

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Introduction

On s'intéresse dans ce problème à la détermination de lois de probabilité composées qui interviennent en particulier dans la gestion du risque en assurance et en théorie de la ruine. On étudie le modèle suivant :

- le nombre de sinistres à prendre en charge par une compagnie d'assurances sur une période donnée est une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$;
- les coûts des sinistres successifs sont modélisés par une suite de variables aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. On suppose que les variables U_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées, et sont indépendantes de N ;
- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = \sum_{k=1}^n U_k$ et X_0 est la variable certaine de valeur 0 ;
- la charge sinistrale totale pour la compagnie d'assurance sur une période est donnée par la variable aléatoire X définie par :

$$X = \sum_{k=1}^N U_k$$

et l'on précise que $X = X_0 = 0$ si N prend la valeur 0. **On dit que X suit une loi composée.**

- Pour tout entier naturel j , on pose $p_j = P(N = j)$, $q_j = P(U_1 = j)$ et $r_j = P(X = j)$.

Partie I – Des exemples

Dans cette partie I, on suppose que les variables U_k suivent la loi de Bernoulli de paramètre p , où p est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, quelle est la loi de X_n ?
2. Pour tout entier naturel j , établir : $r_j = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_n = j) p_n$.
3. Dans cette question 3, on suppose que N suit la loi binomiale de paramètres m , entier naturel, et π , réel dans $]0, 1[$. Soit j un entier naturel.
 - a. Justifier que $r_j = 0$ si $j > m$.
 - b. Etablir : si $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $r_j = \sum_{n=j}^m \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{n} \pi^n (1-\pi)^{m-n}$.
 - c. Vérifier : pour tous entiers j, n, m tels que $0 \leq j \leq n \leq m$, $\binom{n}{j} \binom{m}{n} = \binom{m}{j} \binom{m-j}{n-j}$.
 - d. En déduire, pour tout $j \in \llbracket 0, m \rrbracket$: $r_j = \binom{m}{j} (p\pi)^j \sum_{\ell=0}^{m-j} \binom{m-j}{\ell} [(1-p)\pi]^\ell (1-\pi)^{m-j-\ell}$.
 - e. Montrer finalement que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres en fonction de m , p et π .
4. On suppose dans cette question 4 que N suit la loi de Poisson de paramètre λ , réel strictement positif.

a. Montrer que pour tout entier naturel j , on a :

$$r_j = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^j}{j!} \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{1}{(n-j)!} [\lambda(1-p)]^{n-j}$$

b. En déduire que X suit une loi de Poisson, et préciser son paramètre en fonction de p et λ .

Partie II – La loi binomiale négative

On généralise la définition des coefficients binomiaux aux nombres réels en posant, pour tout y réel et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$: $\binom{y}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (y-i)$, et $\binom{y}{0} = 1$.

5. Ecrire une fonction récursive en Python d'en-tête `cb(y,k)` : qui calcule $\binom{y}{k}$.

6. *La formule du binôme négatif.*

Soit c un réel strictement positif, et x un réel de $[0, 1[$.

a. Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{c+n+1}} dt$.

En utilisant une formule de Taylor ([formule hors programme désormais](#)), établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{k=0}^n \binom{c+k-1}{k} x^k + c \binom{c+n}{n} I_n.$$

b. Vérifier que pour tout $t \in [0, x]$: $0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x$.

En déduire l'encadrement : $0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{c+1}}$.

c. i. Montrer, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\binom{c+n}{n} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{c}{k}\right)$.

ii. Montrer que pour tout réel t positif, $\ln(1+t) \leq t$.

iii. Etablir, pour tout entier naturel $k \geq 2$: $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$.

En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$.

iv. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $\ln \left[\binom{c+n}{n} \right] \leq c(1 + \ln(n))$.

En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{c+n}{n} x^{n+1} = 0$.

d. En conclure que la série $\sum_{k \geq 0} \binom{c+k-1}{k} x^k$ est convergente, et établir la formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{c+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^c}$$

7. Soit p un réel de $]0, 1[$ et r un réel strictement positif. Montrer que la suite de nombres $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $p_k = \binom{r+k-1}{k} (1-p)^k p^r$ définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On l'appelle *loi binomiale négative* de paramètres r et p .

8. Si Y est une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres 1 et p , reconnaître la loi de $Y + 1$.
9. *Espérance et variance.*
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale négative de paramètres r réel strictement positif et $p \in]0, 1[$.

