

Le chapitre étend les notions vues en première année pour les espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, à des cas plus généraux et ajoute comme espaces vectoriels de référence $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[x]$

Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :

- démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel ☐
- démontrer qu'une famille de vecteurs est libre, génératrice ou une base ☐
- connaître et utiliser les bases canoniques des espaces de référence : $\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[x]$ ☐
- déterminer la dimension d'un espace vectoriel ☐
- déterminer le rang d'une famille de vecteurs ☐

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

Définitions et propriétés	Exemples
<u>Définitions</u> : un espace vectoriel E (sur $\mathbb{R}$) de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ est un ensemble non vide d'objets appelés vecteurs, muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ vérifiant les propriétés : • pour tout $(u, v) \in E^2, u + v \in E$ on parle d'opération interne • pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E, \lambda \cdot u \in E$ avec la condition particulière $1 \cdot u = u$ on parle d'opération externe, multiplication à gauche d'un vecteur u par un réel λ, aussi appelé scalaire • il existe une application bijective Φ de E vers $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in E^2,$ $\Phi(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \Phi(u) + \mu \Phi(v)$	$\mathbb{R}_2[x]$ est un espace vectoriel : • la loi $+$ correspond au fait que l'on puisse additionner des polynômes entre eux et que le résultat est un polynôme • la loi $\cdot$ signifie que l'on peut multiplier un polynôme par un réel et que le résultat est un polynôme • une interprétation de la bijection est que tout espace vectoriel de dimension n peut être « assimilé » à $\mathbb{R}^n$ Cette dernière propriété n'est pas nécessaire pour définir un espace vectoriel qui est en résumé « un ensemble stable par combinaisons linéaires », elle l'est pour définir la dimension.

Remarques :

- $\lambda \cdot u + \mu \cdot v$ pour deux réels λ, μ et deux vecteurs u, v est appelée **combinaison linéaire** de u et de v et dans la pratique, on écrira $\lambda u + \mu v$
- la **dimension** d'un espace vectoriel est notée $\dim(E)$ (donc $\dim(E) = n$ ci-dessus)
- on note $0_{\mathbb{R}^n}$ le **vecteur nul** de $\mathbb{R}^n$, vecteur dont les composantes sont toutes nulles et $0_E = \Phi^{-1}(0_{\mathbb{R}^n})$ le **vecteur nul** de E
- un vecteur $u \in E$ admet un opposé, noté $-u$, qui vérifie $u + (-u) = 0_E$ (on écrira $u - u = 0_E$)
- par convention, l'espace $\{0_E\}$ désignera un espace vectoriel de dimension 0, appelé **espace nul**.

1.2 Espaces vectoriels de référence

<u>Propriété</u> : les ensembles suivants sont des espaces vectoriels : • $\mathbb{R}^n$, qui est de dimension n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) • $\mathbb{R}_n[x]$ (pour $n \in \mathbb{N}$), l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degrés inférieurs ou égaux à n, qui est de dimension $n + 1$ • $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$), l'ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes, de dimension $n \times p$	Ces ensembles sont clairement stables par combinaisons linéaires, leur dimension peut être vue comme le nombre de « coefficients » que l'on doit déterminer pour définir un objet de l'ensemble : • n réels pour un n-uplet de nombres réels • $n + 1$ coefficients pour les puissances : $x^0 = 1, x^1, x^2, \dots, x^n$ qui caractérisent un polynôme de degré n (au plus) • les $n \times p$ coefficients de la matrice de taille n, p
--	---

1.3 Sous-espaces vectoriels

<u>Définition</u> : avec E un espace vectoriel, lorsque $F \subset E$ est un espace vectoriel, on dit que F est un sous-espace vectoriel de E <u>Propriété</u> : si E est un espace vectoriel, alors un ensemble $F, F \subset E$, est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : • F est non vide • $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + y \in F$	$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). en effet, F est non vide car $0_2 \in F$ et $\forall A, B \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & 0 \\ 0 & \lambda b + b' \end{pmatrix}$ donc $\lambda A + B$ est diagonale i.e. $\lambda A + B \in F$
---	--

LA méthode officielle pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel (sauf cas évident comme les espaces de référence, les Vect ou les ensembles de solutions de systèmes linéaires homogènes) : on montre en fait qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de quelque chose de plus gros.

1. on trouve l'ensemble plus gros
2. on précise que l'élément nul est dans l'ensemble (qui de fait est non vide)
3. on montre que pour tous x_1, x_2 de l'ensemble et tout λ réel, alors $\lambda x_1 + x_2$ est dans l'ensemble.

