Test 14 Corrigé 04/03/24

1 – Calculer la somme des séries suivantes

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n(n-1)\,e^{-n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{2^k}{(k+1)!}$ (f) $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}$

2 – Étudier la nature des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{1+\frac{1}{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} 2^{n-3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 4}\frac{1}{2}$ (d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1000^n}{n!}$

3 – Soit $\begin{cases} u_0 = 1/2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ (a) Montrer que : $\forall n\geq 0 \quad u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

4* – Soit $(u_n)\geq 0$ telle que $\sum u_n$ converge.

Nature de $\sum u_n^3$ et $\sum e^{u_n}$.

1_ a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{15}{4}}$

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)e^{-n} = e^{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)e^{-n-2} = e^{2}\frac{2}{(1-e^{-1})^3}$.

d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \boxed{e^{1}-2}$

e) $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{k!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \boxed{\frac{1}{2}(e^2-1)}$

f) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \boxed{e^{-1}}$.

2_ a) Comme $e^{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1} \neq 0$: $\sum e^{1+\frac{1}{n}}$ diverge

b) Comme $2^{n-3} \longrightarrow +\infty \neq 0$ $\sum 2^{n-3}$ diverge.

c) Comme $\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \neq 0$ $\sum \frac{1}{2}$ diverge

d) $\sum \frac{1000^n}{n!}$ converge car c'est une série exponentielle.

3_ a) Par récurrence prouvons $P(n) =$ " $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ " pour tout $n \geq 1$.

- $u_1 = \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1$ $P(1)$ est vrai
- Si $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on a $0 \leq u_n^2 \leq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$

donc $0 \leq u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

or $\underset{\text{car } n \geq 1}{2n \geq n+1}$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

donc $P(n+1)$ est vrai

b) Comme $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$,

on a $\sum u_n$ converge

Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\frac{1}{u_n} \longrightarrow +\infty$ (car $u_n > 0$)

donc $\sum \frac{1}{u_n}$ diverge.

4- Comme $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- Ainsi à partir d'un rang n_0, $0 \leq u_n \leq 1$, donc $0 \leq u_n^3 \leq u_n^2 \leq u_n$.

  Or $\sum u_n$ converge donc $\sum u_n^3$ converge aussi.

- $\lim_{n\to+\infty} e^{u_n} = e^0 = 1 \neq 0$ donc $\sum e^{u_n}$ diverge.