

Corrigés, a minima des exercices non abordés en classe.

Dimensions et sous-espaces vectoriels.

Exercice 6

Déterminer le rang de la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) avec $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (2, 2, 0)$ et $u_3 = (4, -2, 3)$

Méthode : on peut effectuer quelques tests pour voir si l'un peut être combinaison des deux autres. Cela peut prendre un peu de temps, d'autant plus si on ne connaît pas a priori le résultat (c'est le cas ici, il est possible que la famille est libre).

Dans tous les cas la « méthode pour démontrer qu'une famille est libre » donnera le résultat (même si elle est liée). On va donc faire cela (on va raisonner ici par équivalence car on ne « sait pas où on va »)

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ alors

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_1) + (2\lambda_2, 2\lambda_2, 0) + (4\lambda_3, -2\lambda_3, 3\lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2 \end{cases}$$

A ce stade on peut réaliser que le système a une infinité de solutions, car c'est un système linéaire homogène et qui a été réduit en un système à 2 équations et 3 inconnues. Donc la famille n'est pas libre.

Pour être plus explicite, en prenant $\lambda_3 = 2$ et donc $\lambda_2 = -1$ puis $\lambda_1 = -6$,

on réalise que $-6u_1 - u_2 + 2u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc la famille est liée

on peut écrire par exemple $u_3 = 3u_1 + \frac{1}{2}u_2$ et donc $\text{Vect}((u_1, u_2, u_3)) = \text{Vect}((u_1, u_2))$

or (u_1, u_2) forme une famille libre (car composée de deux vecteurs non proportionnels) et génératrice de $\text{Vect}(u_1, u_2)$ par définition du Vect, c'est donc une base de $\text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ qui est donc de dimension 2 et donc par définition $\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et F l'ensemble des polynômes $P \in E$ tels que $P'(0) + P''(0) = 0$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

Méthode classique :

- par définition $F \subset \mathbb{R}_n[X]$
- de manière évidente $0_{\mathbb{R}_n[X]}$ (le polynôme nul) est dans F , puisqu'il est nul, ses polynômes dérivés le sont également donc il vérifie la condition $P'(0) + P''(0) = 0$
- soit $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
alors $(\lambda P + Q)'(0) = \lambda P'(0) + Q'(0)$ et $(\lambda P + Q)''(0) = \lambda P''(0) + Q''(0)$ par propriété de la dérivation (linéarité)
d'où $(\lambda P + Q)'(0) + (\lambda P + Q)''(0) = \lambda P'(0) + Q'(0) + \lambda P''(0) + Q''(0)$
 $= \lambda(P'(0) + P''(0)) + Q'(0) + Q''(0) = 0$

car $P \in F \Rightarrow P'(0) + P''(0) = 0$ et de même $P \in F \Rightarrow Q'(0) + Q''(0) = 0$

finalement, on trouve $\lambda P + Q \in F$

donc F est bien un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}_n[X]$

2. On note $G = \text{Vect}(1, X^2 - 2X, X^3, \dots, X^n)$. Montrer que $G \subset F$

On va simplement vérifier que chacun des polynômes de la famille est dans F

On pose $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = x^2 - 2x$ et $\forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, $P_k(x) = x^k$

alors $P_1'(x) = P_1''(x) = 0$ donc $P_1'(0) + P_1''(0) = 0$ et donc $P_1 \in F$

$P_2'(x) = 2x - 2$ et $P_2''(x) = 2$ donc $P_2'(0) + P_2''(0) = -2 + 2 = 0$ et donc $P_2 \in F$

puis pour $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, $P_k'(x) = kx^{k-1}$ et $P_k''(x) = k(k-1)x^{k-2}$

donc, puisque $k-2 \geq 1$, $P_k'(0) = 0$ et $P_k''(0) = 0$ donc $P_k'(0) + P_k''(0) = 0$

finalement $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_k \in F$

or F est un espace vectoriel (d'après 1.), donc toute combinaison linéaire d'éléments de F appartient à F

donc $G \subset F$ (G est l'ensemble des combinaisons linéaires de $P_1, P_2, \dots, P_n$)