2 Combinaisons linéaires, familles libres, génératrices

Dans ce paragraphe, on se place dans un espace vectoriel E

2.1 Combinaisons linéaires

<u>Définition</u> : une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, \dots, u_n$ est une somme du type : $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels, appelés coefficients de la combinaison linéaire.	<u>Rappel</u> : l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs $u_1, \dots, u_n$ est noté $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et c'est un espace vectoriel, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$
---	--

2.2 Familles libres

<u>Définition</u> : une famille de vecteurs est dite liée si un des vecteurs de la famille s'exprime comme une combinaison linéaire d'autres vecteurs de cette famille. Une famille est dite libre si elle n'est pas liée.	La famille $((1, 2), (0, 1), (-1, 8))$ est liée car $(-1, 8) = -1 \times (1, 2) + 10 \times (0, 1)$ La famille $((1, 2), (0, 1))$ est libre (cf. ci-dessous).
<u>Propriété</u> : une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est donnée par des coefficients nuls, c'est à dire si, et seulement si : pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels, $\sum_{k=1}^n \lambda_k u_k = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$	En effet soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda(1, 2) + \mu(0, 1) = (0, 0)$ alors $(\lambda, 2\lambda) + (\mu, 0) = (0, 0)$ soit $(\lambda + \mu, 2\lambda) = (0, 0)$ donc $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda = 0 \end{cases}$ et donc $\lambda = 0$ puis $\mu = 0$ donc la famille $((1, 2), (0, 1))$ est libre.
<u>Propriété</u> : si $\dim E = n$, toute famille libre a au plus n éléments. Autrement dit, toute famille de cardinal supérieur ou égal à $n + 1$ est liée.	De manière immédiate $((1, 2), (0, 1), (-1, 8))$ est liée car c'est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont la dimension est 2

2.3 Familles génératrices

<u>Définition</u> : une famille $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ d'éléments de E est dite génératrice de E si, et seulement si : $E = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ autrement dit, $\mathcal{F}$ est dite génératrice de E ssi tout vecteur de E se décompose en combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$ on écrira aussi $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$	Par définition, $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ puisque c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille : $\text{Vect}(u_1, \dots, u_p) = \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$
<u>Propriété</u> : si $\dim E = n$, toute famille génératrice de E a au moins n éléments. Autrement dit : si $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ alors $\dim E \leq p$	La famille $((1, 2, 3), (3, 2, 1))$ ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$ car elle ne contient que 2 éléments et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

3 Bases, dimension, bases canoniques, rang d'une famille de vecteurs

3.1 Base : définition et lien avec la dimension

<u>Définition</u> : une base de E est une famille à la fois libre et génératrice de E	C'est une famille « à la base » de tout l'ensemble E et « sans redondance ».
<u>Propriété - bases et dimension</u> : toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension $n > 0$ ont un cardinal égal à n La dimension d'un espace vectoriel (dont un sous-espace vectoriel) est donc égal au nombre de vecteurs dans une de ses bases.	Toute base de $\mathbb{R}_n[x]$ a $n + 1$ vecteurs, toute base de $\mathbb{R}^3$ a 3 vecteurs, toute base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ a np vecteurs.

<u>Propriété</u> : si E est un espace vectoriel, et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors • $\dim(F) \leq \dim(E)$ • $\dim(F) = \dim(E)$ ssi $F = E$	$\text{Vect}((1, 2), (0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$ donc $\dim(\text{Vect}((1, 2), (0, 1))) \leq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ et par définition $((1, 2), (0, 1))$ est une famille génératrice de $\text{Vect}((1, 2), (0, 1))$, de plus elle est libre (cf. plus haut), c'en est donc une base, donc $\dim(\text{Vect}((1, 2), (0, 1))) = 2$ donc $\text{Vect}((1, 2), (0, 1)) = \mathbb{R}^2$
<u>Propriété de caractérisation des bases</u> : si E est de dimension $n \in \mathbb{N}$, 1. toute famille libre de cardinal maximal n est une base. 2. toute famille génératrice de cardinal minimal n est une base.	<u>Remarque</u> : on utilisera très souvent le 1. pour montrer qu'une famille est une base. Comme vu plus haut : $((1, 2), (0, 1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ or $\text{Card}((1, 2), (0, 1)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc $((1, 2), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$
<u>Propriété</u> : si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base d'un espace vectoriel E alors tout vecteur de E se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire de $(u_1, u_2, \dots, u_n)$	Cette décomposition unique permet de parler de <i>coordonnées dans une base</i> : si $x \in E$ alors $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ et $(x_1, \dots, x_n)$ sont LES (uniques) coordonnées de x dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$

3.2 Bases canoniques des espaces de référence

<u>Définition et propriété</u> : les familles suivantes de vecteurs forment des bases des espaces vectoriels respectifs, appelées bases canoniques : • dans $\mathbb{R}^n$, la famille formée des vecteurs $u_1 = (1, 0, \dots, 0), u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, u_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ • dans $\mathbb{R}_n[x]$, la famille $(1, x, \dots, x^n)$ • dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la famille $(E_{ij})_{(i,j) \in [1,n] \times [1,p]}$ où la notation E_{ij} désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1	• Avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ alors $x = x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1)$ • Pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$ alors $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ • Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{2,1} + dE_{2,2}$
--	---

Remarque : on peut montrer que toute famille de polynômes de degrés échelonnés (i.e. les degrés sont deux à deux distincts) forme une famille libre.

3.3 Rang d'une famille de vecteurs

<u>Définition</u> : si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs, on appelle rang de la famille, noté $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$, la dimension du sous-espace engendré par ces vecteurs. $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$	<u>Remarques</u> : • le rang d'une famille de vecteurs est le maximum du cardinal de ses sous-familles libres • forcément $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p$ • (cf. <i>exercice 6</i>) si $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$ alors $\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = \text{rg}(u_1, u_2)$
--	---