

Corrigé

Total sur 75 points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - échauffement

2 points

Soit $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$, et $u_3 = (2, 5, 3)$

Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$

alors $\lambda_1(1, 3, 2) + \lambda_2(1, -1, 4) + \lambda_3(2, 5, 3) = (0, 0, 0)$ donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{matrix}$$

finalement, par substitution, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc (u_1, u_2, u_3) est une famille libre

Exercice 2

18 points

On pose, pour $x \geq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $f_\lambda(x) = \lambda x + \ln(1+x)$

1. Justifier que f_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $f'_\lambda(x)$ pour $x \geq 0$

1 point

$x \mapsto \lambda x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ (par composition) sont de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+$

donc f_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0, f'_\lambda(x) = \lambda + \frac{1}{1+x}$ (la dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{u'}{u}$)

2. Déterminer les variations de f_λ sur $\mathbb{R}_+$ en séparant les cas $\lambda < 0$ et $\lambda \geq 0$

3 points

1^{er} cas : $\lambda \geq 0$

$\forall x \geq 0, f_\lambda(x) > 0$ (car c'est alors une somme de termes positifs) : f_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2^{ème} cas : pour $\lambda < 0$

$f'_\lambda(x) > 0 \Leftrightarrow -\lambda > \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} < 1+x$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$ (attention

dans ce cas $\lambda < 0 \Rightarrow -\lambda > 0$ et $x \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x} > 0$) d'où $f'_\lambda(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$

on va donc à nouveau dissocier en deux sous-cas

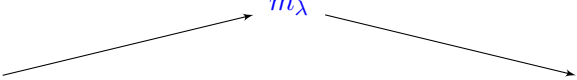
- 1^{er} sous-cas : $\lambda \leq -1$

alors $\frac{1}{\lambda} \geq -1$ (par décroissance de la fonction inverse sur $] -\infty, 0[$) et donc $\frac{1}{\lambda} + 1 \geq 0$ et $-\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) \leq 0$

et donc $\forall x > 0, f'_\lambda(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (même si jamais $f'_\lambda(0) = 0$)

- 2^{ème} sous-cas : $-1 < \lambda < 0$ alors comme vu dans le sous-cas précédent, $-\left(\frac{1}{\lambda} + 1\right) \geq 0$

donc d'après l'équivalence présentée en introduction du deuxième cas, on peut résumer les variations avec le tableau :

x	0	$-\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)$	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	+	0	-
f_λ			

Dans la suite de l'exercice, on suppose $\lambda = 1$

3. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f_1(x) = k$ admet une unique solution notée u_k , et justifier qu'il en est de même pour l'équation $f_1(x) = \frac{1}{k}$, de solution notée v_k 1 point

D'après 2. (cas $\lambda \geq 0$), f_1 est **strictement croissante et continue** sur $\mathbb{R}_+$, donc, d'après le **théorème de la bijection**, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $f_1(\mathbb{R}_+) = [0, +\infty[$ (par addition de limites pour la limite en $+\infty$)

Comme $k > 0, k \in [0, +\infty[$, donc l'équation $f_1(x) = k$ admet donc une unique solution notée u_k

De même $\frac{1}{k} \in [0, +\infty[$ donc $f_1(x) = 1/k$ admet une unique solution notée v_k

4. Comportement de la suite u

- a. Déterminer la limite de u_k quand k tend vers $+\infty$ 1,5 points

Option A : par propriété, f_1 étant bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante sa réciproque f_1^{-1} est également bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante, dont on déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1^{-1}(x) = +\infty$

puis comme $u_k = f_1^{-1}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, par composition $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_1^{-1}(k) = +\infty$ soit $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = +\infty$

Option B : on peut essayer d'utiliser l'équation qui définit u_k

par définition, $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_1(u_k) = k$ i.e. $u_k + \ln(1 + u_k) = k$

or (inégalité de convexité), $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$

d'où (u_k étant positif), $\ln(1 + u_k) \leq u_k$ et donc $u_k + \ln(1 + u_k) \leq 2u_k$ i.e. $k \leq 2u_k$

donc par théorème des gendarmes (version infinie),

$\lim_{k \rightarrow +\infty} 2u_k = +\infty$ puis par opération $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}(2u_k) = +\infty$

Option C : on montre d'abord que la suite est croissante (à faire), puis par l'absurde si elle était majorée elle serait convergente d'après le théorème de la limite monotone et en passant à la limite dans l'égalité $u_k + \ln(1 + u_k) = k$ on obtient une contradiction (« $\ell + \ln(\ell) = +\infty$ »), donc la suite n'est pas majorée et donc elle diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

