

Devoir à rendre en binôme, obligatoirement.

Exercice 1

23 points

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. a. Calculer $(A - 2I)(A + 2I)(A - I)$

2 points

$$\text{Tout d'abord : } A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ensuite : } A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ainsi : } (A - 2I)(A + 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{enfin : } A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{on en déduit : } (A - 2I)(A + 2I)(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } (A - 2I)(A + 2I)(A - I) = 0_3$$

- b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

1,5 points

D'après la question précédente : $(A - 2I)(A + 2I)(A - I) = 0_3$

Or : $(A - 2I)(A + 2I)(A - I) = (A^2 - 4I)(A - I) = A^3 - A^2 - 4A + 4I$

on en déduit que $A^3 - A^2 - 4A + 4I = 0_3$

d'où $A(A^2 - A - 4I) = -4I$ ainsi $A \left(-\frac{1}{4}(A^2 - A - 4I) \right) = I$

on en déduit que la matrice A est inversible, et que $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^2 - A - 4I)$

2. On note $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$

$$\text{a. Résoudre le système suivant : } \begin{cases} -2x & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & = & 0 \\ 2x & & - & 2z & = & 0 \end{cases}$$

1 point

$$\begin{cases} -2x & + & 2z & = & 0 \\ & - & y & = & 0 \\ 2x & - & 2z & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & z \\ y & = & 0 \end{cases} \text{ car } L_3 = -L_1$$

donc l'ensemble des solutions du système est

$$\mathcal{S} = \{(x, 0, x), x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 0, 1))$$

b. Déterminer $E_2(A)$

1,5 points

Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ alors il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} X \in E_2(A) &\Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow (A - 2I)X = 0_{3,1} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z & = & 0 \\ & -y & = & 0 \\ 2x - 2z & = & 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 0, 1)) \text{ d'après la question précédente} \end{aligned}$$

finalement $X \in E_2(A) \Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ i.e. $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c. En déduire que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_2(A)$

0,5 point

D'après la question précédente, $E_2(A)$ s'exprime comme un Vect, c'est donc un espace

vectoriel. De plus, par définition du Vect, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille génératrice de $E_2(A)$, et

elle est libre car composée d'un vecteur non nul, c'est donc une base de $E_2(A)$

3. Déterminer de même une base de $E_1(A)$ et $E_{-2}(A)$, espaces vectoriels définis par : 3 points

$$E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\} \quad \text{et} \quad E_{-2}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ alors

$$\begin{aligned} X \in E_1(A) &\Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow (A - I)X = 0_{3,1} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \\ 2x - z & = & 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2z & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \\ 3z & = & 0 \end{cases} \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ & & \\ z & = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{donc } E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$X \in E_{-2}(A) \Leftrightarrow AX = -2X \Leftrightarrow (A + 2I)X = 0_{3,1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\text{donc } E_{-2}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

pour les mêmes raisons, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des bases, respectivement de $E_1(A)$ et de $E_{-2}(A)$

4. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer P^{-1} 2 points

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

À ce stade, on peut déjà dire que P est inversible car elle a été réduite en une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\text{on trouve donc } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ (ce que l'on peut vérifier en calculant } PP^{-1})$$

5. Déterminer la matrice $D = P^{-1}AP$

1,5 points

$$\begin{aligned} \text{D'abord } AP &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } P^{-1}AP = \\ &\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times \frac{1}{2} + 0 + 2 \times \frac{1}{2} & 0 + 0 + 0 & -2 \times \frac{1}{2} + 0 + 2 \times \frac{1}{2} \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 1 + 0 & 0 + 0 + 0 \\ 2 \times \frac{1}{2} + 0 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) & 0 & -2 \times \frac{1}{2} + 0 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} \\ \text{donc } P^{-1}AP &= D = \text{Diag}(2, 1, -2) \end{aligned}$$

On appelle commutant de A , et on note C_A , l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$AM = MA$$

On appelle commutant de D , et on note C_D , l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$DN = ND$$

6. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1,5 points

De manière évidente $C_A \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $0_3 \in C_A$ car $A0_3 = 0_3$ et $0_3A = 0_3$
 par ailleurs pour $M_1 \in C_A$, $M_2 \in C_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
 $A(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1) + AM_2 = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda M_1 A + M_2 A = (\lambda M_1 + M_2)A$
 donc $\lambda M_1 + M_2 \in C_A$ (i.e. C_A est stable par combinaison linéaire)
 finalement, C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer : $M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$

1,5 points

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $M \in C_A \Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1}$
 $\Leftrightarrow P^{-1}PDP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} \Leftrightarrow DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1}$ car $PP^{-1} = I$
 donc $M \in C_A \Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPDP^{-1}P \Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD \Leftrightarrow DN = ND$
 finalement $M \in C_A \Leftrightarrow N \in C_D$

8. Déterminer C_D , en utilisant les coefficients des matrices.

2 points

Par définition, pour $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in C_D \Leftrightarrow DN = ND$

$$\text{alors en posant } N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \text{ d'une part } ND = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & -2c \\ 2d & e & -2f \\ 2g & h & -2i \end{pmatrix}$$

$$\text{d'autre part } DN = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ -2g & -2h & -2i \end{pmatrix}$$

donc $ND = DN \Leftrightarrow 2a = 2a$ et $b = 2b$ et $-2c = 2c$ et $2d = d$ et $e = e$ et $-2f = f$ et $2g = -2g$
 et $h = -2h$ et $-2i = -2i$

donc $ND = DN \Leftrightarrow (a, e, i) \in \mathbb{R}^3$ et $b = c = d = f = g = h = 0 \Leftrightarrow N = \text{Diag}(a, e, i)$

finalement $C_D = \{\text{Diag}(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

$$9. \text{ En déduire : } C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

3 points

Soit $M \in C_A$, alors comme vu à la question 7., $N = P^{-1}MP \in C_D$
donc d'après la question précédente $\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, N = \text{Diag}(a, b, c)$

$$\text{alors } M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c & 0 & \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c \\ 0 & b & 0 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}c & 0 & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M \in C_A \Rightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Remarque : nous n'avons pas raisonné par équivalence, il faut donc s'assurer de l'autre inclusion.

$$\text{réciproquement si } \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{alors d'une part } AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 2a \\ 0 & c & 0 \\ 2a & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

$$\text{d'autre part } MA = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 0 & 2a \\ 0 & c & 0 \\ 2a & 0 & 2b \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } AM = MA \text{ et donc l'autre inclusion, finalement } C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \middle| (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

10. Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A

2 points

D'après la question précédente :

$$C_A = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\text{i.e. } C_A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect}(E_1, E_2, E_3)$$

en notant E_1, E_2, E_3 ces trois matrices

par définition du Vect, la famille (E_1, E_2, E_3) forme une famille génératrice de C_A
par ailleurs, soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0_3$

$$\text{alors } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

donc la famille (E_1, E_2, E_3) est libre (et toujours génératrice de C_A), c'est donc une base de C_A , qui de fait est un espace vectoriel de dimension 3 (car nous en avons trouvé une base qui comporte trois éléments).

Exercice 2

Edhec 2005

17 points + 9 points pour la question 6.

Un mobile se déplace sur un axe d'origine O , et on s'intéressera uniquement aux positions dont les coordonnées sont entières.

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$

On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n définit une variable aléatoire (sur un univers Ω).

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : $1, 2, 3, 0, 0, 1$, alors on a $T = 4$

On admet que T est une variable aléatoire.

1. a. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables X_i . 1,5 points

Si $k = 1$, $T = k$ est synonyme de $X_1 = 0$

Sinon, si $k > 1$, cela veut dire que le mobile n'est pas revenu à l'origine avant l'instant k , donc il n'a fait qu'avancer et de fait cet événement réalise tous les événements

$X_1 = 1, X_2 = 2, \dots, X_{k-1} = k - 1$ et $X_k = 0$

dans ce cas, $[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \right) \cap [X_k = 0] = [X_{k-1} = k - 1] \cap [X_k = 0]$ car la suite $([X_i = i])_{1 \leq i \leq k-1}$ est une suite décroissante d'événements (pour $i \leq k$, $[X_i = i] \subset [X_k = k]$ et $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$).

