ECG 2 - mathématiques **Devoir en temps libre n°3** Pour le 9 novembre 2026

Corrigé *Total sur 31 points*

Exercice 1 - (EM Lyon 2018) - exercice 23 de la feuille de T.D. n°4

On dispose d'une pièce de monnaie amenant : Pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\frac{1}{3}$

Partie 1 : étude d'une première variable aléatoire.

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a. Décrire les événements $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$ puis calculer leurs probabilités. *2 points*

Notons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, P_i l'événement : « obtenir pile au i-ème lancer » et $F_i = \overline{P_i}$
de fait, $(X=0) = P_1 \cap P_2$ $\quad$ $(X=1) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$
et $(X=2) = (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)$
en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X=n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)$-ème lancer et le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents.
par incompatibilité des successions de lancers et indépendances des lancers consécutifs, on obtient
donc $P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ $\quad$ $P(X=1) = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$
et $P(X=2) = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$

b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$ *2 points*

Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X=n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer, le premier à l'un des $(n+1)$ rangs précédents.
Formellement, comme le premier pile peut intervenir du 1^{er} au $n+1^{\text{ème}}$ lancer, cela s'écrit :

$$(X=n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1}\left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} F_j\right)\right)\right] \cap P_{n+2}$$

donc par incompatibilité, puis par indépendance des lancers,

$$P(X=n) = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3^2}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^2} \times (n+1) \times \frac{1}{3^n} = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}$$

ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X=n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}}$

Partie II : Etude d'une expérience en deux étapes.

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile, puis, en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher. Enfin, on pioche au hasard une boule de cette urne. On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$

2. a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U *0,5 point*

U prend des valeurs entières positives et, pour chaque entier n, il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n, autrement dit, $\boxed{U(\Omega) = \mathbb{N}}$

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X=n]$ *0,5 point*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant $(X=n)$, l'urne est composée de $(n+1)$ boules indiscernables au toucher

numérotées de 0 à n donc le tirage d'une de ces boules suit une loi uniforme : $\boxed{U_{(X=n)} \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0,n]\!])}$

c. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(U=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X=n)$ puis $P(U=k) = \frac{2}{3^{k+1}}$ *3 points*

Soit $k \in \mathbb{N}$, on commence par observer que $(U=k) \cap (X=n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$P(U=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([U=k] \cap [X=n]) = \sum_{n=k}^{+\infty} P([U=k] \cap [X=n])$$

car $P([U=k] \cap [X=n]) = 0$ si $k > n$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(X=n)}(U=k) P(X=n) \text{ par définition des probabilités conditionnelles}$$

donc $\boxed{P(U=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P(X=n)}$ (d'après **2.b**), ce qui établit la première égalité

puis en injectant le résultat trouvé en **1.b**, on trouve alors :

$$P(U=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} = 4 \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}}$$

on fait alors un changement d'indice, mais sur une une somme finie, pour $p \in \mathbb{N}, p > k$: on effectue $i = n-k \Leftrightarrow n = i+k$ (donc $n=k \Rightarrow i=0$ et $n=p \Rightarrow i=p-k$)

$\sum_{n=k}^{p} \frac{1}{3^{n+2}} = \sum_{i=0}^{p-k} \frac{1}{3^{i+k+2}}$ donc par passage à la limite $(p \to +\infty)$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} = \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{i+k+2}}$

donc $P(U=k) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} = \frac{4}{3^{k+2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}$

nous avons utilisé la convergence de la série géométrique lorsque $|q| < 1$, ici $q = 1/3$

ainsi, $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(U=k) = \frac{2}{3^{k+1}}}$

d. Montrer que U admet une espérance et une variance ; les calculer. *4 points*

U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} kP(U=k)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série

or, $\sum_{k\geqslant 0} kP(U=k) = \sum_{k\geqslant 0} k\frac{2}{3^{k+1}} = \sum_{k\geqslant 1} k\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{9}\sum_{k\geqslant 1} k\frac{1}{3^{k-1}} = \frac{2}{9}\sum_{k\geqslant 1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

on reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{3}$

$|q| < 1$ donc la série converge et alors

$E(U) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(U=k) = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$ ainsi $\boxed{E(U) = \frac{1}{2}}$

Pour déterminer la variance, on peut commencer par étudier l'espérance de $U(U-1)$ (astuce pour le calcul) : $\sum_{k\geqslant 0} k(k-1)P(U=k) = \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{27}\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$

on reconnaît une série géométrique dérivée seconde de raison 1/3, il s'agit donc d'une série convergente (et même absolument), donc d'après le théorème de transfert $U(U-1)$ admet une espérance

et $E(U(U-1)) = \dfrac{2}{27}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2} = \dfrac{2}{27} \times \dfrac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} = \dfrac{2}{27} \times \dfrac{2 \times 27}{8} = \dfrac{1}{2}$

mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U-1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et $E(U^2) = E(U(U-1)) + E(U) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens, $\boxed{V(U) = E\left(U^2\right) - E(U)^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}}$