- b. Justifier que $\ln(1 + u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(u_k)$ et en déduire que : $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k$ 2 points

L'idée est que $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ puis on « compose » en injectant u_k

comme nous l'avons déjà vu (D.L. n°1), pour $x > 0, \ln(1 + x) = \ln \left[x \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \ln(x) + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

donc $\frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{x}$ or par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ d'après les limites usuelles

donc par continuité de $\ln$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$ et par opérations, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 0$

alors puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = +\infty$ par composition $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + u_k)}{u_k} = 0$

i.e. $\boxed{\ln(1+u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(1+u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(u_k)}$ enfin, puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k + \ln(1+u_k) = k$

on en déduit : $k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} u_k + o(u_k)$ soit $k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} u_k$, ou $\boxed{u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k}$

c. Montrer que $\ln(u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(k)$

2 points

Par définition de $u_k, \forall k \in \mathbb{N}^*, u_k + \ln(1+u_k) = k$ et donc $\ln(u_k + \ln(1+u_k)) = \ln(k)$

et donc pour $k > 1$, $\frac{\ln(u_k + \ln(1+u_k))}{\ln(k)} = 1$

or $\frac{\ln(u_k + \ln(1+u_k))}{\ln(k)} = \frac{\ln \left[u_k \left(1 + \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} \right) \right]}{\ln(k)} = \frac{\ln(u_k)}{\ln(k)} + \frac{\ln \left(1 + \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} \right)}{\ln(k)}$

or comme montré plus haut $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} = 0$ donc par continuité de $\ln$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} \right) = \ln(1) + 0$ et par ailleurs $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln(k) = +\infty$

donc par quotient $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{\ln(1+u_k)}{u_k} \right)}{\ln(k)} = 0$

donc par soustraction $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_k)}{\ln(k)} = 1 - 0 = 1$ d'où $\boxed{\ln(u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(k)}$

d. Vérifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$ $u_k - k = -\ln(u_k) - \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right)$ et en déduire que :

2,5 points

$$u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln(k) + o(\ln(k))$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, par propriété du logarithme,

$$-\ln(u_k) - \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right) = - \left(\ln(u_k + \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right)) \right) = -\ln \left[u_k \left(1 + \frac{1}{u_k} \right) \right] = -\ln(u_k + 1)$$

or par définition de $u_k, u_k + \ln(1+u_k) = k$ donc $-\ln(u_k + 1) = u_k - k$

et donc on trouve bien $\boxed{-\ln(u_k) - \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right) = u_k - k}$

puis $u_k - k + \ln(k) = \ln(k) - \ln(u_k) - \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right) = \ln \left(\frac{k}{u_k} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right)$

or d'une part $u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$, alors par opérations puis continuité de $\ln, \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ln(1) = 0$

et puisque $k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} u_k, \frac{k}{u_k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ d'où par continuité de $\ln, \ln \left(\frac{k}{u_k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ln(1) = 0$

on en déduit par addition et quotient de limites ($\ln(k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$) que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{k}{u_k} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right)}{\ln(k)} = 0 \text{ i.e. } \ln \left(\frac{k}{u_k} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{u_k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(k))$$

d'où $u_k - k + \ln(k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(k))$ soit $\boxed{u_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} k - \ln(k) + o(\ln(k))}$

5. Comportement de la suite v

a. Montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0$

1 point

Par définition, $\forall k \in \mathbb{N}^*, f_1(v_k) = \frac{1}{k}$ et donc en composant par $f_1^{-1}, v_k = f_1^{-1} \left(\frac{1}{k} \right)$

or puisque f_1 est continue, f_1^{-1} l'est aussi et en particulier f_1^{-1} est continue en 0

et comme $\frac{1}{k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ alors, $v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\rightarrow} f_1^{-1}(0)$

or $f_1(0) = 0$ donc $f_1^{-1}(0) = 0$ et donc $v_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

- b. i. Rappeler le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0

D'après le cours, pour x au voisinage de 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

0,5 point

- ii. Montrer que : $v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$

1,5 points

D'après le développement de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 et puisque $v_k \rightarrow 0$ on en déduit que $\ln(1+v_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} v_k + o(v_k)$

et comme $v_k + \ln(1+v_k) = \frac{1}{k}$ on obtient : $2v_k + o(v_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k}$

et donc (on utilise $u = v + o(v) \Leftrightarrow u \sim v$) $2v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k}$ soit $v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$