3. Montrer que $\dim G = n$

La famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est génératrice de $G = \text{Vect}((P_1, P_2, \dots, P_n))$ par définition du Vect

nous allons maintenant montrer qu'elle est libre, soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

si $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

on peut écrire, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k P_k(x) = 0$ soit $\lambda_1 - 2\lambda_2 x + \lambda_2 x^2 + \sum_{k=3}^n \lambda_k x^k = 0$

et donc par identification (des coefficients) : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ (deux fois) et $\forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$

finalement $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$ donc la famille $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est libre

et donc, étant libre et génératrice de G , la famille est une base de G

comme elle comporte n éléments, $\dim G = n$

4. En déduire que : $n \leq \dim F \leq n+1$, puis que : $\dim F = n$ et $F = G$

Comme $G \subset F \subset \mathbb{R}_n[X]$ alors par propriété $\dim G \leq \dim F \leq \dim \mathbb{R}_n[X]$

or d'après la question précédente, $\dim G = n$ et d'après le cours, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

donc $n \leq \dim F \leq n+1$

pour la suite, il faut comprendre que F ne peut être égal à $\mathbb{R}_n[X]$ car « il en manque », en effet F ne peut pas contenir de polynôme de degré 1

par exemple $P(x) = x$ n'appartient pas à F car $P'(x) = 1$ et $P''(x) = 0$ d'où $P'(0) + P''(0) = 1$
 donc $F \neq E$ (il va donc être strictement plus petit et en termes de dimension, cela se traduit par au moins une unité en moins)

donc d'après la propriété (avec des espaces vectoriels) : si $F \subset E$ alors $F = E \Leftrightarrow \dim F = \dim E$
 en utilisant sa négation $F \neq E \Rightarrow \dim F \neq \dim E$

or d'après le premier résultat de la question $\dim F \leq \dim E$ donc $\dim F < \dim E$

i.e. $\dim F < n+1$ or $n \leq \dim F$ et $\dim F$ est un nombre entier, donc $\dim F = n$

puis on utilise à nouveau la propriété : $G \subset F$ et $\dim G = \dim F$ donc $G = F$

Exercice 8

2. On considère $E = \mathbb{R}^3$

Dans chacun des cas suivants, dire si (u, v, w) est une famille libre ou liée.

d. $u = (1, 0, -1)$, $v = (2, -2, 1)$, $w = (a, b, c)$ où a, b, c sont des réels.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, tel que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0)$

alors $\alpha(1, 0, -1) + \beta(2, -2, 1) + \gamma(a, b, c) = (0, 0, 0)$

i.e. $(\alpha, 0, -\alpha) + (2\beta, -2\beta, \beta) + (a\gamma, b\gamma, c\gamma) = (0, 0, 0)$

$$\text{soit } (\alpha + 2\beta + a\gamma, -2\beta + b\gamma, -\alpha + \beta + c\gamma) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + a\gamma = 0 \\ -2\beta + b\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + c\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + a\gamma = 0 \\ -2\beta + b\gamma = 0 \\ 3\beta + (a+c)\gamma = 0 \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + a\gamma = 0 \\ -2\beta + b\gamma = 0 \\ (a + \frac{3}{2}b + c)\gamma = 0 \quad L_3 \leftarrow \frac{3}{2}L_2 + L_3 \end{cases}$$

1^{er} cas : si $a + \frac{3}{2}b + c = 0$ alors la dernière équation devient $0 = 0$, donc le système admet une infinité de solutions car c'est alors un système linéaire homogène (admettant donc au moins une solution) et non carré (admettant donc aucun ou une infinité de solutions).

On peut aussi remarquer qu'alors (avec $\gamma = 1, \left(-b - a, \frac{b}{2}, 1\right)$) est solution

la famille est donc liée dans ce cas.

2^{ème} cas : si $a + \frac{3}{2}b + c \neq 0$ alors la dernière équation entraîne $\gamma = 0$ puis les deux autres donnent $\alpha = \beta = 0$ et la famille est donc libre dans ce cas.

