

TD 4 - couples et suites de variables aléatoires discrètes

Quelques corrigés (parfois juste des éléments de corrigés).

Rappels : calculs de probabilités, lois usuelles

Exercice 1

Un sac contient 5 jetons, 3 bicolores avec une face noire et une face blanche, 2 monocolores, l'un avec deux faces blanches, l'autre avec deux faces noires.

On pioche à l'aveugle deux jetons qu'on pose à plat sur une table, de façon à ne voir qu'une des deux faces pour chaque jeton. On note les événements :

- E_0 l'événement : « les deux jetons piochés sont bicolores »,
 - N l'événement : « le jeton monocolore à deux faces noires a été pioché »,
 - B l'événement : « le jeton monocolore à deux faces blanches a été pioché ».
1. On pose $E_1 = N \cap B$, $E_2 = N \cap \overline{B}$ et $E_3 = B \cap \overline{N}$. Que dire de (E_0, E_1, E_2, E_3) ?
 2. a. Calculer $P(E_2)$ puis en déduire :
 - b. la probabilité d'avoir pioché deux jetons monocolores,
 - c. la probabilité d'avoir pioché deux jetons bicolores.
 3. Déterminer la probabilité d'avoir les deux faces cachées de même couleur.
En déduire la probabilité d'avoir les deux faces cachées de couleurs différentes.

On note F l'événement : « les deux faces cachées sont de même couleur »

d'après la question 1., (E_0, E_1, E_2, E_3) est un système complet d'événements, donc on peut appliquer la formule des probabilités totales, d'où

$$P(F) = P(E_0)P_{E_0}(F) + P(E_1)P_{E_1}(F) + P(E_2)P_{E_2}(F) + P(E_3)P_{E_3}(F) \text{ or :}$$

- $P_{E_0}(F) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ car il y a alors deux jetons bicolores et quatre possibilités pour les faces cachées : les deux faces sont noires, blanches ou noires et blanches (2 possibilités dans ce dernier cas).
- $P_{E_1}(F) = 0$ car on a alors les deux jetons monocolores
- $P_{E_2}(F) = \frac{1}{2}$ (une chance sur deux que la face du jeton bicolore soit noire)
- $P_{E_3}(F) = \frac{1}{2}$ (une chance sur deux que la face du jeton bicolore soit blanche)

$$\text{et } P(E_0) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{3}{10} \text{ d'où } P(F) = \frac{3}{10} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{9}{20}$$

Pour la deuxième partie de la question (faces cachées de couleurs différentes), il s'agit de l'événement contraire de celui que nous venons de calculer, on cherche donc $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = \frac{11}{20}$

4. On observe deux faces blanches. Quelle est la probabilité d'avoir pioché un jeton monocolore ?

Il s'agit d'un cas typique d'utilisation de la formule de Bayes où « l'on cherche une cause, connaissant un résultat »

pour rappel cette formule provient de l'égalité $A \cap B = B \cap A$ et donc $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

alors si les événements A et B sont possibles $P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$

$$\text{d'où } P_A(B) = \frac{P(B)P_B(A)}{P(A)} \quad \text{ou} \quad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ici, on note M : « on a pioché un jeton monocolore » et F_2 : « on observe deux faces blanches »

$$\text{on cherche } P_{F_2}(M) = \frac{P(M)P_M(F_2)}{P(F_2)}$$

on réalise que $M = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ donc $P(M) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = \frac{7}{10}$ (par incompatibilité)

$P(F_2)$ se calcule comme $P(F)$ à la question 3. (formule des probabilités totales)

$P(F_2) = P(E_0)P_{E_0}(F_2) + P(E_3)P_{E_3}(F_2)$ car $P_{E_1}(F_2) = P_{E_2}(F_2) = 0$ (on a le jeton monocolore noir)

dans ces deux cas) et donc $P(F_2) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{40}$ (on retrouve la moitié de $P(F)$, ce qui paraît cohérent car il y a autant de chances d'avoir deux faces blanches que deux faces noires)
 enfin, on calcule $P_M(F_2)$, parmi les 10 tirages possibles (de deux jetons, cf. question 1.) 7 tirages (équiprobables) mènent à M , et parmi ceux-là, trois permettent d'avoir deux faces blanches (avec une chance sur deux à chaque fois). donc $P_M(F_2) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$
 finalement $P_{F_2}(M) = \frac{\frac{7}{10} \times \frac{3}{14}}{\frac{9}{40}} = \frac{3}{20} \times \frac{40}{9} = \frac{2}{3}$

Exercice 2

Une urne contient 8 boules numérotées de 1 à 8. On pioche 4 boules et on note X le nombre de numéros pairs obtenus.

