

Espaces vectoriels, familles de vecteurs, familles libres, bases

Exercice 1

1. Soit $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une famille libre.
2. Soit $P_1(X) = X^2 - 1$, $P_2(X) = X^2 + X$ et $P_3(X) = 1$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$
Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une famille libre.
3. Soit $e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (1, -1, 2)$ et $e_3 = (1, 5, 0)$
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une famille liée de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.

1. Montrer que l'ensemble des vecteurs colonne X tels que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$
2. Montrer que $\{AX ; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Exercice 3

1. Soit : $e_1 = (1, 0, 0, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0, 1)$, $e_3 = (1, 1, 1, 1)$, $e_4 = (1, -1, -1, 0)$
Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$
2. Soit $P_0(X) = X^2 - X - 1$, $P_1(X) = X + 2$ et $P_2(X) = X^2 - 1$
Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Exercice 4

On note $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M carrées d'ordre 2 vérifiant ${}^tM = M : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$

1. Montrer que $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. Soit : $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Montrer que (E_1, E_2, E_3) est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$

3. On pose : $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Montrer que (F_1, F_2, F_3) est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et E l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(a) = 0$:
 $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(a) = 0\}$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$

Dimensions et sous-espaces vectoriels.

Exercice 6

Déterminer le rang de la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (2, 2, 0)$ et $u_3 = (4, -2, 3)$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et F l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $P'(0) + P''(0) = 0$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E
2. On note $G = \text{Vect}(1, X^2 - 2X, X^3, \dots, X^n)$. Montrer que $G \subset F$
3. Montrer que $\dim G = n$
4. En déduire que : $n \leq \dim F \leq n + 1$, puis que : $\dim F = n$ et $F = G$

Exercice 8

1. On considère $E = \mathbb{R}^2$
Dans chacun des cas suivants, dire si (u, v) est une famille libre ou liée.

- a. $u = (1, 2)$, $v = (1, -1)$
- b. $u = (1, 2a)$, $v = (a + 1, 4)$ où $a \in \mathbb{R}$

2. On considère $E = \mathbb{R}^3$
Dans chacun des cas suivants, dire si (u, v, w) est une famille libre ou liée.

- a. $u = (1, 2, 1)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (0, 0, 0)$
- b. $u = (-1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1)$, $w = (1, 1, -1)$
- c. $u = (2, -1, 1)$, $v = (-2, 0, 3)$, $w = (2, -3, 9)$
- d. $u = (1, 0, -1)$, $v = (2, -2, 1)$, $w = (a, b, c)$ où a, b, c sont des réels.

3. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que (I_3, A, A^2) est une famille liée (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que (I_2, A, B) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 9

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (2, 1, 1) \quad u_2 = (3, -1, -2) \quad u_3 = (1, 3, 4)$$

1. Montrer que : $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$
2. La famille $F = (u_1, u_2, u_3)$ est-elle libre ? Est-ce une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Le vecteur $v = (1, 3, -4)$ est-il combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3) ?
4. Le vecteur $w = (12, 1, -1)$ est-il combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3) ?
5. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$
Montrer que x est combinaison linéaire d'éléments de F si, et seulement si : $x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0$

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a \in \mathbb{R}$

On pose $P_0(X) = 1 + X$, $P_1(X) = X + X^2$, $P_2(X) = X^2 + X^3$, $P_3(X) = 1 + aX^3$

1. Dans le cas où $a = 1$, montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est liée et déterminer le rang de la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) , c'est-à-dire la dimension de $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$
2. Dans le cas $a = -1$, montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

Exercice 11

Soit $\mathcal{S}$ le système linéaire homogène de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer une base de l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$

Des exercices classiques

Exercice 12

Pour a, b, c réels, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ lorsque

a, b, c décrivent $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\mathcal{A} = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$ et une base de $\mathcal{A}$

Exercice 13

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que I_3 , N et N^2 sont dans F et calculer N^3
2. Montrer que F est un espace vectoriel et que $\mathcal{B} = (I_3, N, N^2)$ en est une base.
3. Soit $A = I_3 + N + N^2$
 - a. Vérifier que $A^2 = I_3 + 2N + 3N^2$ et $A^3 = I_3 + 3N + 6N^2$
 - b. Quelles sont les coordonnées de A , de A^2 et de A^3 relativement à $\mathcal{B}$?
 - c. Montrer que $\mathcal{A} = (A, A^2, A^3)$ est une base de F

Exercice 14

1. Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
 - a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
 - b. Montrer que $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (0, -1, 1)$ sont deux vecteurs de F formant une famille libre.
 - c. Montrer que (v, w) est une base de F

2. Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 + x_3 = 0\}$
Montrer que $G = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, -1)$. Quelle est la dimension de G ?
3. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$

Pour aller un peu plus loin

Exercice 15 - *ce type d'espace vectoriel n'est pas au programme*

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' = y$ sur $\mathbb{R}$ (on admet que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel).

1. Résoudre E et en déduire une base de $\mathcal{E}$
2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
Montrer que (ch, sh) forme une base de $\mathcal{E}$

Exercice 16 - des espaces vectoriels ?

Tous les espaces vectoriels (ou pas) ci-dessous ne sont pas forcément au programme, mais cela permet de tester votre connaissance du concept (d'espace vectoriel)

Les ensembles suivant sont-ils des (sous)-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$
2. L'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$
3. L'ensemble des fonctions réelles T -périodiques sur $\mathbb{R}$ ($T > 0$ fixé).
4. L'ensemble des fonctions réelles convexes sur $\mathbb{R}$
5. L'ensemble des fonctions réelles croissantes sur $\mathbb{R}$
6. L'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$
7. L'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
8. L'ensemble des suites réelles de limite nulle.
9. L'ensemble des fonctions réelles définie sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +/\infty$
10. L'ensemble des suites réelles de limite $+\infty$
11. L'ensemble des suites réelles convergentes.
12. L'ensemble des suites réelles divergentes
13. L'ensemble des suites u telles que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$
14. L'ensemble des fonctions réelles de limite 1 en $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +/\infty$
15. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'(x) + ay(x) = 0$ sur un intervalle I , où $a \in \mathbb{R}$.
16. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x) + ay(x) = b$ sur un intervalle I , où a et b sont des réels.
17. $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ fixés, l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$
18. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, nulles en dehors d'un segment fermé.