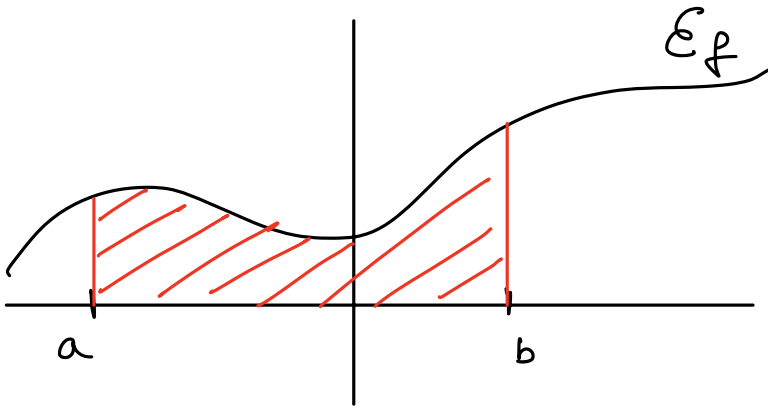


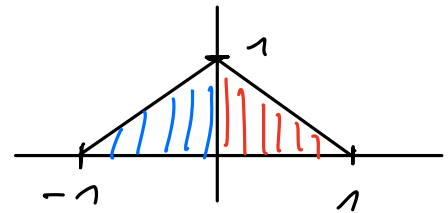
Intégration sur un segment

1. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un segment.

Définition: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et positive sur un segment $[a, b]$. On appelle intégrale de f entre a et b l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$. On la note $\int_a^b f(t) dt$ (la variable t est muette, on peut mettre x , u , z etc.).



exemple: Soit $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

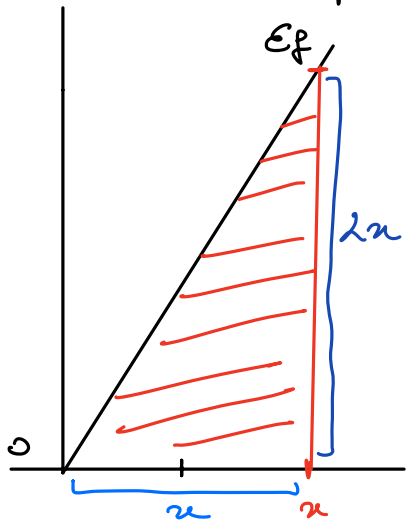


On peut calculer géométriquement: $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Théorème: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$. La fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet pour dérivée f .

Remarque: On appelle ce théorème, théorème fondamental de l'analyse, en tant qu'il établit un lien entre la notion de dérivée et d'aire.

Vérifions le sur un exemple simple. Prenons $f(t) = 2t$ et $a = 0$.



$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2.$$

On retrouve bien $F'(x) = 2x = f(x)$.

Il s'agit maintenant de répondre aux questions suivantes :

- Peut-on toujours trouver une fonction F telle que $F' = f$, une dérivée à l'inverse ?
- S'il en existe, qu'ont-elles en commun ?
- Comment les utiliser pour calculer des intégrales ?

2 - Primitives

Definition: Soit $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur I est un intervalle.

On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et :

$$F' = f$$

exemple: La fonction $f(x) = e^{-x} + x$ sur $\mathbb{R}$ admet :

$$F_1(x) = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} \text{ et } F_2(x) = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} + 1 \text{ comme primitives sur } \mathbb{R}.$$

Remarque: • Pour chercher une primitive de $f(x) + g(x)$, on cherche une primitive F de f et G de g , car par linéarité de la dérivée, $F + G$ est une primitive de

$f+g$. On ne peut bien sûr pas procéder de même pour une primitive de $f(x) \cdot g(x)$.

• En général, il est difficile de trouver des primitives.

Proposition: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle. Soient F_1 et F_2 deux primitives de f sur I , alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que:
 $\forall x \in I, F_1(x) - F_2(x) = C$.

Preuve: $F_1 - F_2$ a pour dérivée $f - f = 0$ sur l'intervalle I , donc $F_1 - F_2$ est constante sur I c-à-d qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel: $\forall x \in \mathbb{R} F_1(x) - F_2(x) = C$.

• Les primitives d'une fonction sont donc toutes égales, à une constante près.

Proposition: Soit f continue sur un intervalle I .

I existe une primitive F de f sur I .

Remarque: F est donc automatiquement de classe C^1 sur I .

• Ce résultat ne donne aucune information sur l'expression de F .

Pour calculer des primitives, il faut connaître les formules de dérivation et

garder en tête que : • si F est une primitive de f , αF en est une de αf , où $\alpha \in \mathbb{R}$.