Déterminer la loi de X

Il y a deux aspects pour déterminer la loi, tout d'abord trouver $X(\Omega)$, ici $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 puis déterminer les probabilités associées, on raisonne ici avec l'équiprobabilité et des coefficients binomiaux :
 par équiprobabilité des tirages, $P(X = 0) = \frac{N_0}{N_T}$

où N_0 nombre de tirages donnant 0 boules paires : il y en a un seul : $\binom{4}{0}$ (aucune boule paire choisie parmi les 4) et N_T est le nombre total de tirages possibles :

$$N_T = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8!}{(4!)^2} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 7 \times 2 \times 5 = 70 \text{ et donc } P(X = 0) = \frac{1}{70}$$

Pour $P(X = 1)$

avec N_1 le nombre de tirages donnant une boule paire : $\binom{4}{1} = 4$ choix pour la boule paire, et pour chacun de ces choix $\binom{3}{4} = 4$ choix pour les boules impaires

$$\text{d'où par équiprobabilité : } P(X = 1) = \frac{4 \times 4}{\frac{8!}{(4!)^2}} = 16 \times P(X = 0) \text{ soit } P(X = 1) = \frac{16}{70}$$

pour le calcul des autres probabilités, on réalise que le problème est symétrique : autant de boules paires que impaires donc $[X = 4] = \text{"aucune boule impaire"}$, ce qui se calcule comme $P(X = 0)$

$$\text{donc } P(X = 4) = P(X = 0) \text{ et de même } P(X = 1) = P(X = 3)$$

enfin $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements donc $\sum_{k=0}^4 P(X = k) = 1$

$$\text{donc } P(X = 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 3) - P(X = 4) = 1 - 2P(X = 0) - 2P(X = 1)$$

$$\text{donc } P(X = 2) = \frac{36}{70}$$

$$\text{Remarque : pour vérifier, de la même façon } P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{36}{70}$$

Option B : en raisonnant avec des tirages successifs (une boule impaire une premier I_1 , puis en deuxième,...)

$$P(X = 0) = P(I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4)$$

$$\text{donc } P(X = 0) = P(I_1)P_{I_1}(I_2)P_{I_1 \cap I_2}(I_3)P_{I_1 \cap I_2 \cap I_3}(I_4)$$

$$P(X = 0) = \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{4!}{8!} = \frac{(4!)^2}{8!} = \frac{1}{70}$$

on retrouve le résultat plus haut

Pour $P(X = 1)$, cela se complique si on raisonne avec des tirages successifs, il ne faut pas oublier que la boule paire peut apparaître en premier, en deuxième,

Exercice 3 - calculs d'espérances, de variances

1. Une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit la loi suivante :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{\lambda}{k(k+1)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

- a. Déterminer deux réels a, b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

On peut partir du terme le plus compliqué, et en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1) + bx}{x(x+1)} = \frac{b + (a+b)x}{x(x+1)}$$

on trouve que $a = 1$ et $b = -1$ fonctionnent (ici, on n'a pas besoin de raisonner par équivalence, et de fait identification, car on ne nous demande pas de trouver **LES** réels qui vérifient l'égalité).

- b. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, simplifier la somme : $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)}$

En déduire la valeur de λ

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \quad (\text{somme télescopiques}).$$

On en déduit, par passage à la limite : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$.

Par ailleurs, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$ donne : $1 = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lambda \times 1$ soit $\lambda = 1$

- c. X admet-elle une espérance ?

Rappels : Si $X(\Omega)$ est fini X admet une espérance et $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$ Si $X(\Omega)$ est infini, la variable aléatoire admet une espérance si la série $\sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$ converge, l'espérance est alors la somme (la limite) de la série.

Ici, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $kP(X = k) = \frac{1}{k+1}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j \geq 2} \frac{1}{j}$ diverge (série de Riemann divergente).

Option B : on peut aussi montrer que $\frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{k}$ puis raisonner par comparaison avec la série harmonique.

Conclusion : X n'a pas d'espérance

2. Une variable aléatoire Y sur le même espace probabilisé suit la loi : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}, P(Y = k) = \alpha \times (r_1^k + r_2^k)$

où $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = \frac{2}{3}$ et α est une constante réelle.