3. **a.** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V *1 point*

Puisque $X > U$ (si $X = n$ alors U prend des valeurs entre 0 et n) V prend des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas $(V = n)$ est réalisé, ainsi, $\boxed{V(\Omega) = \mathbb{N}}$

b. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$ *1 point*

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $V_{(X=n)}$ prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$P_{(X=n)}(V = k) = P_{(X=n)}(X - U = k) = P_{(X=n)}(U = n - k) = \dfrac{1}{n+1}$

or $n - k \leqslant n$ donc d'après **2.b.** $\boxed{V_{(X=n)} \hookrightarrow \mathscr{U}\left([\![0, n]\!]\right)}$

c. En déduire la loi de V *1 point*

U et V ont même loi conditionnelle sachant $(X = n)$, donc la loi de V est la même que celle de U (on peut s'en convaincre en reprenant les calculs effectués en **2.b**), autrement dit,

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V = k) = \dfrac{2}{3^{k+1}}}$

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes. *1,5 points*

Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$, alors $([U = k] \cap [V = \ell]) = ([U = k] \cap [X - U = \ell]) = ([U = k] \cap [X = k + \ell])$
donc, $P([U = k] \cap [V = \ell]) = P([U = k] \cap [X = k + \ell]) = P_{(X=k+\ell)}(U = k) \times P(X = k + \ell)$

or comme vu plus haut, $k \leqslant k + \ell + 1 \Rightarrow P_{(X=k+\ell)}(U = k) = \dfrac{1}{k+\ell+1}$ et d'après la loi de X

on trouve, $P([U = k] \cap [V = \ell]) = \dfrac{1}{k+\ell+1} \times (k+\ell+1)\dfrac{4}{3^{k+\ell+2}} = \dfrac{4}{3^{k+\ell+2}} = \dfrac{2}{3^{k+1}} \times \dfrac{2}{3^{\ell+1}}$

$= P(U = k)P(V = \ell)$ de fait $\boxed{U \text{ et } V \text{ sont indépendantes.}}$

5. Que vaut $\mathrm{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X, U)$ *1 point*

U et V sont indépendantes donc d'après **4**, $\boxed{\mathrm{Cov}(U, V) = 0}$

alors par propriété (bilinéarité) de la covariance

$\mathrm{Cov}(X, U) = \mathrm{Cov}(V + U, U) = \mathrm{Cov}(V, U) + \mathrm{Cov}(U, U) = 0 + V(U)$ et donc $\boxed{\mathrm{Cov}(X, U) = \dfrac{3}{4}}$

Partie 3 : étude d'un jeu.

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité 2/3 et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note alors X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus.
- le joueur B dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note alors Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus par le joueur B
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon, c'est le joueur B qui gagne.

6. Simulation informatique

a. Ecrire une fonction Python d'en-tête `simule_X()` qui simule la variable aléatoire X *2 points*

On propose la fonction suivante, en utilisant la fonction `rd.random()` pour simuler la probabilité $\frac{2}{3}$ de faire Pile (on aurait pu aussi utiliser `rd.randint(1,4)` ou encore `rd.binomial(1,2/3)`) :

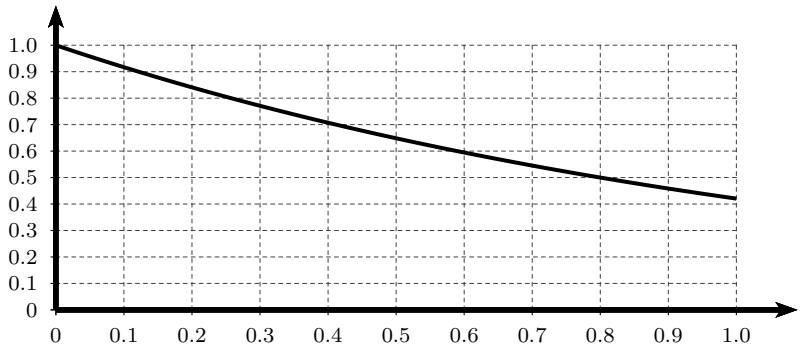
```
def simule_X():
    nPile = 0
    nFace = 0
    while nPile<2 :
        if (rd.random()<2/3):
            nPile = nPile +1
        else :
            nFace = nFace +1
    return nFace
```

b. On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel $p \in]0,1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction ci-contre : *1,5 points*

```
def mystere(p)
  r=0
  N=10**4
  for k in range(1,N+1)
    x=simule_X()
    y=simule_Y(p)
    if x<=y :
      r=r+1/N
  return r
```

