

Rappels : calculs de probabilités, lois usuelles

Exercice 1

Un sac contient 5 jetons, 3 bicolores avec une face noire et une face blanche, 2 monocolores, l'un avec deux faces blanches, l'autre avec deux faces noires. On pioche à l'aveugle deux jetons qu'on pose à plat sur une table, de façon à ne voir qu'une des deux faces pour chaque jeton. On note les événements :

- E_0 l'événement : « les deux jetons piochés sont bicolores »,
- N l'événement : « le jeton monocolore à deux faces noires a été pioché »,
- B l'événement : « le jeton monocolore à deux faces blanches a été pioché ».

1. On pose $E_1 = N \cap B$, $E_2 = N \cap \overline{B}$ et $E_3 = B \cap \overline{N}$. Que dire de (E_0, E_1, E_2, E_3) ?

2. Calculer $P(E_2)$. En déduire :

- a. la probabilité d'avoir pioché deux jetons monocolores,
- b. la probabilité d'avoir pioché deux jetons bicolores.

3. Déterminer la probabilité d'avoir les deux faces cachées de même couleur.

En déduire la probabilité d'avoir les deux faces cachées de couleurs différentes.

4. On observe deux faces blanches. Quelle est la probabilité d'avoir pioché un jeton monocolore ?

Exercice 2

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On pioche 4 boules et on note X le nombre de numéros pairs obtenus.

Déterminer la loi de X

Exercice 3 - Calculs d'espérances, de variances

1. Une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit la loi suivante : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{\lambda}{k(k+1)}$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

a. Déterminer deux réels a, b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

b. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme : $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)}$

En déduire la valeur de λ

c. X admet-elle une espérance ?

2. Une variable aléatoire Y sur le même espace probabilisé suit la loi : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(Y = k) = \alpha \times (r_1^k + r_2^k)$

où $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{2}{3}$ et α est une constante réelle.

a. Déterminer la valeur de α

b. Montrer que Y admet une espérance et une variance, que l'on calculera.

Exercice 4 - Loi binomiale

Un restaurant propose 3 menus M_1, M_2, M_3 . On suppose que chaque client choisit son menu au hasard, et indépendamment des autres clients. Un jour donné, le restaurant accueille n clients. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires du nombre de clients choisissant respectivement les menus M_1, M_2, M_3

1. Déterminer la loi de X_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$

2. Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? En déduire la loi de $X_1 + X_2$

3. Déterminer la probabilité que tous les clients choisissent le même menu.

4. Déterminer la probabilité que le restaurateur doive préparer au moins deux menus.

5. Déterminer la probabilité que les trois menus soient demandés.

Exercice 5

On considère une pièce donnant PILE avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$

On lance indéfiniment la pièce et on note :

- X le rang d'apparition du premier PILE,
 - Y le rang d'apparition du deuxième PILE.
1. Rappeler la loi de X et déterminer $Y(\Omega)$
 2. Pour deux entiers naturels non nuls i et j , calculer $P_{[X=i]}(Y = j)$ en distinguant les cas $i < j$ et $i \geq j$
 3. A l'aide d'un système complet d'événements, en déduire que

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq 2, P(Y = j) = (j-1)p^2q^{j-2}$$

4. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

Exercice 6

Un joueur A dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $\frac{1}{3}$

Un joueur B dispose d'une pièce qui a la propriété de faire PILE avec la probabilité $p \in]0, 1[$

Les joueurs A et B lancent leur pièce de manière indépendante jusqu'à obtenir PILE.

- Si les deux joueurs ont le même nombre de lancers, personne ne gagne.
- Sinon, celui qui a fait le plus de lancers doit à son adversaire 1€ pour chaque lancer supplémentaire.

Par exemple, si A obtient PILE au 7^{ème} lancer, B obtient pile au 11^{ème} lancer, alors B doit payer à A la somme de 4 €.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers effectués par le joueur A pour obtenir PILE, et Y le nombres de lancers effectués par le joueur B pour obtenir PILE.

On note enfin $Z = Y - X$

1. Justifier que les variables X et Y suivent des lois géométriques dont on donnera le paramètre.
Préciser les ensembles $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ des issues possibles, et les valeurs

de $P(X = k)$, $P(Y = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$

Donner les espérances $E(X)$, $E(Y)$ de X et Y , et leurs variances $V(X)$ et $V(Y)$

2. a. Montrer que $E(Z) = \frac{1-3p}{p}$, et $V(Z) = \frac{6p^2-p+1}{p^2}$

b. Montrer que : $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \frac{p}{1+2p}$

En déduire la valeur de $P(Z = 0)$

On pourra d'abord justifier : $[Z = 0] = ([X = 1] \cap [Y = 1]) \cup ([X = 2] \cap [Y = 2]) \cup \dots$

Exercice 7

Une urne contient initialement 1 boule blanche et 1 boule noire. On effectue une suite de tirages dans l'urne ; après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute une boule de la couleur opposée à celle qui vient d'être obtenue (donc une noire si une boule blanche est tirée et inversement). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules blanches juste avant le $(n+1)$ ^{ème} tirage, et on note $X_0 = 1$

1. Déterminer la loi de X_1
2. Déterminer la loi de X_2
3. Préciser $X_n(\Omega)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in X_{n+1}(\Omega)$:

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{k}{n+2}P(X_n = k) + \frac{3+n-k}{n+2}P(X_n = k-1)$$

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n = 1) = \frac{1}{(n+1)!}$

6. a. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}E(X_n) + 1$$

- b. Soit $a_n = (n+1)E(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Calculer $a_{n+1} - a_n$ et en déduire a_n , puis $E(X_n)$ en fonction de n