TD : Probabilité en univers infini

1. On lance un dé équilibré à 6 faces une infinité de fois. On pose, pour tout entier n, l'événement A_n = "on obtient le numéro 6 au lancer numéro n". On définit alors les événements suivants :
   — A = "On n'obtient jamais le numéro 6"
   — B = "On obtient tout le temps le numéro 6"
   — C = "On obtient au moins une fois le numéro 6"
   — D = "On obtient une seule fois le numéro 6"

   (a) Exprimer les événements A, B, C et D à l'aide des événements $(A_n)_{n\geq 0}$ et des opérations ensemblistes.
   (b) Calculer la probabilité des événements A, B, C et D.

2. On lance une pièce une infinité de fois, la probabilité d'obtenir Pile vaut p $\in]0,1[$. On pose, pour tout entier i, F_i l'événement « on obtient Face au ième lancer».
   (a) Calculer, pour tout entier naturel n, $P(A_n)$ où A_n = « on obtient le premier Pile au nième lancer».
   (b) Calculer la probabilité de ne jamais obtenir pile.
   (c) Étudier la série de terme général $nP(A_n)$. Calculer sa somme. A quoi correspond cette valeur ?

3. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On pourra reprendre les notations de l'exercice 2.
   (a) Calculer la probabilité de C = « obtenir pile pour la première fois lors d'un lancer pair»
   (b) Calculer la probabilité de D = «pile pour la première fois lors d'un lancer multiple de 3 »
   (c) Calculer la probabilité de E = « pile pour la première fois lors d'un lancer multiple de 4 »
   (d) Les événements C et D sont-ils indépendants ? C et E ?
   (e) On note A_n = "On obtient pile pour la deuxième fois lors du lancer numéro n"

4. Deux joueurs A et B disposent d'un dé et jouent au jeu suivant : A joue le premier et jette le dé : - S'il obtient 1, A est déclaré gagnant et le jeu s'arrête. - S'il obtient 4,5 ou 6, le jeu s'arrête et il n'y a aucun gagnant. - S'il obtient 2 ou 3 il passe le dé à B. B lance alors le dé : - S'il obtient 1,2 ou 3, B est déclaré gagnant et le jeu s'arrête. - S'il obtient 6, le jeu s'arrête et il n'y a aucun gagnant. - S'il obtient 4 ou 5 , il passe le dé à A. Et ainsi de suite ...
   (a) Calculer la probabilité que A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ lancer $(n \geq 0)$.
   (b) Calculer la probabilité que A soit déclaré gagnant.
   (c) Calculer la probabilité que B soit déclaré gagnant.
   (d) Calculer la probabilité que le jeu s'arrête sans vainqueur. Puis celle que le jeu ne s'arrête pas.

5. On admet le résultat suivant :$\forall x \in]-1,1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

   On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce : - Si on obtient Pile alors on tire une boule au hasard dans l'urne et on arrête les lancers ; - Si on obtient Face alors on ajoute une boule noire dans l'urne et on continue les lancers.
   (a) Prouver que cette expérience se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de lancers.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

6. On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un Pile. Si on a dû faire k lancers pour obtenir ce premier Pile, on effectue ensuite un tirage dans une urne contenant k boules numérotées de 1 à k. On note A_n = «on obtient le premier Pile au nième lancer». Et B_i = « on tire le numéro i dans l'urne», pour n et i des entiers naturels.
   (a) Donner la valeur $\mathrm{P}(\mathrm{A}_n)$ sans justification.
   (b) Déterminer la valeur de $P_{A_n}(B_i)$ lorsque i > n et lorsque i $\leq n$.
   (c) On admet que la suite des événements A_n forme un système complet d'événement. En déduire la probabilité de B_i.
   (d) Étudier la nature de la série de terme général $nP(B_n)$. En cas de convergence donner la valeur de la somme de cette série.