La fonction proposée dans l'énoncé effectue 10 000 simulations, compare les résultats de X et Y et le cas échéant, incrémente le compteur (en fréquence) de victoires de A. Cette fonction calcule donc, sur 10 000 simulations, la fréquence des victoires de A, ce qui est une estimation de $P(X \leqslant Y)$

c. On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



A la vue de ce graphique, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré. *1 point*

On cherche la valeur (en abscisse) pour laquelle la probabilité (l'estimation) vaut $0,5$. On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%, ainsi : on conjecture que le jeu est équilibré pour $p \approx 0,8$

7. Etude de la variable aléatoire Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B

a. Reconnaître la loi de Z ; préciser son ou ses paramètres, son espérance et sa variance. *1 point*

Z compte le rang d'apparition du premier succès (« obtenir Pile ») dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli identiques (de paramètre p, la probabilité de faire Pile) et indépendantes (lancer la pièce)

donc $Z \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ donc $E(Z) = \frac{1}{p}$ et $V(Z) = \frac{q}{p^2}$

b. Exprimer Y en fonction de Z. En déduire que Y admet une espérance et une variance que l'on calculera. *1,5 points*

Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, et Z étant le rang d'apparition du premier pile, on en déduit $Y = Z - 1$
comme c'est le cas de Z qui suit la loi géométrique, on en déduit que Y admet une espérance et une variance et que, par linéarité de l'espérance

$E(Y) = E(Z-1) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$ et $V(Y) = V(Z-1) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}$

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geqslant n) = (1-p)^n$ *1,5 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $q = 1-p$, alors $P(Y \geqslant n) = P(Z-1 \geqslant n) = P(Z \geqslant n+1)$

Option A : on peut écrire $P(Z \geqslant n+1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Z=k)$ puis calculer la somme de la série (avec un changement d'indice).

Option B : on peut réaliser que l'événement $(Y \geqslant n+1)$ est réalisé dès que l'on obtient que des Face lors des n premiers lancers, donc avec des notations ad hoc,
$(Y = n+1) = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ donc par indépendance $P(Y \geqslant n+1) = P(F)^n = q^n$

finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y \geqslant n) = q^n = (1-p)^n}$

8. **a.** Montrer que : $P(X \leqslant Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geqslant n)$ *1,5 points*

En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=n)_{n\in\mathbb{N}}$, on trouve

$P(X \leqslant Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X=n] \cap [X \leqslant Y]) = \sum_{n=0}^{+\infty} P([X=n] \cap [Y \geqslant n])$

or $\forall n \in \mathbb{N}, P([X=n] \cap [Y \geqslant n]) = P(X=n)P(Y \geqslant n)$ car X et Y sont indépendantes

donc $\boxed{P(X \leqslant Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geqslant n)}$

b. Déduire des résultats précédents que : $P(X \leqslant Y) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$ *2 points*

En injectant les résultats des questions **1.b** et **7.c** dans la formule trouvée en **8.a**, on a : $P(X \leqslant Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P(Y \geqslant n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} q^n$

$= \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\left(\frac{q}{3}\right)^n = \frac{4}{9}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{q}{3}\right)^{i-1}$ (avec le changement d'indice $i = n+1$)

donc par convergence de la série géométrique dérivée de raison $\frac{q}{3}$ (car $0 < q < 1 \Rightarrow 0 < \frac{q}{3} < 1$),

on trouve $P(X \leqslant Y) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1-\frac{q}{3}\right)^2} = \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 = \frac{4}{(3-q)^2} = \frac{4}{(2+p)^2}$

car $q = 1-p$ d'où $\boxed{P(X \leqslant Y) = \dfrac{4}{(2+p)^2}}$

c. Déterminer la valeur de p pour que le jeu soit équilibré. *1,5 points*

Le jeu est équilibré quand $P(X \leqslant Y) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$

or $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \Leftrightarrow (p+2)^2 - (\sqrt{8})^2 = 0 \Leftrightarrow (p+2-\sqrt{8})(p+2+\sqrt{8}) = 0$

donc $p = -2-\sqrt{8} < 0$ ou $p = -2+\sqrt{8}$ et $\sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = \sqrt{4}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

mais $-2-2\sqrt{2} < 0$ et $-2+2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif

donc $\boxed{\text{le jeu est équitable pour } p = 2\sqrt{2}-2}$

Remarque : on a $\sqrt{2} \approx 1,41$ donc $2\sqrt{2}-2 \approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question **6.c**.