- a. Montrer : pour tout entier $k \geq 1$, $k \binom{r+k-1}{k} = r \binom{r+k-1}{k-1}$.
- b. Montrer que Z admet une espérance et que l'on a : $E(Z) = \frac{r(1-p)}{p}$.
- c. Montrer que Z admet une variance et que l'on a : $V(Z) = \frac{r(1-p)}{p^2}$.

On pourra commencer par calculer l'espérance de $Z(Z-1)$.

Partie III – Les lois de Panjer

On reprend les notations du début du problème : la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ a sa loi donnée par $p_k = P(N = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On suppose dans toute la suite du sujet que la loi de N vérifie la relation de Panjer : il existe deux réels a et b , avec $a < 1$ et $a + b > 0$, tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}.$$

On dira alors que N suit la loi $\mathcal{P}(a, b)$.

10. Détermination des lois de Panjer.

- a. Montrer que pour tout entier k strictement positif, on a : $p_k = p_0 \prod_{i=1}^k \left(a + \frac{b}{i}\right)$.
- b. Dans cette question, on suppose que $a = 0$.
Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre b .
- c. Dans cette question, on suppose que $a < 0$.
- Montrer qu'il existe un unique entier naturel r , tel que : $\forall k > r, p_k = 0$ et $\forall k \leq r, p_k \neq 0$. On pourra raisonner par l'absurde, et supposer les p_k tous strictement positifs.
 - Montrer : $b = -a(r+1)$.
 - Etablir que pour tout $k \in [0, r]$, $p_k = (-a)^k \binom{r}{k} p_0$.

$$\text{En déduire que } p_0 = \frac{1}{(1-a)^r}.$$

- iv. En conclure que N suit une loi binomiale et préciser les paramètres en fonction de a et b .
- d. Dans cette question, on suppose que $a > 0$.
- Montrer que pour tout entier naturel k , on a : $p_k = \binom{\frac{b}{a} + k}{k} a^k p_0$.
 - En déduire que N suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de a et b .

11. Montrer que, dans tous les cas, N admet une espérance et une variance, et qu'elles sont données par : $E(N) = \frac{a+b}{1-a}$ et $V(N) = \frac{a+b}{(1-a)^2}$.

Partie IV – L’algorithme de Panjer

- On reprend les notations de l’introduction du sujet et de la partie III.
- Si A est un événement et Y une variable aléatoire, on note, si elle existe, $E_A(Y)$ l’espérance de la loi conditionnelle de Y sachant A .

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $P(X_n = 0)$ en fonction de q_0 puis établir que $r_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} q_0^n p_n$.

13. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut $E_{(X_n=j)}(X_n)$? En déduire : $E_{(X_n=j)}(U_1) = \frac{j}{n}$.

b. Etablir : $r_j = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_n = j) \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) p_{n-1}$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E_{(X_n=j)} \left(a + \frac{b}{j} U_1\right) P(X_n = j) = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{bi}{j}\right) P(U_1 = i) P(X_{n-1} = j - i)$$

d. En conclure : $r_j = \sum_{i=0}^j \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i}$, puis :

$$r_j = \frac{1}{1 - a q_0} \left(\sum_{i=1}^j \left(a + \frac{bi}{j}\right) q_i r_{j-i} \right)$$

Cette formule permet de calculer récursivement les nombres r_j et ainsi de déterminer la loi de X .

14. Des exemples d’application.

a. Dans cette question, les variables U_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre p .

i. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $r_j = \frac{p}{1 - a + ap} \left(a + \frac{b}{j}\right) r_{j-1}$.

En déduire que X suit une loi de Panjer.

ii. Retrouver les résultats des questions 3 et 4 de la partie I.

b. Dans cette question, on suppose que $a = 0$, rappelons que cela entraîne que N suit la loi de Poisson de paramètre b .

Soit p un réel de l’intervalle $]0, 1[$.

i. Montrer qu’il existe un unique réel α tel que la famille de nombres $(q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par $q_i = \alpha \frac{p^i}{i}$ définisse une loi de probabilité d’une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ (loi logarithmique discrète). On pose $q_0 = 0$.

On suppose que les variables U_k suivent cette loi de probabilité.

ii. Montrer que pour tout entier $j \geq 1$, on a : $r_j = \frac{b\alpha}{j} \sum_{i=1}^j p^i r_{j-i}$.

iii. En utilisant un changement d’indice, établir que pour tout $j \geq 2$: $r_j = \left(p + \frac{p(b\alpha - 1)}{j}\right) r_{j-1}$, puis montrer que cette égalité est encore vérifiée pour $j = 1$.

iv. Conclure que X suit une loi binomiale négative et préciser ses paramètres en fonction de b , α et p .