ECG 2a - mathématiques Pour le 12 octobre 2026

Devoir en temps libre n°2

Devoir à rendre en binôme, obligatoirement.

Exercice 1

On considère, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $\mathscr{E}_1(A)$ et $\mathscr{E}_2(A)$ suivants :
$\mathscr{E}_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\}$; $\mathscr{E}_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), A^2M = AM\}$
Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que $\mathscr{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On admet que $\mathscr{E}_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

2. **a.** Etablir : $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$

b. Montrer que si A est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \mathscr{E}_2(A)$

3. **a.** Etablir que si $A - I_3$ est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \{0_3\}$

b. Un exemple. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathscr{E}_1(B)$ et $\mathscr{E}_2(B)$

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Calculer $C^2 - C$

5. Notons $E = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})/CX = 0_{3,1}\}$ et $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})/CX = X\}$. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de chaque.

6. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

7. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}

8. Déterminer la matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C = PDP^{-1}$

9. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Etablir : $M \in \mathscr{E}_1(C) \iff N \in \mathscr{E}_1(D)$

10. Montrer que $N \in \mathscr{E}_1(D)$ si, et seulement si, il existe six réels a, b, c, d, e, f tels que
$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. En déduire une base de $\mathscr{E}_1(D)$ puis une base de $\mathscr{E}_1(C)$

12. Déterminer $\mathscr{E}_2(C)$

Exercice 2

Dans un groupe de n étudiantes, chacune choisit successivement une boisson au hasard parmi les N proposées sur la carte et numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque étudiante ayant une probabilité $\frac{1}{N}$ de choisir chacune des N boissons (et les choix de boissons étant indépendants les uns des autres).
On cherche à étudier la variable aléatoire T_n, égale au nombre de boissons différentes choisies par les n étudiantes.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n

2. Donner les lois de T_1 et de T_2.

3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $P(T_n = 1), P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ (en distingant suivant que $n > N$ ou $n \leqslant N$).

4. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1)$$

5. On considère dans les questions qui suivent le polynôme

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)\, x^k$$

Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

6. Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G_n'(1)$

7. En utilisant la relation démontrée à la question **4.**, montrer que

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + x G_n(x)$$

8. Dériver l'expression précédente et en déduire que

$$E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$$

9. Prouver enfin que : $E(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$ et déterminer la limite de $E(T_n)$ quand n tend vers $+\infty$