ECG 2a **Mathématiques** **DS n°2** - 14 novembre 2026

Corrigé *Total sur XXX points - dont rédaction/présentation/clarté : 3 points*

Dans tout le sujet, concernant les codes Python, on supposera les importations suivantes faites :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.random as rd
```

Exercice 1 - questions de cours ou d'application du cours *7 points*

Les questions sont indépendantes

1. Donner la définition de la covariance de deux variables aléatoires. *0,5 point*

Si X et Y sont deux variables aléatoires, la covariance de X et Y, notée $\text{Cov}(X,Y)$, est, sous réserve d'existence : $\text{Cov}(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$
dans la pratique on utilise $\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a-b \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ *1,5 points*

Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base. Quelle est sa dimension ?

$E = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(A,B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
donc E (en tant que « Vect ») est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et (A,B) en est une famille génératrice de plus, (A,B) est une famille de deux vecteurs et les matrices A et B ne sont pas proportionnelles, donc (A,B) forme une famille libre et donc $\boxed{(A,B) \text{ est une base de } E, \text{ qui est donc de dimension } 2}$

3. Soit $u = (1,1,1)$, $v = (-2,1,-1)$ et $w = (4,1,3)$. Déterminer le rang de la famille (u,v,w) dans $\mathbb{R}^3$

Soit $F = \text{Vect}(u,v,w)$, on remarque que $w = 2u - v$ donc $F = \text{Vect}(u,v,w) = \text{Vect}(u,v)$ *1,5 points*
(u,v) est une famille libre, car composée de deux vecteurs non proportionnels, et génératrice de F par définition du Vect donc (u,v) est une base de F

donc par définition du rang d'une famille de vecteurs $\boxed{\text{rg}(u,v,w) = \dim F = 2}$

4. Soit $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y-z-t = 0 \quad \text{et} \quad x-y = 0\right\}$

a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ *2 points*

On résout le système d'inconnues (x,y,z,t) pour obtenir l'ensemble solution :

$$\begin{cases} x & +y & -z & -t & = 0 \\ x & -y & & & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y - t \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z,t) = (y,y,2y-t,t) = y(1,1,2,0) + t(0,0,-1,1)$$

donc $\mathscr{S} = \text{Vect}\left((1,1,2,0),(0,0,-1,1)\right)$ soit $\boxed{F = \text{Vect}(a,b) \quad \text{avec} \quad a = (1,1,2,0) \quad \text{et} \quad (0,0,-1,1)}$

donc, en tant que Vect, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$

b. Soit $u = (1,1,2,0)$ et $v = (1,1,0,2)$. Montrer que (u,v) est une base de F *1,5 points*

Avec les notations de la question précédente, (a,b) est libre, et génératrice de F par définition du Vect, donc (a,b) est une base de F et $\dim F = 2$
Option A : on montre v est dans F en montrant qu'il est solution du système
Option B : on montre que v est dans F en l'écrivant comme combinaison linéaire de a et b, ce qui est le cas car $v = a + 2b$

finalement $u = a \in F$ et $v \in F$ de plus, la famille (a, b) est libre car composée de deux vecteurs non proportionnels et $\text{Card}(a, b) = 2 = \dim F$ donc $\boxed{(u, v) \text{ est une base de } F}$

Exercice 2 - inspiré d'EML 2018

Partie I : étude d'une fonction

1. On considère l'équation différentielle : (E) : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + y(t) = t + 1$, d'inconnue y, fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

a. Trouver une solution particulière de (E) polynomiale de degré 1 *1 point*

On peut remarquer que $\boxed{\phi : t \mapsto t \text{ est une solution de } (E)}$ et si on ne l'a pas remarqué, on pose $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = at + b$ un polynôme de degré 1 (a, b des réels quelconques)
alors P solution de $(E) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, P'(t) + P(t) = t + 1 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, a + at + b = t + 1$
$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, at + a + b = t + 1 \Leftrightarrow a = 1$ et $a + b = 1$ par identification

b. En déduire toutes les solutions de (E) *1 point*

L'équation homogène associée à (E) est (E_0) : $y' + y = 0$ dont l'ensemble solution est $\mathscr{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{-t} ; \lambda \in \mathbb{R}\}$ et l'ensemble des solutions de (E) est obtenu en superposant les solutions de (E_0) à une solution particulière, soit :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{t \mapsto t + \lambda e^{-t} ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

c. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$ *1 point*

Soit y une solution de E alors $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = t + \lambda e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$,
si de plus $y(0) = 1$ alors $\lambda = 1$ et donc $\boxed{t \mapsto t + e^{-t}}$ est l'unique solution de (E) valant 1 en 0