Exercice 10

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a \in \mathbb{R}$

On pose $P_0(X) = 1 + X, \quad P_1(X) = X + X^2, \quad P_2(X) = X^2 + X^3, \quad P_3(X) = 1 + aX^3$

1. Dans le cas où $a = 1$, montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est liée et déterminer le rang de la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) , c'est-à-dire la dimension de $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$

Si $a = 1$ alors $P_3(x) = 1 + x^3 = 1 + x - (x + x^2) + x^2 + x^3 = P_0(x) - P_1(x) + P_2(x)$

donc la famille est liée, de fait $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ (puisque P_3 se décompose comme combinaison linéaire des autres polynômes).

On va alors montrer que (P_0, P_1, P_2) est une famille libre (*N.B.* : c'est une famille échelonnée) : soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) = 0$ i.e. $\lambda_0(1 + x) + \lambda_1(x + x^2) + \lambda_2(x^2 + x^3) = 0$

donc $\lambda_0 + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + \lambda_2 x^3 = 0$

donc par identification : $\lambda_0 = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_2 = 0$

et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ donc la famille (P_0, P_1, P_2) est libre, de plus c'est une famille génératrice de $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ par définition du Vect, c'est donc une base de $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$

donc $\dim(\text{Vect}(P_0, P_1, P_2)) = 3$ (car il comporte une base à 3 éléments)

donc $\dim(\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)) = 3$ car $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2) = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$

i.e. la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est de rang 3

Nota bene : on peut aussi utiliser des évaluations pour déterminer $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$, par exemple en $x = 0$ ce qui donne d'emblée $\lambda_0 = 0$

2. Dans le cas $a = -1$, montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

Il suffit de montrer que c'est une base puisque c'est une famille à 4 éléments, et que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$

soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) + \lambda_3 P_3(x) = 0$

i.e. $\lambda_0(1 + x) + \lambda_1(x + x^2) + \lambda_2(x^2 + x^3) + \lambda_3(1 - x^3) = 0$

donc $\lambda_0 + \lambda_3 + (\lambda_0 + \lambda_1)x + (\lambda_1 + \lambda_2)x^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)x^3 = 0$

donc par identification : $\lambda_0 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_0 + \lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ soit

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_0 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \leftarrow L_3 - L_2 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \leftarrow L_4 - L_3 \end{cases}$$

donc $\lambda_3 = 0$ puis par substitution $\lambda_2 = 0$ puis $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_0 = 0$

donc la famille est libre, de plus $\text{Card}((P_0, P_1, P_2, P_3)) = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[x])$

donc (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_3[x]$

Des exercices classiques

Exercice 12

Pour a, b, c réels, on pose $M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ lorsque

a, b, c décrivent $\mathbb{R}$, c'est-à-dire : $\mathcal{A} = \{M(a, b, c), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$

Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Déterminer la dimension de $\mathcal{A}$ et une base de $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \text{Par définition } \mathcal{A} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ par définition de Vect} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel (puisque'il s'écrit comme Vect d'une famille de vecteurs)

de plus par définition $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ en est une famille génératrice

montrons que cette famille est libre : soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}_3$ tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2 \text{ alors } \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille est libre

comme elle est de plus génératrice, c'est une base de $\mathcal{A}$, de fait $\dim(\mathcal{A}) = 3$ car une de ses bases comporte 3 éléments.

Exercice 14

1. Soit $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

- b. Montrer que $v = (-1, 0, 1)$ et $w = (0, -1, 1)$ sont deux vecteurs de F formant une famille libre.
- c. Montrer que (v, w) est une base de F

En écrivant par exemple $x_3 = -x_1 - x_2$, on trouve $F = \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1))$
i.e. $F = \text{Vect}(-v, -w)$ et donc $F = \text{Vect}(v, w)$ car on peut remplacer n'importe quel élément de la famille par un autre qui lui est proportionnel et non nul.

Si on fait autrement : par exemple si on écrit $x_1 = -x_2 - x_3$, on aboutit alors à $F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$
soit on raisonne de manière analogue, en disant que $(-1, 1, 0) = v - w$ puis que $\text{Vect}(v - w, v) = \text{Vect}(v, w)$ (il faut justifier l'égalité dans les deux sens)
soit on raisonne sur la dimension, puisque $F = \text{Vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ alors $\dim F \leq 2$ (le cardinal d'une famille génératrice est forcément supérieur ou égale à la dimension de l'espace)
et d'après 1.b., $\dim F \geq 2$ car (v, w) est une famille libre de F (donc son cardinal est inférieur ou égal à la dimension de F)
d'où finalement $\dim F = 2 = \text{Card}(v, w)$ et (v, w) est une famille libre de F donc (v, w) est une base de F

2. Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0 \text{ et } x_1 + x_3 = 0\}$
Montrer que $G = \text{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, -1)$. Quelle est la dimension de G ?

