ECG 2a - mathématiques **Devoir en temps libre n°2** Pour le 12 octobre 2026

Corrigé *Total sur 42 points*

Exercice 1 - inspiré d'EM Lyon 2004 *22 points*

On considère, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $\mathscr{E}_1(A)$ et $\mathscr{E}_2(A)$ suivants :
$\mathscr{E}_1(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\}$; $\mathscr{E}_2(A) = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), A^2M = AM\}$. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1. Montrer que $\mathscr{E}_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On admet que $\mathscr{E}_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *1,5 points*

Méthode classique, on vérifie les trois conditions
• $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
• comme $A0_3 = 0_3$ alors $0_3 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
• si M et N sont deux matrices de $\mathscr{E}_1(A)$ et α un réelalors $\alpha M + N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et par propriété sur les opérations matricielles
$A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \alpha M + N$ car $AM = M$ et $AN = N$ puisque M et N sont dans $\mathscr{E}_1(A)$ donc $\alpha M + \beta N \in \mathscr{E}_1(A)$
donc $\boxed{\mathscr{E}_1(A) \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

2. **a.** Etablir : $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$ *0,5 point*

Pour montrer l'inclusion on montre que **si** $M \in \mathscr{E}_1(A)$ **alors** $M \in \mathscr{E}_2(A)$:
si $M \in \mathscr{E}_1(A)$ alors $AM = M$ donc $A^2M = A(AM) = AM$ et donc $M \in \mathscr{E}_2(A)$
et ce pour toute matrice M de $\mathscr{E}_1(A)$ donc $\boxed{\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)}$

b. Montrer que si A est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \mathscr{E}_2(A)$ *1 point*

Pour montrer l'égalité des deux ensembles, on doit alors montrer l'autre inclusion :
si A est inversible, soit $M \in \mathscr{E}_2(A)$ alors $A^2M = AM$
donc puisque A est inversible, A^{-1} existe et alors $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ d'où $AM = M$
alors $M \in \mathscr{E}_1(A)$ et on a donc montré que $\mathscr{E}_2(A) \subset \mathscr{E}_1(A)$
or d'après la question **2.a.** $\mathscr{E}_1(A) \subset \mathscr{E}_2(A)$ d'où finalement $\boxed{\mathscr{E}_1(A) = \mathscr{E}_2(A)}$

3. **a.** Etablir que si $A - I_3$ est inversible, alors $\mathscr{E}_1(A) = \{0_3\}$ *1 point*

On suppose que $A - I_3$ est inversible,
soit $M \in \mathscr{E}_1(A)$ alors $AM = M$ d'où $AM - M = 0_3$ et $(A - I_3)M = 0_3$
et comme $A - I_3$ est inversible alors $(A - I_3)$ est simplifiable à droite et donc $M = 0_3$
or on sait que $0_3 \in \mathscr{E}_1(A)$ donc $\boxed{\mathscr{E}_1(A) = \{0_3\} \text{ si } A - I \text{ est inversible.}}$

b. Un exemple. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathscr{E}_1(B)$ et $\mathscr{E}_2(B)$ *2 points*

Comme B est diagonale à coefficients diagonaux non nuls, B est inversible
donc $\mathscr{E}_1(B) = \mathscr{E}_2(B)$ et comme $B - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est également inversible pour les mêmes raisons, alors $\boxed{\mathscr{E}_1(B) = \{0_3\} = \mathscr{E}_2(B)}$

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Calculer $C^2 - C$ *1 point*

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-1 & 0+0-1 & 0-1+2 \\ 0+0-1 & 1+0-1 & -1+0+2 \\ 0+1-2 & 1+0-2 & -1-1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc $C^2 = C$ et de fait $C^2 - C = 0_3$

Remarque : nous verrons bientôt que ce résultat nous permet de dire que $x^2 - x$ est un « polynôme annulateur » de C et les racines de ce polynôme (0 et 1) jouent un rôle particulier comme on le voit dans les questions suivantes.