- iii. Montrer que : $v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2k} + \frac{1}{16k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$

2 points

On reprend la même démarche, avec le développement limité à l'ordre 2 :

$\ln(1+v_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} v_k - \frac{v_k^2}{2} + o(v_k^2)$ et à nouveau avec la relation $v_k + \ln(1+v_k) = \frac{1}{k}$

on trouve $v_k - \frac{1}{2k} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{v_k^2}{4} + o(v_k^2)$

et donc $v_k - \frac{1}{2k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{v_k^2}{4}$ et d'après la question précédente (et facteur $\frac{1}{2}$) : $\frac{v_k}{2} \sim \frac{1}{4k}$

donc par puissance entière d'équivalents (carré ici) $\frac{v_k^2}{4} \sim \frac{1}{16k^2}$

ce qui revient à écrire $v_k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2k} + \frac{1}{16k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$

Problème 1

38 points

Partie A : résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle : (E) : $\forall t \in]-2, +\infty[, \quad y'(t) + y(t) = -\frac{e^{-t}}{(t+2)^2}$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E)

0,5 point

D'après le cours, $y' + y = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in]-2, +\infty[, \quad y(t) = \lambda e^{-t}$

ce que l'on peut aussi écrire $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{-t} \text{ pour } t \in]-2, +\infty[, \lambda \in \mathbb{R}\}$

2. On pose, pour $t \in]-2, +\infty[, \phi(t) = g(t)e^{-t}$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$

- a. Montrer que ϕ est solution de (E) si, et seulement si : $\forall t \in]-2, +\infty[, \quad g'(t) = -\frac{1}{(t+2)^2}$

1 point

$$\forall t > -2, \quad \phi'(t) = g'(t)e^{-t} - g(t)e^{-t} = g'(t)e^{-t} - \phi(t)$$

$$\text{donc } \phi \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow \forall t > -2, \phi'(t) + \phi(t) = g'(t)e^{-t} = -\frac{e^{-t}}{(t+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall t > -2, \quad g'(t) = -\frac{1}{(t+2)^2}$$

- b. Déterminer une fonction g pour que ϕ soit une solution particulière de (E)

1 point

En choisissant : $g(t) = \frac{1}{t+2}$ pour $t > -2$ on obtient alors $\forall t > -2, g'(t) = -\frac{1}{(2+t)^2}$

et donc d'après la question précédente, ϕ définie plus haut est alors solution de (E)

- c. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E)

1 point

Par principe de superposition, les solutions de (E) peuvent être obtenues en additionnant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène, donc on déduit des question précédentes que :

y est solution de (E) ssi : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in]-2, +\infty[, \quad y(t) = \left(\lambda + \frac{1}{t+2} \right) e^{-t}$

- d. Montrer que toutes les solutions de (E) ont même limite en $+\infty$

1 point

D'après les limites usuelles, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t+2} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$

donc par opérations, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\lambda + \frac{1}{t+2} \right) e^{-t} = (\lambda + 0) \times 0 = 0$

i.e. toutes les solutions ont pour limite 0 en $+\infty$

Partie B : étude de fonctions

On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x+2}$

3. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$

2 point

f est quotient de deux fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^2$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.

On peut remarquer que f est une solution de l'équation différentielle de la partie A, en particulier $f'(x) =$

$-f(x) - \frac{e^{-x}}{(x+2)^2}$ et donc en notant $h(x) = \frac{e^{-x}}{(x+2)^2}$ on trouve,

$f''(x) = -f'(x) - h'(x) = -(-f(x) - h(x)) - h'(x) = f(x) + h(x) - h'(x)$ ce qui simplifie un peu les calculs

Pour $x \geq 0$, $h'(x) = \frac{-e^{-x}(x+2)^2 - e^{-x} \times 2 \times (x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{e^{-x}}{(x+2)^2} - 2\frac{e^{-x}}{(x+2)^3}$

finalement $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+2} - \frac{e^{-x}}{(x+2)^2}$ et $f''(x) = \frac{e^{-x}}{x+2} + \frac{2e^{-x}}{(x+2)^2} + \frac{2e^{-x}}{(x+2)^3}$

4. Justifier que f est convexe.

0,5 point

$\forall x \geq 0, f''(x) \geq 0$ (et même > 0) car f est composée de produits, quotients et somme de termes positifs

donc f est convexe.