Nota bene : G est un espace vectoriel puisque c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

$(x_1, x_2, x_3) \in G \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $x_1 = x_2$ et $x_1 = -x_3$
 $\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1, -x_1)$ et $x_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \text{Vect}(u)$ où $u = (1, 1, -1)$
donc (u) est une famille génératrice de G (par définition du Vect) et (u) forme une famille libre car composée d'un seul élément non nul, donc (u) forme une base de G , de fait $\dim(G) = 1$

3. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$

Soit a, b, c des réels tels que $au + bv + cw = 0 = (0, 0, 0)$

$$\text{donc } \begin{cases} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = c \\ c = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

donc $a = b = c = 0$ donc la famille (u, v, w) est libre

or $\text{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$

Pour aller un peu plus loin

Exercice 15 - ce type d'espace vectoriel n'est pas au programme

Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' = y$ sur $\mathbb{R}$ (on admet que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel).

1. Résoudre E et en déduire une base de $\mathcal{E}$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 est $x^2 - 1 = 0$ donc les racines évidentes sont -1 et 1

donc par propriété, $\mathcal{E} = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$

finally $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $f_1 : x \mapsto e^x$ et $f_2 : x \mapsto e^{-x}$, autrement dit $\mathcal{E} = \text{Vect}(f_1, f_2)$

donc (f_1, f_2) est une famille génératrice de $\mathcal{E}$, reste à montrer que c'est une famille libre :

soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = 0$

en particulier pour $x = 0$ et $x = 1$, on obtient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ e\lambda + e^{-1}\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ (e^{-1} - e)\mu = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \mu = 0 \text{ (car } e^{-1} - e \neq 0) \\ L_2 \leftarrow L_2 - eL_1$$

puis $\lambda = 0$

donc la famille (f_1, f_2) est libre, donc, étant génératrice, c'est une base de $\mathcal{E}$

Nota bene : on peut également utiliser les limites en $-\infty$ et $+\infty$ pour trouver $\lambda = \mu = 0$

2. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Montrer que (ch, sh) forme une base de $\mathcal{E}$

On peut remarquer que ces deux fonctions sont dans $\mathcal{E}$ (et donc solutions de E) car elle sont combinaisons linéaires de f_1 et f_2 : $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) = \frac{1}{2}f_1(x) + \frac{1}{2}f_2(x)$ et $\text{sh}(x) = \frac{1}{2}f_1(x) - \frac{1}{2}f_2(x)$ puis

Option 1 : on peut remarquer que f_1 et f_2 sont combinaisons linéaires de ces deux fonctions, puisque de manière évidente, $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) + \text{sh}(x) = f_1(x)$ et $\text{ch}(x) - \text{sh}(x) = f_2(x)$

donc $\text{Vect}(f_1, f_2) = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$ car toute combinaison linéaire de f_1 et f_2 est alors combinaison linéaire de ch et sh d'après ce que nous venons de montrer et réciproquement comme remarqué en introduction de la question

finalement $\mathcal{E} = \text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$ donc la famille $\text{Vect}(\text{ch}, \text{sh})$ est une famille génératrice à deux éléments de $\mathcal{E}$ qui est un espace vectoriel de dimension 2 d'après la question 1., c'est donc une base de $\mathcal{E}$

Option 2 : on peut montrer que ces deux fonctions forment une famille libre comme plus haut en prenant une combinaison linéaire nulle et en évaluant en 0, on obtient directement la nullité du coefficient affecté à ch puisque $\text{sh}(0) = 0$

Exercice 16 - des espaces vectoriels ?

Tous les espaces vectoriels (ou pas) ci-dessous ne sont pas forcément au programme, mais cela permet de tester votre connaissance du concept (d'espace vectoriel)

Les ensembles suivants sont-ils des (sous)-espaces vectoriels ?