Dans la suite de l'exercice, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t + e^{-t}$

2. Déterminer le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ *2 points*
En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) \geqslant 1$

f est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) par somme de fonctions dérivables et $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = 1 - e^{-t}$
donc pour $t \in \mathbb{R}, f'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 \geqslant e^{-t} \Leftrightarrow 1 \geqslant -t \Leftrightarrow t \geqslant 1$ (par croissance des fonctions exponentielle et ln)
par ailleurs, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ par opérations
et $f(t) = e^{-t}(1 + te^t)$, or $\lim\limits_{t \to -\infty} e^{-t} = +\infty$
et par croissances comparées $\lim\limits_{t \to -\infty} te^t = 0$
donc par opérations $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = +\infty$
de plus $f(0) = 1$ d'après **1.c.** d'où le tableau de variations

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

On pose alors, pour $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$

3. Déterminer le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$ en précisant ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ *1 point*

Nota bene : l'énoncé ne nous le demande pas, mais la question précédente permet de valider la bonne définition de g (puisque f est toujours supérieure à 1, elle ne s'annule pas).

g est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) en tant qu'inverse de fonction dérivable
et $\forall t \in \mathbb{R}, g'(t) = -\dfrac{f'(t)}{(f(t))^2}$ donc, puisque $f(t)^2 > 0$, les variations de g sont opposées à celles de f, et les limites se calculent par inverses de limites, grâce à celles de f
enfin $f(0) = 1 \Rightarrow g(0) = 1$ d'où le tableau

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(t)$		+	0	-	
g	0	↗	1	↘	0

4. **a.** Vérifier que : pour tout réel $t \geqslant 0, (f(t))^2 - 2f'(t) = e^{-2t} + t^2 + 2(t+1)e^{-t} - 2$ *0,5 point*

Il suffit de calculer, soit $t \geqslant 0$, alors
$(f(t))^2 - 2f'(t) = \left(t + e^{-t}\right)^2 - 2\left(1 - e^{-t}\right) = t^2 + 2te^{-t} + e^{-2t} - 2 + 2e^{-t}$

$= e^{-2t} + t^2 + 2te^{-t} + 2e^{-t} - 2$ donc $\boxed{(f(t))^2 - 2f'(t) = e^{-2t} + t^2 + 2(t+1)e^{-t} - 2}$

b. Etudier les variations de $\psi : t \longmapsto t^2 + 2(t+1)e^{-t}$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \psi(t) \geqslant 2$ *1 pt*

Pour tout $t \geqslant 0, \psi'(t) = 2t + 2(t+1)\left(-e^{-t}\right) + 2e^{-t} = 2t - 2te^{-t} - 2e^{-t} + 2e^{-t} = 2t(1 - e^{-t})$
donc, puisque $t \geqslant 0$, ψ' est du signe de $(1 - e^{-t})$
et comme vu, plus haut $t \geqslant 0 \Rightarrow 1 - e^{-t} \geqslant 0$ donc $\forall t \geqslant 0, \psi'(t) \geqslant 0$

donc $\boxed{\psi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$ et $\psi(0) = 2$, donc : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \psi(t) \geqslant \psi(0) \text{ i.e. } \psi(t) \geqslant 2}$

c. En déduire que : pour tout réel $t \geqslant 0$, $\dfrac{f'(t)}{f(t)^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, puis que $|g'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ *2 points*

D'après **4.a.** $\forall t \geqslant 0, f(t)^2 - 2f'(t) = e^{-2t} + t^2 + 2(t+1)e^{-t} - 2 = e^{-2t} + \psi(t) - 2$
or d'après **4.b.** $\forall t \geqslant 0, \psi(t) \geqslant 2 \Rightarrow \psi(t) - 2 \geqslant 0$ et $\forall t \geqslant 0, e^{-2t} \geqslant 0$
d'où $\forall t \geqslant 0, f(t)^2 - 2f'(t) \geqslant 0$, donc $2f'(t) \leqslant f(t)^2$ et, puisque $f(t)^2 > 0$, on en déduit $2\dfrac{f'(t)}{f(t)^2} \leqslant 1$

et donc $\boxed{\forall t \geqslant 0, \dfrac{f'(t)}{f(t)^2} \leqslant \dfrac{1}{2}}$ et $\boxed{\forall t \geqslant, \quad |g'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}}$

en effet, comme $\forall t \geqslant 0, f'(t) \geqslant 0$ alors $|g'(t)| = \left|\dfrac{f'(t)}{f(t)^2}\right| = \dfrac{|f'(t)|}{|f(t)^2|} = \dfrac{f'(t)}{f(t)^2}$

5. On pose, pour $t \in \mathbb{R}_+$, $h(t) = g(t) - t$

a. Montrer que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ *1 point*

h est dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}_+, h'(t) = g'(t) - 1$ et $g'(t) \leqslant |g'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ d'après la question précédente

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, g'(t) - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$ et donc $h'(t) < 0$ donc $\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$

b. Déterminer la limite de h en $+\infty$ et en déduire que h s'annule une et une seule fois en un réel $\alpha > 0$

$h(0) = g(0) - 1 = 1$ et comme $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t) = 0$ par addition $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t) = -\infty$ *1,5 points*
de plus h est continue (car dérivable) et d'après **5.a.** h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$