- b. Donner la loi de X_1 0,5 point

Par définition de X_1 , elle ne peut prendre que deux valeurs $X_1 = 1$ avec la probabilité p et $X_1 = 0$ avec la probabilité $1 - p$. Il s'agit d'une loi de Bernoulli.

- c. En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T 2 points

T suit une loi géométrique de paramètre $(1 - p)$: en considérant le retour à 0 comme le succès. En effet $T = k$ signifie que le premier retour à l'origine s'effectue à l'instant k comme l'énoncé nous le demande, nous allons le démontrer,

d'après 1.a, $P(T = k) = P([X_{k-1} = k - 1] \cap [X_k = 0]) = P(X_{k-1} = k - 1)P_{[X_{k-1}=k-1]}(X_k = 0)$ d'après la formule des probabilités composées.

or $P_{[X_{k-1}=k-1]}(X_k = 0) = 1 - p$ d'après l'énoncé et comme on peut le pressentir à l'aide de notre analyse à la question 1, $P(X_{k-1} = k - 1) = p^{k-1}$ (ou $P(X_k = k) = p^k$ pour $k \geq 1$), ce que nous allons montrer par récurrence.

donc pour $k \geq 2$, on définit l'assertion $P(k) : P(X_{k-1} = k - 1) = p^{k-1}$

Initialisation : pour $k = 2$: $P(2)$ est vraie $\Leftrightarrow P(X_1 = 1) = p$ ce qui est vrai d'après la question précédente.

Hérédité : soit $k > 2$ tel que $P(k)$ soit vraie,

d'après la (petite) formule des probabilités totales :

$P(X_k = k) = P(X_{k-1} = k - 1)P_{(X_{k-1}=k-1)}(X_k = k) + P(X_{k-1} \neq k - 1)P_{(X_{k-1} \neq k-1)}(X_k = k)$ car $[X_{k-1} = k - 1]$ et $[X_{k-1} \neq k - 1]$ sont deux événements contraires

or $P_{(X_{k-1} \neq k-1)}(X_k = k) = 0$ car si le mobile n'est pas à l'abscisse $k - 1$ à l'instant $k - 1$, il ne peut se trouver à l'abscisse k à l'instant suivant.

donc $P(X_k = k) = P(X_{k-1} = k - 1)P_{[X_{k-1}=k-1]}(X_k = k) = p^{k-1}P_{[X_{k-1}=k-1]}(X_k = k)$ par hypothèse de récurrence

or $P_{[X_{k-1}=k-1]}(X_k = k) = p$ par définition de l'expérience,
donc $P(X_k = k) = p^k$, i.e. $P(k+1)$ est vraie, d'où l'hérédité donc par théorème de récurrence, $\forall k \geq 2, P(k)$ est vraie, i.e. $P(X_{k-1} = k-1) = p^{k-1}$
d'où en revenant à l'égalité initiale, $P(T = k) = p^{k-1}(1-p)$, on reconnaît la loi géométrique de paramètre $1-p$

2. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ 2 points

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(n) : X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

Initialisation : comme l'indique l'énoncé $X_0 = 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $P(n)$ vraie

soit $k \in X_{n+1}(\Omega)$, si $k = 0$, alors $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$

si $k > 0$, alors $k-1 \in X_n(\Omega)$ par définition de l'expérience

donc par hypothèse de récurrence $k-1 \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et donc $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \subset \llbracket 0, n+1 \rrbracket$

de fait dans tous les cas, $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ d'où $X_{n+1}(\Omega) \subset \llbracket 0, n+1 \rrbracket$

mais ce n'est pas fini, il faut aussi montrer l'autre inclusion ! c'est-à-dire que X_{n+1} peut prendre toutes ces valeurs.

soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket = X_n(\Omega)$ par hypothèse de récurrence, alors par définition de l'expérience $0 \in X_{n+1}(\Omega)$ et $k+1 \in X_{n+1}(\Omega)$ (le mobile peut soit avancer d'une unité, soit revenir à 0)

autrement dit $0 \in X_{n+1}(\Omega)$ et $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \subset X_{n+1}(\Omega)$ donc $\llbracket 0, n+1 \rrbracket \subset X_{n+1}(\Omega)$

finalement $X_{n+1}(\Omega) \subset \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ et $\llbracket 0, n+1 \rrbracket \subset X_{n+1}(\Omega)$, donc $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, i.e. $P(n+1)$ est vérifiée, d'où l'hérédité et donc par récurrence la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$

- b. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'événements $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $P(X_n = 0) = 1-p$ 1,5 points

D'après la question précédente, $X_{n-1}(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est un système complet d'événements

donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) P_{[X_{n-1}=k]}(X_n = 0)$$

or quelle que soit la valeur de k , $P_{[X_{n-1}=k]}(X_n = 0) = 1-p$

$$\text{donc } P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)(1-p) = (1-p) \sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) = 1-p$$

car $\sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) = 1$, puisque $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$ forme un système complet d'événements

3. a. Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$ 1 point

On peut utiliser la formule des probabilités totales comme à la question 1.c. ou dire que par définition de l'expérience $[X_{n+1} = k] = [X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]$ et donc d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_n = k-1) P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$$

car $P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) = p$

- b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k (1-p)$ 1,5 points

En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$

Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat. 1 point

Il s'agit encore d'une récurrence (mais pour chaque n , la propriété contient plusieurs valeurs de k). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit donc l'assertion $P(n) : \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, P(X_n = k) = p^k (1-p)$

Initialisation : pour $n = 1$, alors avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$
forcément $k = 0$ et $P(X_1 = 0) = 1 - p = p^0(1 - p)$ comme nous l'avons vu plus haut
ce qui signifie que $P(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

1^{er} cas : si $k = 0$, alors d'après **2.b.**, $P(X_n = 0) = 1 - p = p^0(1 - p)$ ce qui est le résultat recherché.

2^{ème} cas : si $k > 0$, alors d'après **3.a.** $P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k - 1)$

or par hypothèse de récurrence (comme $k - 1 \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $P(X_n = k - 1) = p^{k-1}(1 - p)$)

donc $P(X_{n+1} = k) = p^k(1 - p)$ ce qui est le résultat recherché

finalement avec les deux cas combinés, nous avons montré que $P(n + 1)$ est vraie, d'où l'hérédité et la propriété par récurrence.

d'après la question **3.a.** encore et dans le cas où $k = n + 1$, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X_{n+1} = n + 1) = pP(X_n = n)$$

Nous sommes donc confrontés à une suite géométrique de raison p (on peut poser $u_n = P(X_n = n)$, ce qui donne $u_{n+1} = pu_n$)

donc $\forall n \in \mathbb{N} (u_n = p^n u_0)$, $P(X_n = n) = p^n P(X_0 = 0) = p^n$ car $P(X_0 = 0) = 1$

On peut le voir comme la réalisation de n succès dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , où le succès est « le mobile avance ».

- c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$ 1 point

Si $n = 0$, l'égalité est vérifiée et si $n > 0$, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1 - p) = (1 - p) \sum_{k=0}^{n-1} p^k = (1 - p) \frac{1 - p^n}{1 - p} \text{ (d'après les résultats sur les sommes de termes d'une suite géométrique) et donc } \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) = 1 - p^n$$

or $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + P(X_n = n)$ et $P(X_n = n) = p^n$ d'après la question

3.b. donc $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1 - p^n + p^n = 1$

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$

Avec Python, et la bibliothèque `numpy.random` renommée `rd`, on rappelle que `rd.random()` renvoie au hasard un nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$

Compléter le programme Python suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur. 1,5 points

```
n=int(input('n='))
X=0
for k in range(1,n+1):
    a=rd.random()
    if a < 1/3 :
        X = X+1
    else
        X = 0
print(X)
```

Le mobile va donc faire n mouvements (où n sera rentré par l'utilisateur). A chaque mouvement, il y a une chance sur trois que le mobile avance, sinon il revient à l'origine.

