Exercice 1

Soit A_1, A_2, A_3, A_4 les matrices respectives suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une relation entre A_1 et A_1^2, que peut-on en déduire ?

2. Montrer que $U = {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = {}^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres respectivement de A_1 et A_4, et en déduire pour chacune une valeur propre.

3. A_4 est-elle inversible, que peut-on en déduire ?

4. Sans utiliser les résultats précédents, rechercher les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices, en résolvant des systèmes linéaires.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
On trouvera $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$.

Exercice 3

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $(B - I_3)(B^2 + I_3) = 0$. En déduire les valeurs propres de B et les sous-espaces propres associés.

2. La matrice B est-elle diagonalisable ?

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}

4. Vérifier que $P^{-1}AP = B$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si, et seulement si : $\lambda^3 - 3\lambda + 1 = 0$

2. Soit $\varphi(x) = x^3 - 3x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$

a. Déterminer les variations de φ

b. En déduire que A admet 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vérifiant : $\lambda_1 < -1 \quad$ et $\quad 0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_3 < 2$

3. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Sans calcul, justifier que A est diagonalisable.

2. Montrer que $A^3 = A^2 + 2A$. Sans résoudre de système linéaire, montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1, 0, 2\}$

3. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

4. Retrouver que A est diagonalisable. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$

5. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = P^{-1}MP$

a. Montrer que $AM + MA = 0 \iff DN + ND = 0$

b. Déterminer les matrices N telles que $DN + ND = 0$

c. En déduire toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AM + MA = 0$

Exercice 6 - (Edhec)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. **a.** Déterminer $(A-I)^2$

b. En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A

2. On pose $A = N + I$

a. Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A

b. Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$

3. **a.** Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A

b. En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose U_1 la première colonne de $A - I$ et $U_2 = {}^{\mathrm{t}}(1, 0, 1)$
Montrer que (U_1, U_2) est une base de $E_1(A)$

5. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Justifier l'inversibilité de P et vérifier que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PT^nP^{-1}$. Calculer P^{-1} et en retrouver explicitement l'expression de A^n trouvé à la question **2.a.**

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i, j) de $[\![1, 3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1

a. Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille

$$(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$$

Vérifier que la dimension de E est égale à 5

b. Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

c. En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$$

Exercice 7 - (Edhec)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est diagonalisable.

2. Montrer que $P(X) = X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A

3. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On admet qu'il existe un polynôme Q_n et deux réels a_n et b_n tels que (division euclidienne) :

$$X^n = Q_n(X)P(X) + a_nX + b_n$$

a. Montrer que $3a_n + b_n = 3^n$ et $b_n - a_n = (-1)^n$
En déduire a_n et b_n en fonction de n

b. Exprimer A^n comme combinaison linéaire de A et de I_3, et en déduire explicitement A^n