5. Déterminer les variations de f' , et en déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

1,5 points

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) \geq 0$ f' est donc croissante (et même strictement)

de plus $f'(0) = -\frac{3}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\frac{0}{0+2} - \frac{0}{(0+2)^2} = 0$ par opérations (pas de forme indéterminée ici).

On a donc le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f'	$-\frac{3}{4}$	0

de fait $\forall x \in \mathbb{R}_+, -\frac{3}{4} \leq f'(x) \leq 0$ donc $\frac{3}{4} \geq -f'(x) \geq 0$ et on en déduit bien $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

Remarque : à la place de la limite en $+\infty$ on peut remarquer que f' est négative (addition de termes négatifs).

6. Déterminer les variations de f

0,25 point

D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) < 0$ donc f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

7. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution, notée α et que $0 < \alpha < 1$

2,75 points

Pour $x \geq 0$, on pose $g(x) = f(x) - x$ alors $\forall x \geq 0, g'(x) = f'(x) - 1$

or d'après 5. $\forall x \geq 0, f'(x) \leq 0$ donc $f'(x) - 1 < 0$

Nota bene : si on n'avait pas ce résultat intermédiaire, on pouvait raisonner avec le résultat donné à la question

5., $|f'(x)| \leq \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4} \Rightarrow f'(x) - 1 < 0$

donc g est strictement décroissante et continue par addition (et car f l'est),

de plus $g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{0}{0+2} = 0$ par opérations (comme plus haut, pas de forme indéterminée ici) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty$

donc, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $] \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0)] =] -\infty, \frac{1}{2} [$

comme $0 \in] -\infty, \frac{1}{2} [$, l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$, notée α

enfin $g(1) = f(1) - 1 = \frac{e-1}{2+1} - 1 = \frac{1}{3e} - 1 < 0$ car $3e > 1$ et comme $g(0) > 0$ et que g est toujours continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $[0; 1]$ et même $]0; 1[$ car $g(0) \neq 0$ et $g(1) \neq 0$

or α est l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $0 < \alpha < 1$

8. Recopier et compléter le programme Python suivant permettant de calculer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par la méthode de dichotomie : 1,5 points

Du grand classique, on veille à adapter à la situation (ici g décroissante). On peut également bien sûr faire le programme avec g .

```
def f(x):
    return ...
a=...
b=...
while ... :
    m=...
    if ...:
        ...
    else:
        ...
return ...
```

```
def f(x):
    return np.exp(-x)/(x+2)
a=0
b=1
while b-a>10**(-2) :
    m=(a+b)/2
    if f(m)>m: # g(m)>0
        a=m
    else:
        b=m
return (a+b)/2
```

Partie C : étude d'une somme

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = - \sum_{k=1}^n f'(k)$

9. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

1 point

$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{n+1} = - \sum_{k=1}^{n+1} f'(k) = - \sum_{k=1}^n f'(k) - f'(n+1) = S_n - f'(n+1)$ par relation de Chasles

donc $S_{n+1} - S_n = -f'(n+1) > 0$ (d'après 5.) donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est (strictement) croissante.

10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, fixé.

- a. Montrer que : $\forall x \geq 0, \quad f(x) \geq (x-k)f'(k) + f(k)$ 1 point

$y = (x-k)f'(k) + f(k)$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse k et comme f est convexe sur $\mathbb{R}_+$, sa courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes :

donc en particulier $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) \geq (x-k)f'(k) + f(k)$

Remarque : il est aussi possible d'étudier les variations de $x \mapsto f(x) - (x-k)f'(k)$ pour k fixé (on trouvera un minimum en k valant $f(k)$).

- b. En déduire que : $-f'(k) \leq f(k-1) - f(k)$ 0,5 point

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, en prenant $x = k-1$ (on a bien $x \geq 0$ car $k \geq 1$) dans la relation précédente,

on trouve $f(k-1) \geq (k-1-k)f'(k) + f(k)$ soit $-f'(k) \leq f(k-1) - f(k)$

- c. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n \leq f(0)$ 1,5 points

Il suffit d'additionner les inégalités pour k entre 1 et n : $\sum_{k=1}^n -f'(k) \leq \sum_{k=1}^n [f(k-1) - f(k)]$

alors d'une part on trouve $\sum_{k=1}^n -f'(k) = -\sum_{k=1}^n f'(k) = S_n$

et d'autre part, par télescopage, $\sum_{k=1}^n [f(k-1) - f(k)] = f(0) - f(n)$

d'où finalement $S_n \leq f(0) - f(n)$ et a fortiori $S_n \leq f(0)$ car $f(n) \geq 0$