Dans les cas où il s'agit bien d'un espace vectoriel ci-dessous, la démonstration n'est pas faite intégralement, mais on peut mettre en place la méthode classique pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel (trouver l'espace plus grand, montrer que l'élément nul est contenu dans l'ensemble et que l'ensemble est stable par combinaisons linéaires de types $\lambda u + v$).

1. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la continuité des fonctions est stable par combinaison linéaire d'après les propriétés sur les opérations de fonctions continues (addition et multiplication par un nombre réel notamment).

2. L'ensemble des fonctions réelles dérivables sur $\mathbb{R}$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivabilité des fonctions est stable par combinaison linéaire d'après les propriétés sur les opérations de fonctions continues (addition et multiplication par un nombre réel notamment).

3. L'ensemble des fonctions réelles T -périodiques sur $\mathbb{R}$ ($T > 0$ fixé).

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Une fonction T -périodique est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$

la fonction nulle l'est donc et pour deux fonctions T -périodique, $(\lambda f + g)(x + T) = \lambda f(x + T) + g(x + T) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$

4. L'ensemble des fonctions réelles convexes sur $\mathbb{R}$

Non car une multiplication par un réel strictement négatif entraîne que la nouvelle fonction est concave.

5. L'ensemble des fonctions réelles croissantes sur $\mathbb{R}$

Non car une multiplication par un réel strictement négatif entraîne que la nouvelle fonction est décroissante.

6. L'ensemble des fonctions positives sur $\mathbb{R}$

Non car une multiplication par un réel strictement négatif entraîne que la nouvelle fonction est négative.

7. L'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car la combinaison linéaire de deux suites nulles à partir d'un certain rang le sera également à partir du rang maximal des deux.

8. L'ensemble des suites réelles de limite nulle.

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car par propriétés (opérations sur les limites), la convergence vers 0 est stable par combinaisons linéaires.

9. L'ensemble des fonctions réelles définie sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +/\infty$

10. L'ensemble des suites réelles de limite $+\infty$

Non car une multiplication par un réel strictement négatif entraîne que la limite est $-\infty$ (ou encore la suite nulle n'est pas dans l'ensemble).

11. L'ensemble des suites réelles convergentes.

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car par propriétés (opérations sur les limites), la convergence est stable par combinaisons linéaires.

12. L'ensemble des suites réelles divergentes

Non, en prenant $u_n = n$ et $v_n = -n$, alors $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente bien que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient divergentes (ou encore la suite nulle n'est pas dans l'ensemble).

13. L'ensemble des suites u telles que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car la négligeabilité (devant $\frac{1}{n}$) est stable par combinaisons linéaires.

14. L'ensemble des fonctions réelles de limite 1 en $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +/\infty$

Non car si $\lim_a f = 1$ alors $\lim_a 2f = 2$ (ou encore la fonction nulle n'est pas dans l'ensemble).

15. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'(x) + ay(x) = 0$ sur un intervalle I , où $a \in \mathbb{R}$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
la fonction nulle est solution et si y_1 et y_2 sont deux solutions alors $(\lambda y_1 + y_2)' + a(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1' + ay_1) + y_2' + ay_2 = 0$ donc $\lambda y_1 + y_2$ est solution.

16. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'(x) + ay(x) = b$ sur un intervalle I , où a et b sont des réels. Non (en supposant b non nul), avec les notations précédentes, $y_1 + y_2$ serait solution de l'équation ayant $2b$ comme second membre (ou la fonction nulle n'est pas solution).

17. $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ fixés, l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles, car la suite nulle vérifie la relation et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la relation alors $(\lambda u + v)_{n+2} = \lambda u_{n+2} + v_{n+2} = \lambda(au_{n+1} + bu_n) + (av_{n+1} + bv_n) = a(\lambda u + v)_{n+1} + b(\lambda u + v)_n$

18. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, nulles en dehors d'un segment fermé.

Oui, c'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction nulle vérifie naturellement la condition et en prenant deux fonctions nulles en dehors d'un segment fermé, en notant $[a, b]$ et $[a', b']$ ces deux segments, alors toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est nulle en dehors du segment $[\min(a, a'), \max(b, b')]$