5. Notons $E = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / CX = 0_{3,1}\}$ et $F = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / CX = X\}$. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de chaque. *4 points*

$$CX = 0_{3,1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= z \end{cases}$$

donc $E = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc E est un espace vectoriel, car s'écrit comme un Vect et ${}^{\mathbf{t}}(1,1,1)$ en est une base, puisqu'il s'agit dune famille génératrice de E par définition du Vect et libre car composée d'un seul vecteur, non nul.

$CX = X \Leftrightarrow CX - X = 0_{3,1} \Leftrightarrow (C - I_3)X = 0_{3,1}$ donc

$$CX = X_{3,1} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -y + z \end{cases}$$

$$\text{donc } F = \left\{ \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

donc$F = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

donc, de même, F est un espace vectoriel et $({}^t(-1,1,0), {}^t(1,0,1))$ en est une base, puisqu'il s'agit dune famille génératrice de F par définition du Vect et libre car composée de deux vecteurs non proportionnels.

Remarque : nous dirons bientôt que 0 et 1 sont des valeurs propres de C

6. Démontrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *1 point*

On note U_1, U_2, U_3 ces trois vecteurs
soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0_{3,1}$

alors $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ donc $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

donc $\lambda_2 = 0$ puis $-2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
donc la famille (U_1, U_2, U_3) est libre
de plus $\text{Card}((U_1, U_2, U_3)) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$ donc $\boxed{(U_1, U_2, U_3) \text{ est une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

Remarque : nous aurons bientôt un nouvel argument dans ce genre de situations, nous parlerons de concaténation de familles libres associées à des valeurs propres distinctes.

7. Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} *2 points*

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ $\Leftrightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_2 - L_3$ $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ $\Leftrightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$

donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. Déterminer la matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C = PDP^{-1}$ *2 points*

On s'attend à trouver une matrice diagonale, et plutôt que de résoudre un système on réalise que $C = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}CP = P^{-1}PDP^{-1}P \Leftrightarrow P^{-1}CP = I_3 D I_3 \Leftrightarrow P^{-1}CP = D$ (les matrices P

et P^{-1} étant inversibles, on peut multiplier à droite et à gauches par ces matrices en conservant les équivalences).

On calcule alors : $CP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

donc $P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i.e. $\boxed{D = \mathrm{diag}(1,1,0)}$

Remarque : les valeurs des coefficients (diagonaux) de D ne sont pas anodines, elles correspondent aux coefficients « particuliers » (les valeurs propres) trouvés à la question **5**. Et on peut remarquer que les colonnes de P sont les vecteurs de la base de la question **6.** et puisqu'on a trouvé à la question **5.** que $CU_1 = U_1, \quad CU_2 = U_2$, cela explique que les deux premières colonnes de CP soient identiques à celles de P et puisque $CU_3 = 0_{3,1}$ il est logique que la dernière colonne de CP soit nulle.

9. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Etablir : $M \in \mathscr{E}_1(C) \iff N \in \mathscr{E}_1(D)$ *1 point*

Par définitions de $N = P^{-1}M$ et de l'ensemble $\mathscr{E}_1$ pour une matrice, et P étant inversible
$M \in \mathscr{E}_1(C) \Leftrightarrow CM = M \Leftrightarrow CPN = PN \Leftrightarrow P^{-1}CPN = N \Leftrightarrow DN = N \Leftrightarrow N \in \mathscr{E}_1(D)$

10. Montrer que $N \in \mathscr{E}_1(D)$ si, et seulement si, il existe six réels a, b, c, d, e, f tels que *1,5 points*

$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Soit $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

alors $N \in \mathscr{E}_1(D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \end{cases}$ et $\begin{cases} d = d \\ e = e \\ f = f \end{cases}$ et $\begin{cases} 0 = g \\ 0 = h \\ 0 = i \end{cases} \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $N \in \mathscr{E}_1(D)$ si et seulement s'il existe six réels a, b, c d e f tels que $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. En déduire une base de $\mathscr{E}_1(D)$ puis une base de $\mathscr{E}_1(C)$ *3 points*