- d. Déduire des questions précédentes que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. 0,5 point

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante (d'après 9.) et majorée d'après la question précédente donc, d'après le théorème de la limite monotone $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Partie D : étude d'une suite récurrente

On pose $u_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

11. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$, où α est le réel défini dans la question A-7 2,5 points

On remarque d'abord que $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, ce qui permet de définir u et de justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$

C'est une question classique d'utilisation de l'inégalité des accroissements finis, que l'on intègre ici dans la

réurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $P(n)$: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \Leftrightarrow |\alpha| \leq 1 \Leftrightarrow \alpha \leq 1$ ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie (on a utilisé $u_0 = 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$)

hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que $P(n)$ est vraie, alors par hypothèse $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ou $u_n \in \mathbb{R}_+$ (cf. remarque préalable), $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad |f'(x)| \leq \frac{3}{4}$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha|$

soit, puisque par leurs définitions $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4}|u_n - \alpha| \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente, déterminer une valeur n_p à partir de laquelle $|u_n - \alpha| \leq 10^{-p}$ près.

Ecrire alors une fonction Python d'en-tête `def ValeurApprochee(p):` renvoyant une valeur approchée de α à 10^{-p} près. 1 point

dès que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-p}$ alors u_p est une valeur approchée de α à 10^{-p} près ,

soit dès que : $n \ln\left(\frac{3}{4}\right) \leq -p \ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{p \ln(10)}{\ln(4) - \ln(3)}$ (attention au signe ! $\ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0$)

donc on peut choisir $n_p = \left\lfloor \frac{p \ln(10)}{\ln(4) - \ln(3)} \right\rfloor + 1$

Pour la fonction Python, on utilise le résultat précédent, il suffit simplement de calculer les termes de la suite de manière itérative jusqu'au rang trouvé :

```
def ValeurApprochee(p):
    u=0
    np=np.floor(p*np.log(10)/(np.log(4)-np.log(3)))+1
    for _ in range(np):
        u=np.exp(-u)/(u+2)
    return u
```

13. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$

- a. Justifier que $u_2 \geq u_0$ puis montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. 2 points

Comme évoqué plus haut, $u_2 \geq 0$, or $u_0 = 0$ donc $u_2 \geq u_0$

Il s'agit ensuite de reprendre l'idée de la preuve de la monotonie d'une suite récurrente dans le cas d'une fonction croissante, mais en appliquant deux fois la fonction f qui est décroissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit donc $Q(n) : v_{n+1} \geq v_n$

Initialisation : $v_1 = u_2$ et $v_0 = u_0$, donc on trouve bien $v_1 \geq v_0$ i.e. $Q(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose $P(n)$ vraie, donc par hypothèse $v_{n+1} \geq v_n$ soit $u_{2n+2} \geq u_{2n}$ en composant deux fois par f , qui est décroissante, on trouve $f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n})$ soit $u_{2n+3} \leq u_{2n+1}$ puis $f(u_{2n+3}) \geq f(u_{2n+1})$ soit $u_{2n+4} \leq u_{2n+2}$ autrement dit $v_{n+2} \geq v_{n+1}$, donc $Q(n+1)$ est vraie d'où l'hérédité.

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie, i.e. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

- b. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante. 1 point

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ donc, en composant par f qui est décroissante : $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$ ce qui donne $w_n \geq w_{n+1}$: la suite w est bien décroissante.

- c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \alpha \leq w_n$ 2 points

A nouveau par récurrence en commençant par un coté de l'inégalité, pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $R(n) : v_n \leq \alpha$

Initialisation : $v_0 = u_0 = 0 \leq \alpha$ donc $R(0)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $R(n)$ vraie

alors par hypothèse $v_n \leq \alpha$ donc en composant par f (toujours décroissante), $f(v_n) \geq f(\alpha)$

autrement dit $f(u_{2n}) \geq f(\alpha)$ soit $u_{2n+1} \geq \alpha$ car $f(\alpha) = \alpha$

Nota bene : on peut aussi écrire cette inégalité $w_n \geq \alpha$ car $w_n = u_{2n+1} (= f(v_n))$

puis en composant à nouveau par f (décroissante) : $f(u_{2n+1}) \leq f(\alpha)$ soit $u_{2n+2} \leq \alpha$ ou encore $v_{n+1} \leq \alpha$ donc $R(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, R(n)$ est vraie, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq \alpha$

enfin, dans l'hérédité, on a montré au passage que $v_n \leq \alpha \Rightarrow \alpha \leq w_n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \leq w_n$

- d. Une dernière façon d'approcher α .