5. a. Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$ 2 points

Une possibilité est de le montrer par récurrence,

pour $n \geq 2$, on pose donc $P(n) : \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$

Initialisation : pour $n = 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} = \sum_{k=1}^{2-1} k p^{k-1} = 1 \times p^{1-1} = p \text{ et}$$

$$\frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} = \frac{(2-1)p^2 - 2p^{2-1} + 1}{(1-p)^2} = \frac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} = \frac{(1-p)^2}{(1-p)^2} = 1$$

Hérédité : soit $n \geq 2$, tel que $P(n)$ soit vraie

$$\sum_{k=1}^n k p^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} + n p^{n-1} \text{ donc d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$\sum_{k=1}^n k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n p^{n-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1 + (1-2p+p^2)n p^{n-1}}{(1-p)^2}$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n k p^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1 + n p^{n-1} - 2n p^n + n p^{n+1}}{(1-p)^2} = \frac{n p^{n+1} - (n+1)p^n + 1}{(1-p)^2}$$

donc $P(n+1)$ est vérifiée et donc par théorème de récurrence, $\forall n \geq 2, P(n)$ est vraie.

Nota bene : une autre possibilité est de dériver les deux expressions de la fonction

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ définie sur }]-1, 1[$$

- b. En déduire que, pour $n \geq 2, E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$ 1,5 points

$$\text{Par définition, et comme } X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, E(X_n) = \sum_{k=0}^n k P(X_n = k) = \sum_{k=1}^n k P(X_n = k)$$

or d'après **3.b.** $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(X_n = k) = p^k(1-p)$ et $P(X_n = n) = p^n$

$$\text{donc } E(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} k p^k(1-p) + n p^n = p(1-p) \sum_{k=1}^{n-1} k p^{k-1} + n p^n$$

$$\text{donc d'après 5.a. } E(X_n) = p(1-p) \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n p^n$$

$$\text{donc } E(X_n) = p \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1}{1-p} + p \frac{(1-p)n p^{n-1}}{1-p}$$

$$\text{donc } E(X_n) = p \frac{(n-1)p^n - n p^{n-1} + 1 + n p^{n-1} - n p^n}{1-p} = p \frac{1-p^n}{1-p}$$

La fin est en option : un peu plus technique mais pour aller au bout du problème.

6. a. Montrer, en utilisant la question **3.a.**, que : $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$

Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de transfert, comme $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, 2 points

$$E(X_{n+1}^2) = \sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X_{n+1} = k)$$

or $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(X_{n+1} = k) = p P(X_n = k-1)$

$$\text{donc } E(X_{n+1}^2) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 p P(X_n = k-1) = \sum_{i=0}^n (i+1)^2 p P(X_n = i) \text{ (changement d'indice } i = k-1)$$

$$\text{donc } E(X_{n+1}^2) = p \sum_{i=0}^n (i^2 + 2i + 1) P(X_n = i)$$

et en distribuant $E(X_{n+1}^2) = p \left(\sum_{i=0}^n i^2 P(X_n = i) + \sum_{i=0}^n 2i P(X_n = i) + \sum_{i=0}^n P(X_n = i) \right)$
 or $\sum_{i=0}^n i^2 P(X_n = i) = E(X_n^2)$, $\sum_{i=0}^n 2i P(X_n = i) = 2 \sum_{i=0}^n i P(X_n = i) = 2E(X_n)$ et
 $\sum_{i=0}^n P(X_n = i) = 1$ donc $E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$

- b. Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n - 1) \frac{p^{n+1}}{1 - p}$ 2 points