donc d'après le théorème de la bijection, h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $\left]\lim\limits_{t \to +\infty} h(t), h(0)\right] =]-\infty, 1]$
comme $0 \in]-\infty, 1]$, alors 0 admet un unique antécédent par h sur $\mathbb{R}_+$,
i.e. $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } h(\alpha) = 0 \text{ et } \alpha > 0}$ car $h(0) = 1 \neq 0$

c. Montrer que $\alpha < 1$ *1 point*

$h(1) = g(1) - 1 < 0$ car $\forall t > 0, g(t) < 1$ d'après l'étude de g (question **3.**),
alors $h(0)h(1) < 0$ et h continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule sur $[0, 1]$ et même $[0, 1[$ car $h(1) \neq 0$

or α est l'unique solution de l'équation $h(t) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $\alpha \in [0, 1[$ et donc $\boxed{\alpha < 1}$

Partie II : étude d'une suite récurrente.

On pose $u_0 = 1$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n) = \dfrac{1}{u_n + e^{-u_n}}$

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0$ *1 point*

Par définition de $g, \forall t \in \mathbb{R}, g(t) > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, g(u_n) > 0$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ et $u_0 > 0$ d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0}$

7. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ *1,5 points*

D'après **4.c.**, pour tout $t \geqslant 0, |g'(t)| \leqslant \frac{1}{2}$ de plus d'après **5.b.** $\alpha \geqslant 0$ et d'après **6.**, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$
donc, pour $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à u_n et α :
$|g(u_n) - g(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(\alpha) = \alpha$ de par leurs définitions

d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}$

8. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ *2,5 points*
Justifier alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

On procède par récurrence pour la première partie de la question,
pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la propriété $P(n)$: $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$

Initialisation : $P(0)$ est vraie $\Leftrightarrow |u_0 - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^0} \Leftrightarrow |1 - \alpha| \leqslant 1 \underset{(\text{car } \alpha \leqslant 1)}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha \leqslant 1 \Leftrightarrow \alpha \geqslant 0$
ce qui est vrai, donc $P(0)$ est vraie

hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose que $P(n)$ est vraie, alors par hypothèse $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$
donc $\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ et d'après **7.** $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$
donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$ c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vraie, d'où l'hérédité

donc par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ est vraie i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}}$

alors, d'après les limites usuelles $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ (forme q^n avec $|q| < 1$)
et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ donc d'après le théorème des gendarmes $|u_n - \alpha| \to 0$ i.e. $\boxed{u_n \to \alpha}$

9. **a.** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour $n \geqslant -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$, u_n est une valeur approchée de α à ε près. *2 points*

u_n est une valeur approchée de α à ε près $\Leftrightarrow \alpha \in [u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon] \Leftrightarrow u_n - \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant u_n + \varepsilon$
$\Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant \alpha - u_n \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |\alpha - u_n| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$
soit $n \geqslant -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$ alors, puisque $\ln(2) \geqslant 0$, $n\ln(2) \geqslant -\ln(\varepsilon)$ i.e. $\ln(2^n) \geqslant -\ln(\varepsilon)$ et donc $-\ln(2^n) \leqslant \ln(\varepsilon)$
soit $\ln\left(\frac{1}{2^n}\right) \leqslant \ln(\varepsilon)$ et donc par croissance de l'exponentielle $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$
donc a fortiori, $|u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ car $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}$ et $\boxed{u_n \text{ est alors une valeur approchée de } \alpha \text{ à } \varepsilon \text{ près.}}$

b. Compléter la fonction Python suivante permettant de donner une valeur approchée de α à `epsilon` près. *1,5 points*

On calcule de manière itérative, les termes de la suite u_n tant que n est inférieur à $-\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$
dès que ce seuil est franchi, on sait d'après la question précédente, que u_n est alors une valeurs approchée de α à ε près. Par exemple : `valeur_approchee(0.00001)` donne `0.8003176277494883`

```
def ValeurApprochee(epsilon):
  n=0; u=1
  while ...