Avec $E_{i,j}$, les matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, le résultat de la question précédente peut s'écrire : $N \in \mathscr{E}_1(D) \Leftrightarrow N = aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + fE_{2,3}$ où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$
soit $N \in \mathscr{E}_1(D) \Leftrightarrow N \in \mathrm{Vect}\left((E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})\right)$
donc $\mathscr{E}_1(D) = \mathrm{Vect}\left((E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})\right)$ or $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une famille libre car il s'agit d'une sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui est par définition elle-même libre, de plus elle est génératrice de $\mathscr{E}_1(D)$ par définition du Vect

donc $\boxed{(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}) \text{ est une base de } \mathscr{E}_1(D)}$

puis d'après **9.** et avec $N = P^{-1}M$,
$M \in \mathscr{E}_1(C) \Leftrightarrow N \in \mathscr{E}_1(D) \Leftrightarrow N \in \text{Vect}((E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}))$
$\Leftrightarrow M = P(aE_{1,1} + bE_{1,2} + cE_{1,3} + dE_{2,1} + eE_{2,2} + fE_{2,3})$ où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$
$\Leftrightarrow M = aPE_{1,1} + bPE_{1,2} + cPE_{1,3} + dPE_{2,1} + ePE_{2,2} + fPE_{2,3}$ où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$
$\Leftrightarrow M \in \text{Vect}((PE_{1,1}, PE_{1,2}, PE_{1,3}, PE_{2,1}, PE_{2,2}, PE_{2,3}))$

Remarque : à ce stade, on peut expliciter les matrices $PE_{i,j}$ pour voir plus concrètement la future base, mais cela ne change pas le résultat.

$(PE_{1,1}, PE_{1,2}, PE_{1,3}, PE_{2,1}, PE_{2,2}, PE_{2,3})$ est une famille libre, car si $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$
$\lambda_1 PE_{1,1} + \lambda_2 PE_{1,2} + \lambda_3 PE_{1,3} + \lambda_4 PE_{2,1} + \lambda_5 PE_{2,2} + \lambda_6 PE_{2,3} = 0_3$
$\Rightarrow P(\lambda_1 E_{1,1} + \lambda_2 E_{1,2} + \lambda_3 E_{1,3} + \lambda_4 E_{2,1} + \lambda_5 E_{2,2} + \lambda_6 E_{2,3}) = 0_3$
$\Rightarrow \lambda_1 E_{1,1} + \lambda_2 E_{1,2} + \lambda_3 E_{1,3} + \lambda_4 E_{2,1} + \lambda_5 E_{2,2} + \lambda_6 E_{2,3} = 0_3$ car P est inversible
$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ car la famille $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est libre
donc $(PE_{1,1}, PE_{1,2}, PE_{1,3}, PE_{2,1}, PE_{2,2}, PE_{2,3})$ est une famille libre, et génératrice de $\mathscr{E}_1(C)$ par définition du Vect, c'est donc une base de $\mathscr{E}_1(C)$

12. Déterminer $\mathscr{E}_2(C)$ *0,5 point*

Par définition $M \in \mathscr{E}_2(C) \Leftrightarrow C^2M = CM \Leftrightarrow CM = CM$ puisque $C^2 = C$
ce qui est vrai pour toutes les matrices $(CM = CM)$
donc toutes les matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ sont dans $\mathscr{E}_2(C)$, i.e. $\boxed{\mathscr{E}_2(C) = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

