Corrigé ou éléments de corrigé

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si, et seulement si : $\lambda^3 - 3\lambda + 1 = 0$

2. Soit $\varphi(x) = x^3 - 3x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$

a. Déterminer les variations de φ

a. En déduire que A admet 3 valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vérifiant : $\lambda_1 < -1$ et $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_3 < 2$

3. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 6 - (Edhec)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. **a.** Déterminer $(A - I)^2$

$\boxed{(A - I)^2 = 0_3}$

b. En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A

On en déduit : $A^2 - 2A + I = 0$ soit $A(2I - A) = I$:

$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = 2I - A}$

2. On pose $A = N + I$

a. Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A

$(A - I)^2 = 0 = N^2$ donc $N^k = 0$ pour $k \geqslant 2$.

Pour $n \geqslant 2$, $A^n = (I + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k$ car I et N commutent.

Comme $N^k = 0$ pour $k \geqslant 2$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = I + nN + 0$ et donc :

$$\forall n \geqslant 2, \quad A^n = I + nN$$

et cette formule reste vraie pour $n = 1$ et $n = 0$

On en déduit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^n = I + n(A - I) = nA + (1 - n)I}$.

b. Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$

et pour $n = -1$ aussi car $\boxed{A^{-1} = 2I - A = I - N}$

3. **a.** Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A

$(x-1)^2$ est un polynôme annulateur de A, qui admet pour unique racine 1, donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}$, mais ça ne veut pas dire que 1 est une valeur propre.
en écrivant $A-I$, on remarque que les lignes 2 et 3 sont proportionnelles à la première donc $A-I$ n'est pas inversible

et donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}}$

b. En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose U_1 la première colonne de $A-I$ et $U_2 = {}^{\mathrm{t}}(1,0,1)$
Montrer que 1 est une valeur propre de A et que (U_1, U_2) est une base de $E_1(A)$

On résout le système $(A-I)X = 0$ d'inconnue $X = {}^{\mathbf{t}}(x_1, x_2, x_3)$.
Ce système se résume à 1 équation : $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$
1 équation, 3 inconnues, donc 2 paramètres à exhiber, ici : x_2 et x_3

soit $x_1 = x_2 + x_3$ et $X = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$ (et donc 1 est valeur propre, on l'avait déjà montré)

et $E_1(A)$ est de dimension 2 puisque les deux vecteurs qui le composent forment une famille libre (car non proportionnels).

$U_1 = {}^{t}(-1,-2,1)$ et $AU_1 = U_1$ (à vérifier) donc $U_1 \in E_1(A)$ (*nota bene* : on peut alternativement montrer que $U_1 = -2U_2 + {}^{t}(1,1,0)$)
on a déjà vu que $U_2 \in E_1(A)$
(U_1, U_2) est libre car famille de deux vecteurs non proportionnels.
$\dim E_1(A) = 2 = \mathrm{Card}((U_1, U_2))$ donc $\boxed{(U_1, U_2) \text{ forme une base de } E_1(A)}$

5. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Justifier l'inversibilité de P et vérifier que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

P est inversible car elle peut être réduite (en effectuant les échanges de ligne $L_1 \leftrightarrow L_2$ puis $L_2 \leftrightarrow L_3$) en une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

on vérifie par le calcul $AP = PT = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et P inversible donc $\boxed{P^{-1}AP = T}$

6. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par récurrence.

b. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ $A^n = PT^nP^{-1}$. Calculer P^{-1} et en retrouver explicitement l'expression de A^n trouvé à la question **2.a.**

Par récurrence (classique), on trouve $A^n = PT^nP^{-1}$

puis on détermine $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

et enfin, on retrouve par le calcul de PT^nP^{-1} : $A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ -2n & 1+2n & 2n \\ n & -n & 1-n \end{pmatrix}$

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1

a. Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille

$$(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$$

Vérifier que la dimension de E est égale à 5

On pose $M = (m_{i,j})$, l'équation $MT = TM$ impose par le calcul :

$$m_{2,1} = m_{3,1} = m_{3,2} = 0 \quad \text{et} \quad m_{1,1} = m_{3,3}$$

donc $MT = TM \iff M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & 0 & m_{1,1} \end{pmatrix}$

$$\iff M = m_{1,1}(E_{1,1} + E_{3,3}) + m_{1,2}E_{1,2} + m_{1,3}E_{1,3} + m_{2,2}E_{2,2} + m_{2,3}E_{2,3}$$

donc l'ensemble des matrices M telles que $MT = TM$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$ soit :

$$\boxed{\text{Vect}(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})}$$

b. Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Etablir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

En posant $N = PMP^{-1}$: $AN = NA \iff P^{-1}APP^{-1}NP = P^{-1}NPP^{-1}AP \iff TM = MT$

c. En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :

$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$

Avec les notations précédentes, $AN = NA$ équivaut à $M \in \text{Vect}((E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$, donc, comme $PMP^{-1} = N$, à :

$$N \in \text{Vect}(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$$

Exercice 7 - (Edhec)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que A est diagonalisable.

2. Montrer que $P(X) = X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de A

3. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On admet qu'il existe un polynôme Q_n et deux réels a_n et b_n tels que (division euclidienne) :

$$X^n = Q_n(X)P(X) + a_nX + b_n$$

a. Montrer que $3a_n + b_n = 3^n$ et $b_n - a_n = (-1)^n$
En déduire a_n et b_n en fonction de n

b. Exprimer A^n comme combinaison linéaire de A et de I_3, et en déduire explicitement A^n