• si F et G sont des primitives de f et g , $F + G$ en est une de $f + g$

• Les primitives des fonctions usuelles.

fonction $f(x)$	primitive F de f	intervalle de définition
$x^\alpha, \alpha \geq 0$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$\frac{1}{x^\alpha}, \alpha \geq 2$	$-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$	$] -\infty, 0[$ ou $] 0, +\infty[$
$e^{\alpha x}, \alpha \neq 0$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$

• Les primitives de fonctions composées.

u est une fonction	primitive	intervalle de définition
$u' u^m, m \neq -1$	$\frac{u^{m+1}}{m+1}$	D_u
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	D_u
$u' e^u$	e^u	D_u

3 - Intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition: Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, $a < b$.

On définit, étant donnée F une primitive de f sur I , l'intégrale de f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Remarque: Comme les primitives ne diffèrent que d'une constante, le choix de F ne change pas la valeur de $\int_a^b f(t) dt$.

exemple: $\int_0^1 x^{10} dx = \left[\frac{x^{11}}{11} \right]_0^1 = \frac{1}{11}$; $\int_0^2 e^{-3x} dx = \left[\frac{e^{-3x}}{-3} \right]_0^2 = \frac{1 - e^{-6}}{3}$.

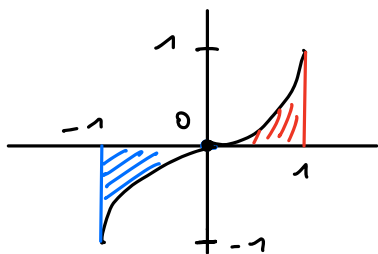
$$\int_1^2 \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln|x| \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 2 \ln 1 = 2 \ln 2.$$

Remarque: On donne ici une nouvelle définition de l'intégrale pour les fonctions non nécessairement positives. Il y a toujours un lien avec l'aire:

il faut compter positivement l'aire là où $f \geq 0$ et négativement là où $f \leq 0$.

exemple: soit $f(x) = x^3$. On sait que f est impaire donc:

selon cette remarque $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.



Un calcul de primitive donne bien:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0.$$

• D'après le théorème fondamental de l'analyse, cette définition de l'intégrale est compatible avec celle donnée dans la partie 1 pour les fonctions positives.

Propriétés : Soient f et g continues sur $[a, b]$ avec $a \leq b$ des réels.

- $\int_a^b f(t) + g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$] Linéarité de
- Pour tout réel α : $\int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \cdot \int_a^b f(t) dt$] l'intégrale.
- Pour tout $c \in [a, b]$: $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$] Relation de Chasles
- Si f est positive sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$] Positivité de l'intégrale
- Si : $\forall t \in [a, b] \quad f(t) \geq g(t)$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$] Croissance de l'intégrale
- $|\int_a^b f(t) dt| \leq \int_a^b |f(t)| dt$] Inégalité triangulaire.

Preuve : On va considérer F et G des primitives de f et g (elles existent car f et g sont continues) sur $[a, b]$.

- $\int_a^b f(t) + g(t) dt = [F(t) + G(t)]_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a))$
 $= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$.
- $\int_a^b \alpha f(t) dt = [\alpha F(t)]_a^b = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha (F(b) - F(a)) = \alpha \int_a^b f(t) dt$
- $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$.
- Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(t) dt$ est aussi donc positive. On peut aussi remarquer que :
 si $f \geq 0$ alors F est croissante (car $F' \leq f$) donc $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \geq 0$, car $b \geq a$.
- Si : $\forall t \in [a, b] \quad f(t) \geq g(t)$, $f(t) - g(t) \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale :
 $\int_a^b f(t) - g(t) dt \geq 0$, puis par linéarité :
 $\int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt \geq 0$.
- On a toujours : $\forall t \in [a, b] \quad -|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$, donc par croissance de l'intégrale :
 $\int_a^b -|f(t)| dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$

$$\text{donc } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

Proposition: Soit f une fonction positive et continue sur $[a, b]$,
 et $\int_a^b f(t) dt = 0$ alors pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) = 0$.

Preuve: Soit $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. On sait que $F' = f$ (théorème fondamental)

On a toujours $F(a) = 0$ et on suppose que $F(b) = 0$.

Comme $f \geq 0$, F est croissante sur $[a, b]$, donc F est nulle sur $[a, b]$, donc
 f est aussi nulle (car $f = F'$).

Proposition: Soit f continue sur $[a, b]$. La fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$
 est l'unique primitive de f vérifiant $F(a) = 0$.

Quelques remarques:

- Si $a \leq b$, on peut écrire $\int_b^a f(t) dt$, on dit que $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$.
 par exemple $\int_1^0 f(t) dt = - \int_0^1 f(t) dt$.
- On peut aussi écrire $\int_a^a f(t) dt$, cette intégrale est nulle.

4- Techniques de calcul d'intégrales.