Exercice 2 - inspiré d'Ecricome 2008 *20 points*

Dans un groupe de n étudiantes, chacune choisit successivement une boisson au hasard parmi les N proposées sur la carte et numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque étudiante ayant une probabilité $\frac{1}{N}$ de choisir chacune des N boissons (et les choix de boissons étant indépendants les uns des autres).
On cherche à étudier la variable aléatoire T_n, égale au nombre de boissons différentes choisies par les n étudiantes.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n *0,5 point*

Au minimum,il y a une boisson choisie (toutes les étudiantes ont choisi la même boisson) et au maximum, les N boissons sont choisies si $N \leqslant n$ ou n boissons différentes sont choisies si $n \leqslant N$ donc finalement $\boxed{T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]}$

2. Donner les lois de T_1 et de T_2. *1,5 point*

T_1 est le nombre de boissons choisies par une étudiante.
donc $\boxed{T_1(\Omega) = \{1\}}$ c'est une variable certaine et $\boxed{P(T_1 = 1) = 1}$
si deux étudiantes effectuent un choix, puisque $N \geqslant 2$
alors $\boxed{T_2(\Omega) = \{1, 2\}}$
si la première boisson est choisie, la probabilité que la seconde étudiante choisisse la même est de $\frac{1}{N}$ et de fait la probabilité qu'elle choisisse une boisson différente est $1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$
plus rigoureusement, $P(T_2 = 1) = P([T_1 = 1] \cap [T_2 = 1]) = P(T_1 = 1) P_{[T_1=1]}(T_2 = 1)$ d'après la formule des probabilités composée, donc $\boxed{P(T_2 = 1) = 1 \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \text{ et } P(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}}$

3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $P(T_n = 1), P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ (en distingant suivant que $n > N$ ou $n \leqslant N$). *4 points*

• $(T_n = 1)$: lorsque la première boisson est choisie, la probabilité pour chacune des $n-1$ étudiantes suivantes de choisir la même est de $\frac{1}{N}$, indépendamment donc $\boxed{P(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}}$

Remarque : on peut aussi raisonner par équiprobabilité,
il y a N tirages qui aboutissent à une seule boisson choisie (toutes les étudiantes choisissent la boisson 1, toutes choisissent la boisson 2, ou ..., ou la boisson N) sur les N^n tirages possibles (c'est analogue à un tirage avec remise).

• pour $(T_n = 2)$, il faut passer par un dénombrement précis :
Comme évoqué ci-dessus, il y a N^n ensemble de choix possibles (comme un tirage avec remise, chaque étudiante choisit 1 boisson parmi N). $(T_n = 2)$ est déterminé par

▷ l'ensemble des 2 boissons choisies parmi les N ; il y a $\binom{N}{2}$ tels choix.

▷ le nombre de façons « d'attribuer » exactement 2 boissons aux n étudiantes. C'est un dénombrement analogue au N^n : pour chaque étudiante, il y a alors 2 choix, d'où 2^n possibilités au totales, mais dans cet ensemble de choix, il y en a deux où toutes les étudiantes ont choisi la même boisson. Il y a donc $2^n - 2$ telles listes contenant exactement 2 boissons.

il y a donc $\binom{N}{2}(2^n - 2) = \frac{N(N-1)}{2}(2^n - 2)$ choix aboutissant à $(T_n = 2)$ donc par équiprobabilité,

$\boxed{\mathrm{P}(T_n = 2) = \frac{N(N-1)}{2} \times \frac{(2^n - 2)}{N^n} = \frac{(N-1)(2^{n-1} - 1)}{N^{n-1}}}$ (ce qui coïncide avec T_2 pour $n = 2$)

