Exercice 1

1. Montrer que, pour $x \in [0,1[$, $\quad \ln(1-x)+x \leqslant 0$

2. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\quad \exp(x) \geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}$

Indication : poser $f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$ et étudier les variations de f' sur $\mathbb{R}_+$

3. Soit $x \in]0,1[$. Montrer que, pour tout $t \in [0,x]$, $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$

Exercice 2

1. Montrer que l'équation $xe^x = 2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$

2. Soit $f : x \longmapsto -\ln(1-x)$

- **a.** Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f
- **b.** Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}$
- **c.** Montrer que f est bijective.
- **d.** Pour $y \in f(\mathscr{D})$, déterminer $f^{-1}(y)$

3. (Edhec) Soit $f : x \longmapsto x^3-9x^2-27x+53$
Déterminer les variations de f
Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement trois solutions réelles x_1, x_2, x_3 telles que $x_1 < 0 < x_2 < 3 < x_3$

Exercice 3

Dériver deux fois les fonctions suivantes, en précisant (et justifiant) l'intervalle de validité :

1. $x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ **2.** $x \longmapsto \ln(1+x^2)$ **3.** $x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$

Exercice 4

Montrer que les fonctions suivantes ont un point d'inflexion et le déterminer :

1. $f : x \longmapsto e^x - x^2$ **2.** $g : x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$

Exercice 5

Soit $f : x \longmapsto e^x + x^5$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g = f''$ sa dérivée seconde.
Etudier les variations de g. En déduire que f admet un et un seul point d'inflexion (on ne demande pas de le déterminer explicitement).

Exercice 6

Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Exercice 7

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes (préciser les intervalles de validité) :

1. $x \longmapsto (1+x)^{1/x}$ **2.** $x \longmapsto x^{\ln(x)}$

Exercice 8

1. Montrer par récurrence que, pour n ($n \geqslant 2$) réels $x_1, \ldots x_n$:

$$|x_1 + x_2 + \ldots x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \ldots |x_n|$$

2. Montrer que, pout tout couple de réels (x, y) : $\Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x - y|$

Remarque. On a aussi : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big||x| - |y|\Big| \leqslant |x + y|$

Exercice 9

On pose, pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = -\ln(1 - x)$ et $g(x) = f(x) - \lfloor f(x) \rfloor$

1. Déterminer les variations de f. Préciser sa limite en 1

2. Justifier que f est bijective de $[0, 1[$ vers un intervalle J à préciser et déterminer $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$

3. Justifier que, pour tout $x \in [0, 1[$, $g(x) \in [0, 1[$

4. Soit $\alpha \in [0, 1[$. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $g(x) \leqslant \alpha$ (*difficile*)

5. On rappelle que la commande `rd.rand(n)` renvoie un tableau à n colonnes contenant des nombres choisis aléatoirement entre 0 et 1
Que fait le programme Python ci-contre ?

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd
Y=-np.log(1-rd.rand(1000))
Z=Y-np.floor(Y)
L=0
for z in Z:
  if z<= 0.5:
  L=L+1
print(L/1000)
```

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad f(x) = \begin{cases} x - 1 + (1 - x)\ln(1 - x) & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.

2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer $f'(x)$ pour $x < 1$

3. En déduire les variations de f

4. La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

5. Déterminer la limite de f en $-\infty$

6. Etudier la convexité de f

7. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
Donner la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 1
Tracer l'allure de $\mathscr{C}_f$ sous Python (on donnera le script).

8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions 1 et α vérifiant $-2 < \alpha < 0$

9. On souhaite trouver une valeur approchée de α à 10^{-p} près, p étant un entier supérieur ou égal à 3
Compléter le programme Python ci-contre permettant de répondre à la question.

```python
import numpy as np
def f(x):
  ...
  ...
  ...
  ...

def ValeurApprochee(p):
  a=-2
  b=0
  while ...
    m=(a+b)/2
    if f(m)>0:
      ...
    else:
      ...
  return m

print(ValeurApprochee(3))
```