    n ...
    u =...
  return ...
```

```
def ValeurApprochee(epsilon):
  n=0; u=1
  while n<-np.log(epsilon)/np.log(2):
    n = n+1
    u = 1/(u+np.exp(-u))
  return u
```

Partie III : étude d'une suite et d'une série

10. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $v_n > 0$ tel que $f(v_n) = \dfrac{n+1}{n}$ *1 point*

D'après l'étude de f (question **2.**), f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ($f'(0) = 0$ mais pour $t > 0, f'(t) > 0$)
f étant continue (car dérivable), d'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\left[f(0), \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\right[= [1, +\infty[$
or $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n}{n} + \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} > 1$ donc $\dfrac{n+1}{n}$ admet un unique antécédent par f sur $\mathbb{R}_+$ que l'on notera v_n et $v_n > 0$ car $f(0) = 1 \neq \dfrac{n+1}{n}$

autrement dit $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe un unique réel } v_n > 0 \text{ tel que } f(v_n) = \dfrac{n+1}{n}}$

11. **a.** Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. *1,5 points*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par définition
$f(v_{n+1}) - f(v_n) = \dfrac{n+2}{n+1} - \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{(n+2)n - (n+1)^2}{n(n+1)} = \dfrac{n^2+2n-n^2-2n-1}{n(n+1)} = \dfrac{-1}{n(n+1)}$
donc $f(v_{n+1}) - f(v_n) \leqslant 0$ et donc $f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$
alors ϕ, la bijection réciproque de la fonction f restreinte à $\mathbb{R}_+$, a les même variation que f, i.e. ϕ est croissante, donc $\phi(f(v_{n+1})) \leqslant \phi(f(v_n))$ i.e. $v_{n+1} \leqslant v_n$ par propriété de la réciproque
donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$

b. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite. *1,5 points*

D'après les deux questions précédentes, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée, donc d'après le théorème de la limite monotone $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge}}$ et on note ℓ la limite
alors par continuité de $f, f(v_n) \to f(\ell)$ or $f(v_n) = \dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n}$ donc $f(v_n) \to 1$
donc par unicité de la limite $f(\ell) = 1$
or f est bijective sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 1$ donc $\boxed{\ell = 0}$

0ption B (qui ne nécessite pas de montrer dans un premier temps la convergence et avec ϕ définie plus haut) : par définition, $\forall n \in \mathbb{N}, f(v_n) = \dfrac{n+1}{n}$ donc $\phi(f(v_n)) = \phi\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ i.e. $v_n = \phi\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
or f est continue $\Rightarrow \phi$ (sa réciproque sur $\mathbb{R}_+$) est continue également
et $\dfrac{n+1}{n} = 1 + \dfrac{1}{n} \to 1$ donc $\phi\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \to \phi(1)$ i.e. $v_n \to \phi(1)$ or $f(0) = 1 \Rightarrow \phi(1) = 0$ donc $\boxed{v_n \to 0}$

12. **a.** Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2 *1 point*

D'après le cours, pour u au voisinage de $0, e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$
donc avec $u = -t$ alors t au voisinage de $0 \Leftrightarrow u$ est au voisinage de 0 et donc
$e^{-t} = 1 - t + \dfrac{(-t)^2}{2} + o((-t)^2) = 1 - t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$
et donc $t + e^{-t} = 1 - t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ i.e. $\boxed{f(t) = 1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)}$

b. En déduire que : $f(v_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n^2}{2}$ *1 point*

On déduit de la question précédente que, au voisinage de 0, $f(t) - 1 = \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ et donc $f(t) - 1 \sim \dfrac{t^2}{2}$

donc par définition $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)-1}{\frac{t^2}{2}} = 1$ or $v_n \to 0$ d'après **11.b**

donc par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(v_n)-1}{\frac{v_n^2}{2}} = 1$ i.e. $\boxed{f(v_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{v_n^2}{2}}$