• $(T_n = n)$ n'est pas possible si $n > N$ et si $n \leqslant N$ on peut raisonner de deux façons
Option A : raisonnement avec des tirages successifs, la 1ère étudiante peut choisir n'importe quelle boisson, puis la seconde parmi les $N-1$ non choisies sur les N possibles, puis la troisième parmi $N-2$ sur les $N, \ldots$, puis la dernière étudiante (la $n^{\text{ème}}$) choisir parmi les $N-(n-1)$ non choisies sur les N, soit $(T_n = n) = (T_1 = 1) \cap (T_2 = 2) \cap \cdots \cap (T_n = n)$
puis avec la formule des probabilités composées, on trouve :

$$P(T_n = n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{N-k}{N} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(N-k)}{\prod_{k=0}^{n-1} N} = \frac{N(N-1)\ldots(N-(n-1))}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}$$

Option B : on raisonne par équiprobabilité, il faut choisir n boissons différentes parmi les N proposées, il y a donc $\binom{N}{n}$ combinaisons possibles et pour chacune d'elle il y a $n!$ permutations possibles donnant n boissons différentes (par exemples les étudiantes 1 et 2 choisissent les boissons 1 et 2 ou 2 et 1 constituent deux situations menant à deux boissons différentes), d'où par équiprobabilité et puisqu'il y a N^n choix possibles au total

$$P(T_n = n) = \frac{n! \times \binom{N}{n}}{N^n} = \frac{n! \times \frac{N!}{n!(N-n)!}}{N^n} = \frac{\frac{N!}{(N-n)!}}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}$$

d'où $\boxed{P(T_n = n) = 0 \text{ si } n > N \quad \text{et sinon } \mathrm{P}(T_n = n) = \frac{N!}{(N-n)!N^n}}$ (ce qui coïncide bien pour $T_2 = 2$)

4. A l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$: *3 points*

$$P(T_{n+1}=k) = \frac{k}{N}P(T_n=k) + \frac{N-k+1}{N}P(T_n=k-1)$$

Remarque préalable : l'énoncé oublie probablement d'ajouter une hypothèse, par exemple $n \geqslant N$ (pour y voir plus clair, faîtes la question avec cette hypothèse). En effet, le fait que k puisse prendre des valeurs « impossibles » pour T_{n+1} nous oblige à faire deux cas (le cas principal étant le deuxième)

1er cas : si $k > \min(n,N)+1$ alors $k \notin T_{n+1}(\Omega)$ puisque $T_{n+1}(\Omega) = [\![1, \min(n+1,N)]\!]$
de même $k \notin T_n(\Omega)$ et $k-1 > \min(n,N)$ donc $k-1 \notin T_n(\Omega)$
donc finalement dans ce cas $P(T_{n+1}=k) = P(T_n=k) = P(T_n=k-1) = 0$ et l'égalité est donc vérifiée

2ème cas : si $k \leqslant \min(n,N)+1$
d'après la question **1.**, $T_n(\Omega) = [\![1, \min(n,N)]\!]$, donc $(T_n=i])_{i\in[\![1,\min(n,N)]\!]}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :
donc pour $k \in [\![1, \min(n,N)]\!]$, $P(T_{n+1}=k) = \sum_{i=1}^{\min(N,n)} P(T_n=i)P_{[T_n=i]}(T_{n+1}=k)$
or si $i > k$, $P_{[T_n=i]}(T_{n+1}=k) = 0$ car il n'est pas possible que le nombre de boissons choisies diminue avec une étudiante en plus
et si $i < k-1$, $P_{[T_n=i]}(T_{n+1}=k) = 0$ car il n'est pas possible que le nombre de boissons choisies augmente de deux unités avec une seule étudiante en plus
donc $P(T_{n+1}=k) = P_{[T_n=k]}(T_{n+1}=k)\,P(T_n=k) + P_{[T_n=k-1]}(T_{n+1}=k)\,P(T_n=k-1)$ en posant $P(T_0=0)=0$
or $P_{[T_n=k]}(T_{n+1}=k) = \frac{k}{N}$ car la $n+1^{ème}$ étudiante doit choisir une des k boissons déjà choisies pour que le nombre de boissons choisies ne change pas
et $\mathrm{P}_{[T_n=k-1]}(T_{n+1}=k) = \frac{N-(k-1)}{N}$ car il y a $N-(k-1)$ boissons non encore choisies, et il en faut une de plus
d'où $\boxed{P(T_{n+1}=k) = \frac{k}{N}P(T_n=k) + \frac{N-k+1}{N}\mathrm{P}(T_n=k-1)}$ cette démarche (FPT) et cette égalité sont également valables pour $k = \min(n,N)+1$ (dans ce cas $P(T_n=k)=0$)
cette égalité est donc valable pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