La question précédente indique que α est toujours compris entre deux termes consécutifs de la suite u

Compléter le script Python suivant permettant de renvoyer une valeur approchée de α à 10^{-p} près : 1,5 points

```
def ValeurApprochee2(p):
    u1=0
    u2=...
    while ...
        u1=u2
        u2=...
    return ...
```

```
def ValeurApprochee2(p):
    u1=0
    u2=np.exp(-u1)/(u1+2)
    while abs(u2-u1)>10**(-p):
        u1=u2
        u2=np.exp(-u1)/(u1+2)
    return (u1+u2)/2
```

L'idée est simplement de calculer des termes de la suite, tant que l'écart entre v_n et w_n est trop important.

Problème 2

23 points

Partie 1 : puissances d'une matrice

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- a. Calculer PQ puis en déduire P^{-1}

1 point

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 2-2 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1+2 & 1+1-2 \\ 1-1 & 1+1-2 & 1+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$$

donc $P \frac{1}{4} Q = I$ donc P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4} Q$

- b. Déterminer la matrice D où $D = P^{-1}MP$

1,5 points

D'après la question précédente :

$$P^{-1}M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1+1 & 2 & 2 \\ 1+1 & -2 & -2 \\ 2-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc par définition :

$$D = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2+1+1 & -2+1+1 & 1-1 \\ 2-1-1 & -2-1-1 & -1+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- c. Montrer que $M = PDP^{-1}$

1 point

On déduit de la question précédente que $PD = PP^{-1}MP = IMP = MP$
et donc $PDP^{-1} = MPP^{-1} = MI = M$

- d. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j , on a $M^j = PD^jP^{-1}$

1,5 points

Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $P(j) : M^j = PD^jP^{-1}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow M^0 = PD^0P^{-1} \Leftrightarrow I = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$
donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : soit $j \in \mathbb{N}$, supposons $P(j)$ vraie

donc par hypothèse $M^j = PD^jP^{-1}$

donc $M^{j+1} = M^j \times M = PD^jP^{-1}PDP^{-1} = PD^jIDP^{-1} = PD^jDP^{-1} = PD^{j+1}P^{-1}$ donc $P(j+1)$ est vraie

donc par théorème de récurrence, $\forall j \in \mathbb{N}, P(j)$ est vraie, i.e. $M^j = PD^jP^{-1}$

- e. Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j . Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$ 2 points

On aura la première colonne de M^j en faisant le produit par la droite par les premières colonnes :
tout d'abord par propriété sur les puissances diagonales,

$$D^j = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } M^j = PD^jP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{2}{3}\right)^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ -1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } M^j = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^j & \dots & \dots \\ -\left(-\frac{2}{3}\right)^j & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(-\frac{2}{3}\right)^j & \dots & \dots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \dots & \dots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(-\frac{2}{3}\right)^j & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

et pour $j = 0$ la première colonne est $\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$ ce qui est bien celle de $M^0 = I$

Partie 2 : étude d'une suite de variables aléatoires

Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.

On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante :

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :

Soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.

Soit X_k a pris la valeur j , différente de 1, dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

1. Reconnaître la loi de X_1 0,5 point

X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue lors du premier tirage, i.e. 1, 2 ou 3

Les numéros sont équiprobables donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, 2, 3\})$ (loi uniforme sur $\llbracket 1, 3 \rrbracket$)

2. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie, en créant une fonction qui prend en entrée un entier k et qui renvoie la valeur de la variable X_k 1,5 points

`rd.randint(1,4)` simule le tirage d'une boule parmi les 3 (le 4 est exclu)

`X` contient les valeurs successives des variables $X_1, X_2 \dots X_k$

Si $X_k = 1$ alors X_{k+1} vaut le résultat du tirage, ce qui est traduit par `X=tirage`

Si $X_k = j$ et que le numéro tiré est autre que j alors $X_{k+1} = 1$ alors que X_k reste inchangé sinon (donc on ne change pas `X`)

```
import numpy.random as rd
def SimulX(k):
    X=rd.randint(1,4)
    for i in range(2,k+1):
        tirage=rd.randint(1,4)
        if X==1 :
            X=tirage
        else :
            if tirage != X :
                X=1
    return X
```

3. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $P(X_k = i)$

a. Déterminer les probabilités $P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ 1,5 points

Si $X_k = 1$ alors $X_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1, 2, 3\})$ donc $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 3) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3}$

si $X_k = 2$ alors $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2) = \frac{1}{3}$ (c'est la probabilité de tirer 2)

et $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3}$ (car dans les deux autres cas, i.e. « tirer 1 ou 3 » alors X_{k+1} vaut 1) et enfin $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 3) = 0$

de manière analogue, si $X_k = 3$ alors $P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 3) = \frac{1}{3}$ (c'est la probabilité de tirer 3)

et $P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3}$ et $P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 2) = 0$

b. On admet que $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements.

Montrer, grâce à la formule des probabilités totales, que

$$P(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3)$$

Trouver des relations analogues pour $P(X_{k+1} = 2)$ et $P(X_{k+1} = 3)$

2 points

Comme $\{(X_k = 1), (X_k = 2), (X_k = 3)\}$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1)P(X_k = 3) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3)$$

car d'après la question précédente, $P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 1) = \frac{1}{3}$ et $P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 1) = P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 1) = \frac{2}{3}$

de manière analogue on trouve

$$P(X_{k+1} = 2) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 2)P(X_k = 3) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 2) + 0 \text{ et}$$

$$P(X_{k+1} = 3) = P_{(X_k=1)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 1) + P_{(X_k=2)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 2) + P_{(X_k=3)}(X_{k+1} = 3)P(X_k = 3) = \frac{1}{3}P(X_k = 1) + 0 + \frac{1}{3}P(X_k = 3)$$

- c. Déterminer la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$ 1 point

En posant $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ alors $AU_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \\ P(X_k = 3) \end{pmatrix}$

donc $AU_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{2}{3}P(X_k = 2) + \frac{2}{3}P(X_k = 3) \\ \frac{1}{3}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 2) + 0P(X_k = 3) \\ \frac{1}{3}P(X_k = 1) + 0P(X_k = 2) + \frac{1}{3}P(X_k = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_{k+1} = 1) \\ P(X_{k+1} = 2) \\ P(X_{k+1} = 3) \end{pmatrix}$

d'après la question précédente. On a donc montré $AU_k = U_{k+1}$

- d. Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$ 1,5 points

Par récurrence, évidemment ! Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $Q(k) : U_k = A^k U_0$

Initiation : $Q(0)$ est vraie $\Leftrightarrow U_0 = A^0 U_0 \Leftrightarrow U_0 = IU_0 \Leftrightarrow U_0 = U_0$

ce qui est vrai, donc $Q(0)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $Q(k)$ est vraie

1^{er} cas : si $k = 0$ on ne peut alors pas utiliser la question précédente (qui n'est pas valable pour

$k = 0$) mais il suffit de montrer que $U_1 = AU_0$, or $U_1 = \begin{pmatrix} P(X_1 = 1) \\ P(X_1 = 2) \\ P(X_1 = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ d'après 1. et

$$AU_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

donc $U_1 = AU_0$ d'où l'hérédité dans ce cas.

2^{ème} cas : si $k = 1$

d'après la question précédente (valable pour $k \in \mathbb{N}^*$) $U_{k+1} = AU_k$ et par hypothèse de récurrence, $U_k = A^k U_0$

donc $U_{k+1} = AA^k U_0 = A^{k+1} U_0$ c'est-à-dire que $Q(k+1)$ est vraie, d'où l'hérédité dans ce cas (plus général)

donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $Q(k)$ est vraie, i.e. $U_k = A^k U_0$

4. a. Vérifier que $A = M + \frac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$ 3 points

Par définition $M + \frac{1}{3}I = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A$

la deuxième partie de la question correspond à une formule du binôme de Newton pour les matrices,

comme nous ne la connaissons pas, il faut la démontrer (difficile), ce que nous faisons par récurrence.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit l'assertion $R(k) : A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$

