement asymptotique de suites et séries

Exercice 15

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

$$v_n = u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}, \quad w_n = u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!}$$

1. Calculer u_n pour $n \in \{0, \dots, 4\}$

$$\text{Par définition : } u_0 = \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} = 1, \quad u_1 = \sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} = 0$$

$$u_2 = \sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{et } u_4 = \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite L

Par propriété $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles de la série exponentielle pour $x = -1$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e^{-1}

3. Montrer que v et w sont adjacentes et de limite L

Par définition :

$$v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

d'après la relation de Chasles

$$\text{donc } v_{n+1} - v_n = \sum_{k=2n+1}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} = -\frac{2n+2}{(2n+2)(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} = -\frac{2n+1}{(2n+2)!}$$

donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$ i.e. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

$$\text{et de manière analogue } w_{n+1} - w_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=2n+2}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} = \frac{2n+3-1}{(2n+3)!} = \frac{2n+2}{(2n+3)!}$$

donc $w_{n+1} - w_n \geq 0$ i.e. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

$$\text{enfin } w_n - v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{(2n+1)!}$$

or $(2n+1)! = (2n+1)(2n)! \geq 2n+1 \geq 1$ donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)! = +\infty$ donc par

quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = 0$ et donc $w_n - v_n \rightarrow 0$

finalement les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite

de plus $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une « suite extraite » de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (cette notion est hors programme) et comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle converge vers la même limite (cette propriété est également hors programme), i.e. $L = e^{-1}$ (donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également).