
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements représentent une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats.
Les exercices peuvent être traités dans l'ordre souhaité, sans pour autant les panacher.
Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé.

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - questions de cours ou d'application du cours

Les questions sont indépendantes

1. Donner la définition de la covariance de deux variables aléatoires.
2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a-b \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
   Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base. Quelle est sa dimension ?
3. Soit $u = (1,1,1)$, $v = (-2,1,-1)$ et $w = (4,1,3)$. Déterminer le rang de la famille (u,v,w) dans $\mathbb{R}^3$
4. Soit $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t = 0 \quad \text{et} \quad x-y = 0\right\}$
   a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$
   b. Soit $u = (1,1,2,0)$ et $v = (1,1,0,2)$. Montrer que (u,v) est une base de F

Exercice 2

Partie I : étude d'une fonction

1. On considère l'équation différentielle : (E) : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + y(t) = t+1$, d'inconnue y, fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
   a. Trouver une solution particulière de (E) polynomiale de degré 1
   b. En déduire toutes les solutions de (E)
   c. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$

Dans la suite de l'exercice, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t + e^{-t}$

2. Déterminer le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$
En déduire que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 1$

On pose alors, pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$

3. Déterminer le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$

4. **a.** Vérifier que : pour tout réel $t \geqslant 0, (f(t))^2 - 2f'(t) = e^{-2t} + t^2 + 2(t+1)e^{-t} - 2$

b. Etudier les variations de $\psi : t \longmapsto t^2 + 2(t+1)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \psi(t) \geqslant 2$

c. En déduire que : pour tout réel $t \geqslant 0$, $\dfrac{f'(t)}{f(t)^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, puis que $|g'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$

5. On pose, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $h(t) = g(t) - t$

a. Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$

b. Déterminer la limite de h en $+\infty$ et en déduire que h s'annule une et une seule fois en un réel $\alpha > 0$

c. Montrer que $\alpha < 1$

Partie II : étude d'une suite récurrente.

On pose $u_0 = 1$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n) = \dfrac{1}{u_n + e^{-u_n}}$

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$

7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

8. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$
Justifier alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

9. **a.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour $n \geqslant -\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$, u_n est une valeur approchée de α à ε près.

b. Compléter la fonction Python suivante permettant de donner une valeur approchée de α à `epsilon` près.

```
def ValeurApprochee(epsilon):
  n=0; u=1
  while ...
    n ...
    u =...
  return ...
```

Partie III : étude d'une suite et d'une série

10. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $v_n > 0$ tel que $f(v_n) = \dfrac{n+1}{n}$

11. **a.** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

b. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

12. **a.** Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2

b. En déduire que : $f(v_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n^2}{2}$

c. En déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$

d. A quelle condition sur le réel β la série $\sum v_n^\beta$ converge-t-elle ?

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Pour toute matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$

1. Déterminer les ensembles E_{0_3} et E_{I_3}

2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

3. Soit M une matrice de E_A, montrer que ${}^tM$ appartient à E_A

4. **a.** Justifier que A est diagonalisable.

b. Soit λ un réel.
Montrer que si λ est valeur propre de A alors : $\lambda^3 - 9\lambda = 0$

c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, telles que $D = P^{-1}AP$

Dans toute la suite de l'exercice, D et P désignent les matrices introduites à la question **4.c.**

5. Calculer P^2
En déduire une expression de P^{-1}

6. **a.** Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Montrer que N appartient à E_D si, et seulement si, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. En déduire une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D

7. **a.** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$
Montrer que M appartient à E_A si, et seulement si, N appartient à E_D

b. En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathscr{B}$

8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $(A+M)^2 = A^2 + M^2$
On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M

Exercice 4

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$

Partie I : tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T

2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$

Partie II : tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z. la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1
Pour tout entier naturel non nul i, on note :
B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

3. Avec Python,

a. Compléter la fonction `simulXYZ` qui simule l'expérience et renvoie les valeurs de X, Y et Z

```
def SimulXYZ(p):
  x=0, y=0,z=0
  while ... :
    if ... :
      ...
    else :
      ...
  return ...
```

b. Ecrire un programme qui effectue 10 000 simulations de la variable X et qui en fait la moyenne, comment interpréter le résultat ?

4. **a.** Montrer, pour tout entier $k \geqslant 2$: $P(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$

b. Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$

c. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$

5. **a.** Pour tout entier $k \geqslant 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$
(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geqslant 3$)

b. En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$

c. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$

6. Donner la loi de Z et son espérance.

7. Montrer que les variables aléatoires Y Z et $X - 1$ sont égales.

8. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\mathrm{cov}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$