Remarque : un raisonnement plus rapide pouvait être toléré (mais il ne fait pas appel à la formule des probabilités totales comme demandé), à savoir,
pour avoir $(T_{n+1}=k)$, on pouvait avoir $(T_n=k)$ ou $(T_n=k-1)$
soit $(T_{n+1}=k) = (T_{n+1}=k)\cap(T_n=k) \cup (T_{n+1}=k)\cap(T_n=k-1)$ puis par incompatibilité, on arrive à $P(T_{n+1}=k) = P_{(T_n=k)}(T_{n+1}=k)\,P(T_n=k) + P_{(T_n=k-1)}(T_{n+1}=k)\,P(T_n=k-1)$
mais il faut à nouveau distinguer les cas pour écrire cette égalité, car la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ n'est définie que lorsque $P(A) \neq 0$

5. On considère dans les questions qui suivent le polynôme $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n=k)\,x^k$ *1 point*

Quelle est la valeur de $G_n(1)$?

On a $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n=k) = \sum_{k=1}^{\min(N,n)} k\mathrm{P}(T_n=k) + \sum 0$ (puisque $T_n(\Omega) = [\![1,\min(n,N)]\!]$)
donc $\boxed{G_n(1)=1}$ (avec cette somme, on a au moins toutes les valeurs possibles de T_n et sans double compte : si $n<N$ c'est exactement toutes les valeurs de $T_n(\Omega)$ et si $N \leqslant n$ on rajoute

des valeurs impossibles, et donc des probabilités nulles).

6. Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$ *1 point*

G_n est dérivable (en tant que fonction polynomiale) sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, G'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(T_n = k)\ x^{k-1}$

donc $G'_n(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(T_n = k) = \sum_{k=1}^{\min(N,n)} k\mathrm{P}(T_n = k) + \sum 0$ (puisque $T_n(\Omega) = [\![1, \min(n, N)]\!]$)

donc, par définition de l'espérance $\boxed{G'_n(1) = E(T_n)}$

7. En utilisant la relation démontrée à la question **4.**, montrer que *5 points*

$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G'_n(x) + xG_n(x)$

Par définition $G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} P(T_{n+1} = k)\, x^k = \sum_{k=1}^{n} P(T_{n+1} = k)\, x^k + P(T_{n+1} = n+1)\, x^{n+1}$

et d'après la question 4. (attention elle n'est valable que pour $k \leqslant n$ d'où la manipulation précédente sur la somme), on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} P(T_{n+1} = k)\, x^k = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{N} P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1)\right] x^k$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)\, x^k + \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k-1)\, x^k - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} (k-1)P(T_n = k-1)\, x^k$$

or $G'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)\, x^{k-1}$ donc $xG'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)\, x^k$ par ailleurs, par changement d'indice $i = k-1$ (donc $k = 1 \Rightarrow i = 0$ et $k = n \Rightarrow i = n-1$)

$$\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k-1)\, x^k = \sum_{i=0}^{n-1} P(T_n = i)\, x^{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} P(T_n = i)\, x^{i+1} \text{ car } P(T_n = 0) = 0$$

$$= x\sum_{i=1}^{n-1} P(T_n = i)\, x^i = x\left[\sum_{i=1}^{n} P(T_n = i)\, x^i - P(T_n = n)\, x^n\right]$$

