

Eléments de corrigé

1. Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges ($n \geq 3$).

On effectue des tirages sans remise dans cette urne.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le rang de sortie de la première boule blanche.

Que vaut $X(\Omega)$?

$X(\Omega) = \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ car au plus tôt, on tire une boule blanche au premier tirage et au plus tard, on épuise d'abord les $n - 2$ rouges, puis on tire une des deux blanches (et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles).

2. Avec les mêmes hypothèses, que vaut $P(X = 1)$?

Il y a équiprobabilité et il y a deux tirages possibles sur n qui réalisent $X = 1$ donc $P(X = 1) = \frac{2}{n}$

3. Avec les mêmes hypothèses et en appelant Y la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où la première blanche est tirée, que vaut $Y(\Omega)$?

Il ne peut pas rester plus de $n - 2$ rouges et il ne peut pas en rester moins que 0 et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles donc $Y(\Omega) = \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$

4. Avec les mêmes hypothèses, exprimer Y en fonction de X

Au moment où on tire la boule blanche, on a enlevé $X - 1$ boules rouges donc $Y = n - 2 - (X - 1)$ donc $Y = n - X - 1$

5. On lance un dé. La variable aléatoire qui vaut 4 si on obtient un nombre impair et 0 si on obtient un nombre pair a pour espérance 2

☒ vrai

☐ faux

$$E(X) = 0 \times P(\text{pair}) + 4 \times P(\text{impair}) = 0 + 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

6. On lance un dé. X est la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. Que vaut $P(X \leq 4)$?

Cela correspond aux issues 1, 2, 3 et 4 sur les 6 possibles donc $P(X \leq 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

7. Un professeur rencontre un problème avec son clavier qui comporte plusieurs touches défectueuses. De fait, il ne peut rentrer que 3 notes : 4, 7 et 9. Les notes sont modélisées par une variable aléatoire N dont la loi est donnée par $P(N = 4) = \frac{1}{3}$, $P(N = 7) = \frac{1}{4}$ et $P(N = 9) = \frac{5}{12}$. Que vaut $E(N)$?

$$\text{Par définition, } E(N) = 4 \times \frac{1}{3} + 7 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{5}{12} = \frac{16 + 21 + 45}{12} = \frac{82}{12} = \frac{41}{6}$$

8. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et de loi donnée par $P(X = 0) = P(X = 2) = a$ et $P(X = 1) = 1 - 2a$ où a est une constante réelle. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

☐ toutes les valeurs de $]0, 1[$

☐ toutes les valeurs réelles

☒ toutes les valeurs de $]0, 1/2[$

☐ $\frac{1}{4}$

Il faut que $P(X = 1) \in]0, 1[$ (on exclut 1 et 0 car cette valeur est possible et ce n'est pas la seule) donc $0 < 1 - 2a < 1$ et donc $-1 < -2a < 0$, donc $1 > 2a > 0$ soit $\frac{1}{2} > a > 0$

les autres valeurs n'imposent pas de contrainte car on vérifie toujours $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = a + 1 - 2a + a = 1$

9. Avec les mêmes hypothèses, que vaut $E(X)$?

$$\text{Par définition, } E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) = 1 - 2a + 2a = 1$$

- 10.** On considère que dans une équipe de basket, chacun des 12 joueurs a 1 chance sur 4 d'être absent au moins une fois durant le mois de juin. On s'intéresse au nombre N de joueurs absents durant le mois de juin au moins une fois.

Que vaut $P(N = 3)$?

$$\square \quad \frac{1}{4^3} \quad \square \quad \binom{12}{3} \quad \boxtimes \quad \binom{12}{3} \frac{1}{4^3} \left(\frac{3}{4}\right)^9 \quad \square \quad \frac{\binom{12}{3}}{\binom{12}{9}}$$

Il s'agit d'une loi binomiale : on peut considérer chaque joueur comme une épreuve de Bernoulli avec une probabilité de succès (au moins une absence) de $\frac{1}{4}$. Pour trois joueurs données, la

probabilité qu'ils soient absents, et eux seuls, au moins une fois dans le mois est de $\frac{1}{4^3} \left(\frac{3}{4}\right)^9$ et

il y a $\binom{12}{3}$ combinaisons de 3 joueurs.