Montrer que $u_{n+1} = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, par définition de u_n , $u_{n+1} = E(X_{n+1}^2) + (2n + 1) \frac{p^{n+2}}{1 - p}$

donc d'après la question précédente,

$$u_{n+1} = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1) + (2n + 1) \frac{p^{n+2}}{1 - p}$$

$$\text{or } E(X_n) = p \frac{1 - p^n}{1 - p}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } u_{n+1} &= pE(X_n^2) + 2p \times p \frac{1 - p^n}{1 - p} + p + (2n + 1) \frac{p^{n+2}}{1 - p} \\ &= pE(X_n^2) + \frac{2p^2 - 2p^{n+2} + p - p^2 + (2n + 1)p^{n+2}}{1 - p} \\ &= pE(X_n^2) + \frac{p^2 + p + (2n - 1)p^{n+2}}{1 - p} = pE(X_n^2) + \frac{(2n - 1)p^{n+2}}{1 - p} + \frac{p^2 + p}{1 - p} \\ \text{donc } u_{n+1} &= p \left(E(X_n^2) + \frac{(2n - 1)p^{n+1}}{1 - p} \right) + \frac{p(1 + p)}{1 - p} = p u_n + \frac{p(1 + p)}{1 - p} \end{aligned}$$

- c. En déduire l'expression de u_n , puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n 3 points

Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique puisqu'on peut l'écrire $u_{n+1} = a u_n + b$, on cherche donc le point fixe qui vérifie

$$\alpha = p\alpha + \frac{p(1+p)}{1-p} \text{ i.e. } (1-p)\alpha = \frac{p(1+p)}{1-p} \text{ d'où } \alpha = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \alpha$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = p u_n + \frac{p(1+p)}{1-p} - \alpha$ or $v_n = u_n - \alpha$

$$\text{donc } v_{n+1} = p(v_n + \alpha) + \frac{p(1+p)}{1-p} - \alpha = p v_n + p\alpha + \frac{p(1+p)}{1-p} - \alpha = (p - 1)\alpha + \frac{p(1+p)}{1-p}$$

$$\text{or } (p - 1)\alpha + \frac{p(1+p)}{1-p} = -(1-p) \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{1-p} = -\frac{p(1+p)}{1-p} + \frac{p(1+p)}{1-p}$$

d'où $v_{n+1} = p v_n$ i.e. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison p

donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 p^n$ et $v_0 = u_0 - \alpha$

$$\text{calcul de } u_0 : \text{ par définition } u_0 = E(X_0^2) + (2 \times 0 - 1) \frac{p^{0+1}}{1 - p} = E(X_0^2) - \frac{p}{1 - p}$$

$$\text{or } X_0 = 0 \text{ à coup sûr donc } E(X_0^2) = 0 \text{ et donc } u_0 = -\frac{p}{1 - p}$$

$$\text{et } v_0 = -\frac{p}{1 - p} - \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = -\frac{p(1-p) + p(1+p)}{(1-p)^2} = -\frac{2p}{(1-p)^2}$$

$$\text{et donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\frac{2p^{n+1}}{(1-p)^2}$$

$$\text{et donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + \alpha = -\frac{2p^{n+1}}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{p(1+p) - 2p^{n+1}}{(1-p)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\text{on en déduit } E(X_n^2) = u_n - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} = \frac{p(1+p) - 2p^{n+1}}{(1-p)^2} - (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&E(X_n^2) = \frac{p}{1-p} \left[\frac{1+p-2p^n}{1-p} - (2n-1)p^n \right] = \frac{p}{1-p} \left[\frac{1+p-2p^n}{1-p} - \frac{(2n-1)p^n(1-p)}{1-p} \right] \\
&\text{donc } E(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2} (1+p-2p^n - (2n-1)p^n + (2n-1)p^{n+1}) \\
&\text{donc } E(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2} (1+p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1})
\end{aligned}$$

d. Montrer enfin que : $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$ *2 points*

D'après la formule de K nig-Huygens, $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$
donc d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
V(X_n) &= \frac{p}{(1-p)^2} (1+p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1}) - \frac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2} \\
\text{donc } V(X_n) &= \frac{p}{(1-p)^2} (1+p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p(1-2p^n+p^{2n})) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} (1+p - (2n+1)p^n + (2n-1)p^{n+1} - p + 2p^{n+1} - p^{2n+1}) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n + (2n+1)p^{n+1} - p^{2n+1}) \\
\text{donc } V(X_n) &= \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})
\end{aligned}$$