

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.

Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, sans pour autant les panacher.

Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - échauffement

Soit $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$, et $u_3 = (2, 5, 3)$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre

Exercice 2

On pose, pour $x \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $f_\lambda(x) = \lambda x + \ln(1+x)$

1. Justifier que f_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'_\lambda(x)$ pour $x \geq 0$
2. Déterminer les variations de f_λ sur $\mathbb{R}_+$ en séparant les cas $\lambda < 0$ et $\lambda \geq 0$

Dans la suite de l'exercice, on suppose $\lambda = 1$

3. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f_1(x) = k$ admet une unique solution notée u_k , et justifier qu'il en est de même pour l'équation $f_1(x) = \frac{1}{k}$, de solution notée v_k
4. Comportement de la suite u
 - a. Déterminer la limite de u_k quand k tend vers $+\infty$
 - b. Justifier que $\ln(1+u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(u_k)$ et en déduire que : $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k$
 - c. Montrer que $\ln(u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(k)$
 - d. Vérifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ $u_k - k = -\ln(u_k) - \ln\left(1 + \frac{1}{u_k}\right)$ et en déduire que :

$$u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln(k) + o(\ln(k))$$

5. Comportement de la suite v

- a. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0$
- b.
 - i. Rappeler le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0
 - ii. Montrer que : $v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$
 - iii. Montrer que : $v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2k} + \frac{1}{16k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Problème 1

Partie A : résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad \forall t \in]-2, +\infty[, \quad y'(t) + y(t) = -\frac{e^{-t}}{(t+2)^2}.$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E)
2. On pose, pour $t \in]-2, +\infty[, \phi(t) = g(t)e^{-t}$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$
 - a. Montrer que ϕ est solution de (E) si, et seulement si : $\forall t \in]-2, +\infty[, \quad g'(t) = -\frac{1}{(t+2)^2}$
 - b. Déterminer une fonction g pour que ϕ soit une solution particulière de (E)
 - c. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E)
 - d. Montrer que toutes les solutions de (E) ont même limite en $+\infty$

Partie B : étude de fonctions

On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+, f(x) = \frac{e^{-x}}{x+2}$

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$
4. Justifier que f est convexe.
5. Déterminer les variations de f' , et en déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$
6. Déterminer les variations de f
7. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$
En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution, notée α et que $0 < \alpha < 1$
8. Avec Python, définir puis représenter graphiquement la fonction f ainsi que la droite $y = x$ sur un intervalle de votre choix (on justifiera le choix).
9. Recopier et compléter le programme Python suivant permettant de calculer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par la méthode de dichotomie :

```
a=...
b=...
while ... :
    m=...
    if ...:
        ...
    else:
        ...
return ...
```

Partie C : étude d'une somme

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^* : S_n = -\sum_{k=1}^n f'(k)$

9. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, fixé.
 - a. Montrer que : $\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq (x-k)f'(k) + f(k)$
 - b. En déduire que : $-f'(k) \leq f(k-1) - f(k)$
 - c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq f(0)$
 - d. Déduire des questions précédentes que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Partie D : étude d'une suite récurrente

On pose $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$, où α est le réel défini dans la question **A-7**

12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$

En utilisant la question précédente, déterminer une valeur n_p à partir de laquelle $|u_n - \alpha| \leq 10^{-p}$ près.

Ecrire alors une fonction Python d'en-tête **def ValeurApprochee(p)** : renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-p} près.

13. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

a. Justifier que $u_2 \geq u_0$ puis montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

b. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \alpha \leq w_n$

d. Une dernière façon d'approcher α

La question précédente indique que α est toujours compris entre deux termes consécutifs de la suite u

Compléter le script Python suivant permettant de renvoyer une valeur approchée de α à 10^{-p} près :

```
def ValeurApprochee2(p):  
    u1=0  
    u2=...  
    while ...  
        u1=u2  
        u2=...  
    return ...
```

Problème 2

Partie 1 : puissances d'une matrice

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer PQ puis en déduire P^{-1}

b. Déterminer la matrice D où $D = P^{-1}MP$

c. Montrer que $M = PDP^{-1}$

d. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j , on a $M^j = PD^jP^{-1}$

e. Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j

Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :

Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

Soit X_k a pris la valeur j , différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1
2. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie, en créant une fonction qui prend en entrée un entier k et qui renvoie la valeur de la variable X_k

```
def SimulX(k):  
    X=rd.randint(1,4)  
    for i in range(2,k+1):  
        tirage=rd.randint(1,4)  
        if X==1 :  
            X= ...  
        else :  
            if tirage != X :  
                X=...  
    return X
```

3. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$
 - a. Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$
 - b. On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements.

Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que

$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3)$$

Trouver des relations analogues pour $P(X_{k+1} = 2)$ et $P(X_{k+1} = 3)$

- c. Déterminer la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$

- d. Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$

4.
 - a. Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$
 - b. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k , puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right)$$

- c. Déterminer les limites quand k tend vers $+\infty$ de $P(X_k = 1), P(X_k = 2), P(X_k = 3)$ et interpréter le résultat.
5.
 - a. Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$
 - b. Avec Python, écrire une fonction, notée **esp**, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de **esp(k)**