c. En déduire un équivalent de v_n quand n tend vers $+\infty$ *1,5 points*

Par défintion de v_n, $f(v_n) = \dfrac{n+1}{n}$ donc $f(v_n) - 1 = \dfrac{n+1-n}{n} = \dfrac{1}{n}$

donc d'après la question précédente $n \times \dfrac{v_n^2}{2} \to 1$

donc par continuité de la fonction racine carrée :

$\sqrt{n \times \dfrac{v_n^2}{2}} \to \sqrt{1}$ i.e. $\sqrt{\dfrac{n}{2}} v_n \to 1$ car $\sqrt{n \times \dfrac{v_n^2}{2}} = \sqrt{\dfrac{n}{2}}\sqrt{v_n^2} = \sqrt{\dfrac{n}{2}}|v_n| = \sqrt{\dfrac{n}{2}} v_n$ car $v_n \geqslant 0$

autrement dit $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ ou $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}$

d. A quelle condition sur le réel β la série $\sum v_n^\beta$ converge-t-elle ? *1 point*

D'après la question précédente $\sqrt{\dfrac{n}{2}} v_n \to 1$ donc par continuité de la fonction $x \mapsto x^\beta$, $\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}} v_n\right)^\beta \to 1^\beta$

or $\left(\sqrt{\dfrac{n}{2}} v_n\right)^\beta = \left(\dfrac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^\beta v_n^\beta = \dfrac{n^{\frac{\beta}{2}}}{2^{\frac{\beta}{2}}} v_n^\beta$ et $1^\beta = 1$ donc $v_n^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^{\frac{\beta}{2}}}{n^{\frac{\beta}{2}}}$

or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}$ est une série de Riemann, qui converge si et seulement $\dfrac{\beta}{2} > 1 \Leftrightarrow \beta > 2$

et il en va de même pour $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2^{\frac{\beta}{2}}}{n^{\frac{\beta}{2}}}$ par linéarité

cette série est à termes positif de même que $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ d'après **10.**, donc, par critère de comparaison sur les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ est de même nature que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2^{\frac{\beta}{2}}}{n^{\frac{\beta}{2}}}$

donc $\boxed{\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n \text{ converge si et seulemnet si } \beta > 2}$

Exercice 3 - Ecricome 2025

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

On note 0_3 la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Pour toute matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note E_C l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $CM + MC = 0_3$

1. Déterminer les ensembles E_{0_3} et E_{I_3} *1 point*

$\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), M \in E_{0_3} \Leftrightarrow 0_3 M + M 0_3 = 0_3 \Leftrightarrow 0_3 = 0_3$

ce qui est vérifié pour toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\boxed{E_{0_3} = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

$\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), M \in E_{I_3} \Leftrightarrow I_3M + MI_3 = 0_3 \Leftrightarrow 2M = 0_3 \Leftrightarrow M = 0_3$ donc $\boxed{E_{I_3} = \{0_3\}}$

2. Montrer que, pour toute matrice C de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble E_C est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

1,5 points

- $E_C \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$
- $0_3 \in E_C$ car $C0_3 + 0_3C = 0_3$
- soit $(M, M') \in (E_C)^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$C(\lambda M+M')+(\lambda M+M')C = \lambda CM+CM'+\lambda MC+M'C = \lambda(\underbrace{CM+MC}_{=0_3 \text{ car } M\in E_C})+(\underbrace{CM'+M'C}_{=0_3 \text{ car } M'\in E_C}) = \lambda 0_3+0_3 = 0_3$

donc $\boxed{E_C \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

3. Soit M une matrice de E_A, montrer que ${}^tM$ appartient à E_A *1 point*

On remarque d'abord que A est symétrique i.e. ${}^tA = A$
soit $M \in E_A$ alors $AM + MA = 0_3$ et donc ${}^t(AM + MA) = {}^t0_3 = 0_3$
donc par propriétés sur la transposition, ${}^t(AM)+{}^t(MA) = 0_3$ puis ${}^tM{}^tA+{}^tA{}^tM = 0_3$ et donc ${}^tMA+A{}^tM = 0_3$

c'est-à-dire ${}^tM \in E_A$, on a donc prouvé que $\boxed{\text{si } M \in E_A, \text{ alors } {}^tM \in E_A}$

4. **a.** Justifier que A est diagonalisable. *0,5 point*

A est symétrique donc diagonalisable.