- a. Déterminer la valeur de α

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1 \text{ donne : } \alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} r_1^k + \sum_{k=0}^{+\infty} r_2^k \right) = 1 \quad \text{donc} \quad \alpha = \left(\frac{1}{1-r_1} + \frac{1}{1-r_2} \right)^{-1} = \frac{1}{5}$$

- b. Montrer que Y admet une espérance et une variance, que l'on calculera.

Y admet une espérance et une variance si, et seulement si Y admet un moment d'ordre 2

Une formule : pour $|r| < 1$, si on pose $S(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 r^k$

on a : $S(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)r^k + \sum_{k=0}^{+\infty} kr^k = \frac{2r^2}{(1-r)^3} + \frac{r}{(1-r)^2}$

Y admet un moment d'ordre 2 ssi $\sum \alpha k^2(r_1^k + r_2^k)$ converge, et c'est le cas car cette somme est égale à : $E(Y^2) = \alpha(S(r_1) + S(r_2))$

Conclusion : Y admet une espérance et une variance. Reste à faire les calculs :

- Espérance : $E(Y) = \alpha \left(\sum_{k=0}^{+\infty} kr_1^k + \sum_{k=0}^{+\infty} kr_2^k \right) = \alpha \left(\frac{r_1}{(1-r_1)^2} + \frac{r_2}{(1-r_2)^2} \right) = \frac{8}{5}$
- Moment d'ordre 2 : $E(Y^2) = \alpha(S(r_1) + S(r_2)) = \frac{36}{5}$
- Variance (Koenig-Huygens) : $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{36}{5} - \frac{64}{25} = \frac{116}{5}$

Exercice 4 - loi binomiale

Un restaurant propose 3 menus M_1, M_2, M_3 . On suppose que chaque client choisit son menu au hasard, et indépendamment des autres clients. Un jour donné, le restaurant accueille n clients. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires du nombre de clients choisissant respectivement les menus M_1, M_2, M_3

1. Déterminer la loi de X_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$

X_1 (de même pour X_2 et X_3) correspond au nombre de "succès" (choix du menu 1) lors de répétitions (n épreuves) indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli (le client choisit le menu 1 ou non et il y a une chance sur 3 car le client choisit au hasard)

donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ et de même $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ et $X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$

2. Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? En déduire la loi de $X_1 + X_2$

Par définition de l'exercice $X_1 + X_2 + X_3 = n$ (la somme du nombre de menus 1 + 2 + 3 est égale au nombre de clients)

donc $X_1 + X_2 = n - X_3$

or $(X_1 + X_2)(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\} = \llbracket 0, n \rrbracket$ (car X_3 varie entre 0 et n)

donc pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $X_1 + X_2 = k \iff n - X_3 = k \iff X_3 = n - k$

or $X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ donc $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X_3 = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$

donc $P(X_3 = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} q^{n-(n-k)} = \binom{n}{k} q^k p^{n-k}$ car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

or ici $p = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{2}{3}$ d'où finalement, $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(X_1 + X_2 = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$

i.e. $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$

Remarques :

- a. on aurait pu le voir comme : $X_1 + X_2$ compte le nombre de clients qui choisissent le menu 1 ou le menu 2 (de même lors de répétitions d'une même épreuve de Bernoulli de manière indépendante), cette fois-ci la probabilité de succès est de $\frac{2}{3}$
- b. on verra plus loin que si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ et si X_1 et X_2 sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

Ici cela ne fonctionne pas car X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes, on peut le comprendre avec $X_1 + X_2 + X_3 = n$ (le choix d'un menu implique qu'on ne choisit pas les autres)

Question subsidiaire : montrer la non indépendance des variables, X_1 et X_2 par exemple

On a compris la dépendance avec le commentaire précédent, essayons de le démontrer mathématiquement, on cherche donc un contre-exemple à : $P([X_1 = n_1] \cap [X_2 = n_2]) = P(X_1 = n_1)P(X_2 = n_2)$

Souvent, on trouve plus facilement les contre-exemples dans les « cas extrêmes » :

$[X_1 = n] \cap [X_2 = n]$ est impossible car $X_1 + X_2 \leq n$ donc $P([X_1 = n_1] \cap [X_2 = n_2]) = 0$
 or d'après la loi binomiale $P(X_1 = n) = P(X_2 = n) \neq 0$
 donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes

3. Déterminer la probabilité que tous les clients choisissent le même menu.

L'événement tous les clients ont choisi le même menu signifie : « (tous les clients ont choisi le menu 1) ou (tous les clients ont choisi le menu 2) ou (tous les clients ont choisi le menu 3) » donc on cherche $(X_1 = n) \cup (X_2 = n) \cup (X_3 = n)$

or ces trois événements sont incompatibles 2 à 2 (il n'est pas possible qu'en même temps tous les clients aient choisi le menu 1 et le menu 2 par exemple)

donc $P((X_1 = n) \cup (X_2 = n) \cup (X_3 = n)) = P(X_1 = n) + P(X_2 = n) + P(X_3 = n)$

or $P(X_1 = n) = P(X_2 = n) = P(X_3 = n) = \binom{n}{n} p^n q^{n-n} = p^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$

$P((X_1 = n) \cup (X_2 = n) \cup (X_3 = n)) = 3 \times \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$

4. Déterminer la probabilité que le restaurateur doive préparer au moins deux menus.

« Au moins deux menus sont choisis » est l'événement contraire de « un seul menu est choisi »

donc en notant A cet événement, $P(A) = 1 - \frac{1}{3^{n-1}}$

Remarque : généralement (en probabilités) quand la question posée est « au moins ... » (ou « au plus... ») il est intéressant d'étudier l'événement contraire.

5. Déterminer la probabilité que les trois menus soient demandés.

On cherche $(X_1 \neq 0) \cap (X_2 \neq 0) \cap (X_3 \neq 0)$

et ici aussi on va s'intéresser à l'événement contraire $(X_1 = 0) \cup (X_2 = 0) \cup (X_3 = 0)$ Calculons sa probabilité et attention car les événements ne sont pas incompatibles !

donc d'après la formule de Poincaré ou du crible (à trois événements)

$$\begin{aligned} P((X_1 = 0) \cup (X_2 = 0) \cup (X_3 = 0)) &= P(X_1 = 0) + P(X_2 = 0) + P(X_3 = 0) \\ &\quad - P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) - P([X_1 = 0] \cap [X_3 = 0]) \\ &\quad - P([X_2 = 0] \cap [X_3 = 0]) \\ &\quad + P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap [X_3 = 0]) \end{aligned}$$

or $P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = P(X_3 = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$

$P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P(X_3 = n) = \frac{1}{3^n}$ (cas où tous les clients choisissent le menu 3)

de même $P([X_1 = 0] \cap [X_3 = 0]) = P(X_2 = n) = P(X_1 = n) = P([X_2 = 0] \cap [X_3 = 0]) = \frac{1}{3^n}$

et $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] \cap [X_3 = 0]) = 0$ (car $X_1 + X_2 + X_3 = n > 0$)

finalement $P((X_1 = 0) \cup (X_2 = 0) \cup (X_3 = 0)) = 3 \times \frac{2^n}{3^n} - 3 \times \frac{1}{3^n} = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$

Exercice 5

On considère une pièce donnant PILE avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$

On lance indéfiniment la pièce et on note :

- X le rang d'apparition du premier PILE,
- Y le rang d'apparition du deuxième PILE.

1. Rappeler la loi de X et déterminer $Y(\Omega)$

C'est le rang d'apparition du premier succès lors de répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli de paramètre p donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

et le deuxième pile ne peut apparaître qu'à partir du deuxième lancer et pour n'importe lequel des suivants $Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\} = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

2. Pour deux entiers naturels non nuls i et j , calculer $P_{[X=i]}(Y = j)$ en distinguant les cas $i < j$ et $i \geq j$

Dès lors que le premier pile est réalisée, la loi « conditionnelle » de Y est une loi géométrique donc $P_{[X=i]}(Y = j) = 0$ si $j \leq i$ (on ne peut avoir le deuxième pile avant le premier, y compris au même tirage) et si $j > i$, on se retrouve donc à nouveau dans le cas d'une loi géométrique après le i ème lancer (où on a obtenu pile) il a fallu $j - i$ lancers pour avoir le deuxième pile $P_{[X=i]}(Y = j) = pq^{j-i-1}$

3. A l'aide d'un système complet d'événements, en déduire que

$$\forall j \in \mathbb{N}, j \geq 2, P(Y = j) = (j-1)p^2q^{j-2}$$

4. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.