# Matrices, matrices diagonalisables et algorithme du pivot de Gauss

Code de partage avec Capytale : 0ac6-7821270

**On utilisera les bibliothèques suivantes :**

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
```

**Exercice 1** - opérations usuelles sur les matrices

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Définir $A$ avec Python.
2. Avec Python, calculer $A^2$, $A^3$ puis montrer que $A^3 = 4A^2 - A - 6I_3$
3. Déterminer $A^{-1}$ en fonction de $I_3$, $A$ et $A^2$
   Vérifier le résultat avec Python.
4. Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   Montrer que $P$ est inversible et avec Python calculer $P^{-1}AP$
   Que peut-on en déduire ?
5. Tester la commande `al.eig(A)`, comment interpréter le résultat ?

**Exercice 2**

On considère le graphe $G$ de sommets $(0, 1, 2, 3, 4)$ et de liste d'adjacence :

$$L = [[1, 2, 4], [0, 2, 3, 4], [0, 1, 3, 4], [1, 2], [0, 1, 2]]$$

1. Ecrire un programme qui permet de remplir la matrice d'adjacence $A$ à partir de `L`. Justifier que $A$ est diagonalisable.
2. Soit $D = \text{diag}(d_0, \dots d_4)$ la matrice diagonale où l'élément $d_i$ en ligne $i$ et colonne $i$ vaut le degré de $i$ dans le graphe $G$
   Ecrire un programme qui permet de remplir la matrice $D$
3. Soit $M = D - A$
   (a) Justifier que $M$ est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $M$
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de $M$

**Exercice 3** - algorithme du pivot de Gauss

1. Opération $L_i \leftrightarrow L_j$
   Ecrire une fonction `Echange(A, i, j)` renvoyant la matrice $A$ avec les lignes $i$ et $j$ échangées.
2. Opération $L_i \leftarrow L_i + aL_j$
   Ecrire une fonction `Elimine(A, i, j, a)` renvoyant la matrice $A$ après l'opération $L_i \leftarrow L_i + aL_j$
3. Opération $L_i \leftarrow aL_i$
   Ecrire une fonction `mult(A, i, a)` renvoyant la matrice $A$ après l'opération $L_i \leftarrow aL_i$
4. Utiliser pas-à-pas les fonctions précédentes pour inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
   On utilisera les opérations sur les lignes avec la matrice suivante :
   $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   On placera l'inverse de $A$ dans une matrice `B` et on vérifiera le résultat.