b. Soit λ un réel. Montrer que si λ est valeur propre de A alors : $\lambda^3 - 9\lambda = 0$ *1 point*

L'énoncé nous invite à vérifier que le polynôme $x^3 - 9x$ est un polynôme annulateur de A

le calcul matriciel donne : $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 0 \\ -18 & 0 & 18 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$

on trouve bien $A^3 - 9A = 0_3$ donc $x^3 - 9x$ est un polynôme annulateur de A

$\boxed{\text{toute valeur propre } \lambda \text{ de } A}$ est donc racine de ce polynôme et $\boxed{\text{vérifie } \lambda^3 - 9\lambda = 0}$

c. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont classés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1, telles que $D = P^{-1}AP$ *7 points*

$\lambda^3 - 9\lambda = \lambda(\lambda^2 - 9) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3)$ a pour racines 0, -3 et 3
ce sont donc les valeurs propres potentielles de A

soit $X = {}^t(x, y, z) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ alors :
- $AX = -3X \Leftrightarrow (A + 3I)X = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 2x = 6x - 4x \\ z = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 0 = 0 \\ z = -2x \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

il existe des solutions non nulles donc $\boxed{-3 \text{ est bien valeur propre de } A \text{ et } \quad E_{-3}(A) = \text{Vect}\left({}^t(1, 2, -2)\right)}$

• $AX = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 0 \\ -2x + 2z & = & 0 \\ 2y - z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ x = z \\ z = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2y \\ z = 2y \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

donc, de même, $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } A \text{ et } \quad E_0(A) = \text{Vect}\left({}^t(2,1,2)\right)}$

• $AX = 3X \Leftrightarrow (A - 3I)X = 0$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -y \\ 2x = -3y + y \\ z = \dfrac{1}{2}y \end{array} \right. \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

donc, de même, 3 est valeur propre de A et $\quad E_3(A) = \text{Vect}\left({}^t\left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)\right) = \text{Vect}\left({}^t(-2,2,1)\right)$

on pose alors $\boxed{D = \text{diag}(-3,0,3) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$

P est bien inversible car elle contient en colonnes les vecteurs d'une base. En effet, ses trois colonnes sont trois des vecteurs trouvés précédemment, il s'agit de trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinces, ils forment donc une famille libre, de plus à 3 éléments dans $\mathscr{M}_{3,1}$ qui est un espace de dimension 3, c'est est donc une base.