Initiation : $R(0)$ est vraie $\Leftrightarrow A^0 = \sum_{j=0}^0 \binom{0}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{0-j} M^j \Leftrightarrow I = \binom{0}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 M^0 \Leftrightarrow I = I$

ce qui est vrai, donc $R(0)$ est vraie

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $R(k)$ est vraie

alors par hypothèse de récurrence, $A^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j$ or $A^{k+1} = A^k A$ et $A = M + \frac{1}{3}I$

$$\begin{aligned} \text{donc } A^{k+1} &= \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j \right) \left(M + \frac{1}{3}I \right) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j M + \frac{1}{3} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j I \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1} + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j \end{aligned}$$

$$\text{or } \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^{j+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-(i-1)} M^i = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-i} M^i$$

par changement d'indice $i = j + 1 \Leftrightarrow j = i - 1$ ($j = 0 \Rightarrow i = 1$ et $j = k \Rightarrow i = k + 1$)

on va ensuite enlever un terme à chaque somme pour garder une gamme d'indice identique (de 1 à k)

$$\begin{aligned} \text{donc } A^{k+1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^k M + \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-i} M^i + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j \\ &= \sum_{i=1}^k \binom{k}{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-i} M^i + \binom{k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1} + \binom{k}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^0 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j \\ &= \binom{k}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^0 + \sum_{j=1}^k \left[\binom{k}{j-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j \right] + \binom{k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1} \\ &= \binom{k+1}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^0 + \sum_{j=1}^k \left[\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} \right] \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \binom{k+1}{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{car } \binom{k}{k} \binom{k+1}{k+1} &= 1 = \binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} \\ &= \binom{k+1}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^0 + \sum_{j=1}^k \binom{k+1}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j + \binom{k+1}{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)} M^{k+1} \end{aligned}$$

car $\binom{k}{j-1} + \binom{k}{j} = \binom{k+1}{j}$ d'après la formule du triangle de Pascal

or on peut rajouter dans la somme $\binom{k+1}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-0} M^0$ (terme d'indice $j = 0$) et $\binom{k+1}{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-(k+1)}$

(terme d'indice $j = k + 1$), d'où finalement $A^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1-j} M^j$ c'est-à-dire que $R(k+1)$

est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $R(k)$ est vraie.

- b. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k , puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right) \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^k \right) \quad 2,5$$

points

On avait calculé la première colonne des M^j donc la première colonne de A^k est

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\left(\frac{-2}{3}\right)^j & \dots & \dots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{-2}{3}\right)^j & \dots & \dots \\ \left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{-2}{3}\right)^j & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

soit $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j + 2\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{-2}{3}\right)^j & \dots & \dots \\ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{-2}{3}\right)^j & \dots & \dots \\ \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j - \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{-2}{3}\right)^j & \dots & \dots \end{pmatrix}$

or d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^k = 1 \text{ et } \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} \left(\frac{-2}{3}\right)^j = \left(\frac{-1}{3}\right)^k$$

donc la première colonne de A^k est donc $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 + 2\left(\frac{-1}{3}\right)^k \\ 1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^k \\ 1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^k \end{pmatrix}$

et, par définition de U_0 , la colonne $U_k = A^k U_0$ est elle-même la première colonne de A^k donc on retrouve dans cette colonne les trois termes de la loi de X_k

soit $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X_k = 1) = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^k\right)$ et $P(X_k = 2) = P(X_k = 3) = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^k\right)$

- c. Déterminer les limites quand k tend vers $+\infty$ de $P(X_k = 1), P(X_k = 2), P(X_k = 3)$ et interpréter le résultat. 1,5 points

Comme $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ alors $\left(\frac{-1}{3}\right)^k \rightarrow 0$ (forme q^n avec $|q| < 1$) donc $P(X_k = 1) \rightarrow \frac{1}{2}$ et $P(X_k = 2) = P(X_k = 3) \rightarrow \frac{1}{4}$
donc au bout d'un grand nombre de tirage, la variable aléatoire se rapproche d'une variable aléatoire dont la probabilité d'obtenir 1 vaut $\frac{1}{2}$ et la probabilité d'obtenir 2 ou 3 vaut $\frac{1}{4}$

5. a. Calculer l'espérance $E(X_k)$ de X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$ 1,5 points

Les valeurs de X_k sont seulement $\{1, 2, 3\}$

donc $E(X_k) = 1 \times P(X_k = 1) + 2 \times P(X_k = 2) + 3 \times P(X_k = 3)$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^k\right) + (2 + 3) \times \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^k\right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4}\right) \left(\frac{-1}{3}\right)^k = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(\frac{-1}{3}\right)^k$$

- b. Avec Python, écrire une fonction, notée **esp**, qui renvoie $E(X_k)$ à l'appel de **esp(k)** 1 point

Il s'agit simplement d'utiliser le résultat de la question précédente et d'en faire une fonction avec Python.

```
def esp(k):
    return 7/4 - 3/4*(-1/3)**k
```