Jacques Decour

Compléments : Probabilité en univers infini

Un tirage - Issu Oral HEC voie Technologique

On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant 2 boules blanches et une boule noire, jusqu'à l'obtention d'une noire et d'une blanche. On note $A_k =$ 'on a effectué k tirages".

1 Calculer la probabilité de A_k pour $\mathrm{k} = 1{,}2$ et 3.
2 Calculer la probabilité de A_k pour $\mathrm{k} > 3$, en utilisant le système complet (N_1, B_1).
3 Calculer la somme de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k)$. Interpréter le résultat.
4 Calculer la somme de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} kP(A_k)$.

Un jeu de lancer de fléchette

Bob débute aux fléchettes. Il effectue des lancers successifs d'une fléchette.

- Lorsqu'il manque la cible, la probabilité qu'il manque la cible au lancer suivant est égale à $4/5$.
- Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne la cible au lancer suivant vaut $1/3$.
- Au premier lancer, il a autant de chance d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons A_n: « Bob touche la cible au n-ième lancer » et $u_n = \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{2}{15} u_n + \frac{1}{5}$ à l'aide du système complet d'événement $(A_1, \overline{A_1})$.
3. En déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Préciser la limite.

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soient $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$.
Bob teste un nouveau jeu d'argent. À chaque tour, ce dernier a une probabilité p de gagner 1 euro et une probabilité $q = 1 - p$ de perdre un euro. On suppose le jeu déséquilibré (c'est-à-dire $p \neq \frac{1}{2}$). Le jeu s'arrête soit lorsque que Bob possède la somme de N euros, soit lorsqu'il ne possède plus rien.
Au départ, Bob dispose d'une somme de n euros avec $n \in [[0;\mathrm{N}]]$ et on note G_n l'événement « Bob a N euros et gagne la partie à partir d'une mise initiale de n euros ».

1. Préciser $\mathbf{P}(\mathrm{G}_0)$ et $\mathbf{P}(G_N)$?
2. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A, \bar{A})$ où A est l'événement "le joueur gagne un euro à la première étape" établir que : $\forall n \in [[1; \mathrm{N}-1]], \mathbf{P}(\mathrm{G}_n) = p \cdot \mathbf{P}(\mathrm{G}_{n+1}) + q \cdot \mathbf{P}(\mathrm{G}_{n-1})$
3. Reconnaître une suite linéaire récurrente d'ordre 2 pour justifier que
$$\forall n \in [0, \mathrm{N}], \mathbf{P}(\mathrm{G}_n) = \frac{1 - (q/p)^n}{1 - (q/p)^{\mathrm{N}}}$$
4. À n fixé, donner la limite de $\mathbf{P}(\mathrm{G}_n)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Jacques Decour

Une chaîne de Markov

Un robot se déplace par sauts successifs sur les sommets A, B, C et D d'un carré. Au temps $t = 0$, ce dernier se situe sur le sommet A.
À chaque seconde, il se déplace sur les autres sommets de façon équiprobable. On note A_n (respectivement B_n, C_n et D_n) l'événement « le robot se situe en A à la n-ième seconde » (resp. en B, C et D).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, donner une relation simple entre $\mathbf{P}(\mathrm{A}_{n+1})$ et $\mathbf{P}(\mathrm{B}_n)$, $\mathbf{P}(\mathrm{C}_n)$ et $\mathbf{P}(\mathrm{D}_n)$, en utilisant la formule des probabilités totales.
2. En déduire $\mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$
3. Préciser $\mathbf{P}(\mathrm{B}_n)$, $\mathbf{P}(\mathrm{C}_n)$ et $\mathbf{P}(\mathrm{D}_n)$.

Une autre chaîne de Markov

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0$ et n $= 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}. On utilisera le système complet d'événement $\big((A_n), (B_n), (C_n)\ \big)$.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$
En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer les limites respectives des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n).