$$= x\left(G_n(x) - P(T_n = n)\, x^n\right) = xG_n(x) - P(T_n = n)\, x^{n+1}$$

enfin à nouveau par changement d'indice $i = k-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)P(T_n = k-1)\, x^k = \sum_{i=0}^{n-1} iP(T_n = i)\, x^{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} iP(T_n = i)\, x^{i+1} = x^2 \sum_{i=1}^{n-1} iP(T_n = i)\, x^{i-1}$$

$$= x^2\left[\sum_{i=1}^{n} iP(T_n = i)\, x^{i-1} - nP(T_n = n)x^{n-1}\right]$$

$$= x^2 G'_n(x) - nP(T_n = n)x^{n+1}$$

finalement $G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}xG'_n(x) + xG_n(x) - P(T_n = n)\, x^{n+1} - \frac{1}{N}x^2 G'_n(x) + P(T_{n+1} = n+1)\, x^{n+1} + \frac{n}{N}P(T_n = n)x^{n+1}$

et donc $\boxed{G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G'_n(x) + xG_n(x)}$

car $P(T_{n+1} = n+1) - P(T_n = n) + \frac{n}{N}P(T_n = n) = P(T_{n+1} = n+1) - \frac{N-n}{N}P(T_n = n) = 0$

il s'agit en effet de la formule de la question **4.** qui reste valable pour $k = n+1$ car la seule façon d'obtenir $T_{n+1} = n+1$ est d'avoir $T_n = n$ et puisque $P_{[T_n=n]}(T_{n+1} = n+1) = \dfrac{N-n}{N}$

8. Dériver l'expression précédente et en déduire que $E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$ *1,5 points*

Les fonctions étant polynomiales, elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc d'après **7.**

$\forall x \in \mathbb{R}, G'_{n+1}(x) = \dfrac{x - x^2}{N} G''_n(x) + \dfrac{1-2x}{N} G'_n(x) + xG'_n(x) + G_n(x)$

donc pour $x = 1, G'_{n+1}(1) = -\dfrac{1}{N} G'_n(1) + G'_n(1) + G_n(1) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$

car d'après la question **5.** $G_n(1) = 1$ et d'après la question **6.** $G'_n(1) = E(T_n)$ et de fait $G'_{n+1}(1) = E(T_{n+1})$ d'où finalement $\boxed{E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1}$

9. Prouver enfin que : $E(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$ et déterminer la limite de $E(T_n)$ quand n tend vers $+\infty$ *2,5 points*

On procède par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n) : E(T_n) = N\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right)$

Initialisation (pour $n = 1$) : $N\left[1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^1\right] = N\left[1 - 1 + \dfrac{1}{N}\right] = N \times \dfrac{1}{N} = 1$

et $E(T_1) = 1$ puisque $T_1(\Omega) = \{1\}$ donc $P(1)$ est vraie

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P(n)$ est vraie

alors par hypothèse $E(T_n) = N\left[1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right]$

or d'après la question précédente, $E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$

$$\begin{aligned}
\text{donc } E(T_{n+1}) &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] + 1 \\
&= N\left[-\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] + N\left(1 - \frac{1}{N}\right) + 1 \\
&= N\left[-\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] + N = \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n+1}\right] \text{ i.e. } P(n+1) \text{ est vraie}
\end{aligned}$$

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie, i.e. $\boxed{E(T_n) = N\left[1 - \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n\right]}$

Remarque : on aurait pu reconnaitre une suite arithmético-géométrique

enfin, $1 \leqslant N \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{1}{N} \leqslant 1$ dont $0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{N} \leqslant 1$ et donc $\left(1 - \dfrac{1}{N}\right)^n \to 0$ (forme q^n avec $|q| = 1 - \dfrac{1}{N} < 1$)

et donc par opérations $\boxed{E(T_n) \to N}$ ce qui parait logique car lorsque le nombre d'étudiantes devient très important, en moyenne, toutes les boissons ont été choisies.