

Chapitre 4 - couples et suites de variables aléatoires discrètes

Objectifs d'apprentissage - A la fin de ce chapitre, je sais :

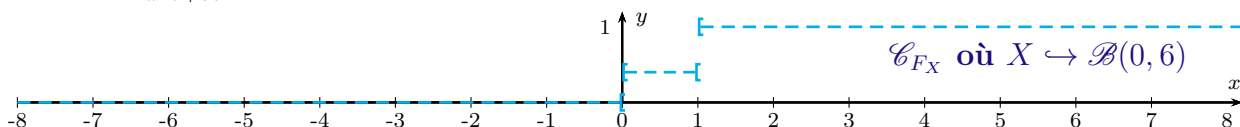
- définir une fonction de répartition et savoir l'interpréter ☐
- définir et démontrer l'indépendance de plusieurs variables aléatoires ☐
- étudier un couple de variables aléatoires : loi de couple, lois marginales et conditionnelles ☐
- étudier une somme, un produit, un minimum ou un maximum de deux variables aléatoires ☐
- utiliser les propriétés de l'espérance et de la variance de plusieurs variables aléatoires, en particulier les cas d'indépendance et de suites de variables aléatoires ☐
- définir la covariance, le coefficient de corrélation de deux variables aléatoires et utiliser leurs propriétés ☐

Un complément sur les variables aléatoires : la fonction de répartition

Définitions et propriétés	Exemples
<u>Définition</u> : la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est la fonction : $x \mapsto P(X \leq x)$, définie sur $\mathbb{R}$ on la note également F_X	<u>Remarque</u> : F_X indique « où sont réparties » les valeurs de X « et avec quelles probabilités ». <u>Exemple</u> : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$ $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$
<u>Propriété</u> : la donnée de la fonction de répartition caractérise la loi de la variable.	Elle ne donne pas immédiatement l'ensemble $X(\Omega)$ mais si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $F_X(k) - F_X(k-1) = P(X = k)$

Remarque : la fonction de répartition n'est pas continue dans le cas des variables discrètes, mais elle a de nombreuses propriétés :

- F_X est croissante sur $\mathbb{R}$ car si $x \leq y$ alors $[X \leq x] \subset [X \leq y]$
- $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ car quand $x \rightarrow -\infty$ la probabilité que X soit dans $] -\infty, x]$ tend vers 0
- $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ car quand $x \rightarrow +\infty$ la probabilité que X soit dans $] -\infty, x]$ tend vers 1



Etude de plusieurs variables aléatoires

Formule des probabilités totales appliquées à des variables aléatoires

Il ne s'agit pas d'une nouvelle propriété mais d'un cas classique d'application de la formule des probabilités totales, lors de l'étude de deux variables aléatoires dépendantes.

Si X et Y sont deux variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\{[X = j]; j \in X(\Omega)\}$ forme un système complet d'événements, donc :

$$\forall i \in Y(\Omega), \quad P(Y = i) = \sum_{j \in X(\Omega)} P([Y = i] \cap [X = j]) = \sum_{j \in X(\Omega)} P_{[X=j]}(Y = i)P(X = j)$$

Nota bene : la dernière égalité est valable si $\forall j \in X(\Omega), P(X = j) > 0$

1 Indépendance de variables aléatoires

<u>Définition</u> : deux variables aléatoires discrètes X, Y sont dites indépendantes si les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ le sont, pour tous x, y i.e. si $\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ $P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y)$	<u>Exemple</u> : si X et Y désignent les résultats de deux dés, $P([X = 3] \cap [Y = 5]) = P([X = 3]) \times P([Y = 5])$ $= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = P([X = i] \cap [Y = j])$
<u>Propriété</u> : plus généralement, deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sont indépendantes si, et seulement si, pour tous intervalles I, J de $\mathbb{N}$, $P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P(X \in I)P(Y \in J)$ en particulier, pour tous réels x et y : $P([X \leq x] \cap [Y \leq y]) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$	Avec l'exemple précédent, $P([X \leq 2] \cap [Y > 3]) = P(X \leq 2)P(Y > 3)$ $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
<u>Définition</u> (pour n variables) : $X_1, \dots, X_n$ sont dites mutuellement indépendantes si, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$: $P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2] \cap \dots [X_n = x_n]) =$ $\prod_{k=1}^n P(X_k = x_k)$ Les propriétés précédentes (dans le cas de deux variables) s'appliquent également	<u>Exemple</u> : si $X_1, \dots, X_n$ sont les résultats de n tirages avec remise, alors $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
<u>Propriété</u> : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux	$\triangle$ la réciproque est fausse (cf. <i>exercice 11</i>) : trois variables X, Y, Z peuvent être deux-à-deux indépendantes sans qu'elles soient mutuellement indépendantes.