enfin, on calcule $AP = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

donc $AP = PD$ et puisque P est inversible, on trouve $\boxed{P^{-1}AP = D}$

Dans toute la suite de l'exercice, D et P désignent les matrices introduites à la question **4.c.**

5. Calculer P^2. En déduire une expression de P^{-1} *1 point*

On calcule, $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 9I_3$ donc $P\left(\frac{1}{9}P\right) = I_3$

on en déduit que $P^{-1} = \dfrac{1}{9}P$

6. **a.** Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

Montrer que N appartient à E_D si, et seulement si, $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *1 point*

Avec les notations de l'énoncé : $\boxed{N \in E_D} \Leftrightarrow DN + ND = 0_3$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3a & 0 & 3c \\ -3d & 0 & 3f \\ -3g & 0 & 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 0 & 0 & 0 \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix} = 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6a & -3b & 0 \\ -3d & 0 & 3f \\ 0 & 3h & 6i \end{pmatrix} = 0_3$$

$\Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$ et $d = 0$ et $f = 0$ et $h = 0$ et $i = 0$ $\boxed{\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

b. En déduire une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E_D et préciser la dimension de E_D *1 point*

En notant $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ les matrices de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, d'après la question précédente $E_D = \text{Vect}\,(E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1})$ donc par définition du Vect, la famille $(E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1})$ est génératrice de E_D, de plus est elle est libre, car formée de trois vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ (une sous-famille d'une famille libre est libre),

$\boxed{(E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1}) \text{ est donc une base de } E_D}$ et on en déduit que $\boxed{\dim(E_D) = 3}$

7. **a.** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $N = P^{-1}MP$ *1 point*
Montrer que M appartient à E_A si, et seulement si, N appartient à E_D

Par définition, $\boxed{M \in E_A} \Leftrightarrow AM + MA = 0_3 \Leftrightarrow P^{-1}(AM + MA)P = 0_3$

$\Leftrightarrow P^{-1}AMP + P^{-1}MAP = 0_3$

$\Leftrightarrow P^{-1}APP^{-1}MP + P^{-1}MPP^{-1}AP = 0_3$ car $PP^{-1} = I_3$

$\Leftrightarrow DN + ND = 0_3 \Leftrightarrow \boxed{N \in E_D}$

b. En déduire une base de l'espace vectoriel E_A exprimée à l'aide de P et des matrices de $\mathscr{B}$ *2 points*

D'après la question précédente, $M \in E_A \Leftrightarrow N = P^{-1}MP \in E_D$
or d'après **6.b.** $N \in E_D \Leftrightarrow N \in \text{Vect}\,(E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1})$
et $N = P^{-1}MP \Rightarrow PNP^{-1} = PP^{-1}MPP^{-1}$ i.e. $M = PNP^{-1}$
donc $M \in E_A \Leftrightarrow M \in \text{Vect}\left(PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1}\right)$
i.e. $E_A = \text{Vect}\left(PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1}\right)$
de fait, par définition du Vect, $\left(PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1}\right)$ est une famille génératrice de E_A
de plus elle est libre car, pour $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ si $\lambda_1 PE_{1,3}P^{-1} + \lambda_2 PE_{2,2}P^{-1} + \lambda_3 PE_{3,1}P^{-1} = 0_3$ alors
en multipliant par P^{-1} à gauche puis P à droite, $\lambda_1 E_{1,3} + \lambda_2 E_{2,2} + \lambda_3 E_{3,1} = 0_3$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
puisque la famille $(E_{1,3}, E_{2,2}, E_{3,1})$ est libre

et donc $\boxed{\left(PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{3,1}P^{-1}\right) \text{ est une base de } E_A}$

8. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $(A + M)^2 = A^2 + M^2$ *1 point*
On ne cherchera pas à expliciter les coefficients de M

Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors
$(A + M)^2 = A^2 + M^2 \Leftrightarrow A^2 + AM + MA + M^2 = A^2 + M^2 \Leftrightarrow AM + MA = 0_3 \Leftrightarrow M \in E_A$
donc $\boxed{E_A \text{ est l'ensemble des matrices vérifiant } (A + M)^2 = A^2 + M^2}$

Exercice 4

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$

Partie I : tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T

2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$

Partie II : tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z. la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1
Pour tout entier naturel non nul i, on note :
B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

3. Avec Python,

a. Compléter la fonction `simulXYZ` qui simule l'expérience et renvoie les valeurs de X, Y et Z

```
def SimulXYZ(p):
  x=0, y=0,z=0
  while ... :
    if ... :
      ...
    else :
      ...
  return ...
```

b. Ecrire un programme qui effectue 10 000 simulations de la variable X et qui en fait la moyenne, comment interpréter le résultat ?

4. **a.** Montrer, pour tout entier $k \geqslant 2$: $P(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$

b. Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(X = k) = 1$

c. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$

5. **a.** Pour tout entier $k \geqslant 2$, déterminer $P((X = k) \cap (Y = 1))$
(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geqslant 3$)

b. En déduire : $P(Y = 1) = q(1 + p)$

c. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$

6. Donner la loi de Z et son espérance.

7. Montrer que les variables aléatoires Y Z et $X - 1$ sont égales.

8. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\mathrm{cov}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$