Théorème (Intégration par parties):

Étant données deux fonctions f et g de classe C^1 sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t) g(t) dt = [f(t) g(t)]_a^b - \int_a^b f(t) g'(t) dt$$

Méthode pratique:

exemple 1: Calculer $\int_1^e \underbrace{t^2}_{f'(t)} \underbrace{\ln t}_{g(t)} dt$

On pose $\left\{ \begin{array}{l} f(t) = \frac{t^2}{2} \\ g(t) = \ln t \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f'(t) = t \\ g'(t) = \frac{1}{t} \end{array} \quad f, g \text{ sont } C^1 \text{ sur } [1, e].$

par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_1^e t \ln t dt &= \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1^2}{2} \ln 1 - \int_1^e \frac{t}{2} dt = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^e \\ &= \frac{e^2 + 1}{2}. \end{aligned}$$

exemple 2: Calculer $\int_0^1 t e^t dt$

On pose $\left\{ \begin{array}{l} f(t) = e^t \\ g(t) = t \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} f'(t) = e^t \\ g'(t) = 1 \end{array} \quad f, g \text{ sont } C^1 \text{ sur } [1, e].$

Puis on calcule ...

Théorème (changement de variable):

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $\varphi: J \rightarrow I$ de classe C^1 , a et $b \in J$. On a:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

Preuve: Rappelons que $(f \circ \varphi)'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ (dérivée d'une composée), ainsi:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= [f \circ \varphi(t)]_a^b = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \\ &= [f(u)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du. \end{aligned}$$

Méthode pratique: . Calculons $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt$

• Posons le changement : $u = e^t$. ↖ on dérive des deux côtés et on égale du et dt

Le changement est C^1 de $[0, 1]$ dans $[e^0, e^1] = [1, e]$ et $du = e^t dt$

Ainsi: $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{e^t + 1} dt = \int_1^e \frac{e^t - 1}{e^t + 1} \frac{e^t}{e^t} dt = \int_1^e \frac{u - 1}{(u + 1)u} du$.

on fait apparaître $e^t dt$ on remplace tout

Le changement est terminé. On calcule $\int_1^e \frac{u-1}{(u+1)u} du$ en utilisant une autre méthode (voir ci-dessous).

• Calculons $\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t)^3} dt$

• Posons le changement $u = 1 + t$

Le changement est C^1 de $[0, 1]$ dans $[1+0, 1+1] = [1, 2]$ et $du = dt$

Ainsi: $\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t)^3} dt = \int_1^2 \frac{(u-1)^3}{u^3} du = \int_1^2 \frac{u^3 - 3u^2 + 3u - 1}{u^3} du$

$$\begin{aligned} &= \int_1^2 \left(1 - \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} - \frac{1}{u^3} \right) du = \left[u - 3 \ln u - \frac{3}{u} + \frac{1}{2u^2} \right]_1^2 \\ &= 2 - 3 \ln 2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \left(1 - 3 \ln 1 - 3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{23}{8} - 3 \ln 2. \end{aligned}$$

• Proposition: Soit $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[-a, a]$, $a \geq 0$.

• Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$

• Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.

Preuve: • Soit f impaire. Nous le changeant $u = -t$, le changement est de classe C^1 de $[0, a]$ dans $[0, -a]$ et $du = -dt$, donc:

$$\int_0^a f(t) dt = \int_0^{-a} f(-u) (-du) = \int_0^{-a} f(-u) du, \quad f \text{ est impaire}$$

$$= \int_0^{-a} -f(u) du$$

Ainsi: $\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$ par Chasles

$$= 0 \text{ d'après l'égalité obtenue avec le changement de variable.}$$

• Soit f pair. On procède au même changement $u = -t$...

• Méthode pour les fonctions définies par une intégrale:

• Pour étudier une fonction du type $G: x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$,

par exemple: $G: x \mapsto \int_x^{x^2} (\ln t)^2 dt$ où $x > 0$.

Si on veut montrer que G est dérivable et la dériver on procède en deux étapes:

• $t \mapsto (\ln t)^2$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc elle y admet une primitive, qu'on va noter F , de classe C^1 sur $]0, +\infty[$

• On écrit $G(x) = \int_x^{x^2} (\ln t)^2 dt = [F(t)]_x^{x^2} = F(x^2) - F(x)$

Ainsi par composition de fonctions C^1 , G est C^1 sur $]0, +\infty[$ et:

$$\forall x > 0 \quad G'(x) = 2x F'(x^2) - F'(x) = 2x (\ln x^2)^2 - (\ln x)^2$$

car F primitive de $t \mapsto (ln t)^2$.

⚠ On a dérivé une fonction $(F(x'))' = 2ln F'(x')$ ($u(v(x))' = v'(x)u'(v(x))$)

• Méthode pour étudier la limite d'une suite définie par une intégrale :

Prenons, pour $m \geq 1$, la suite $I_m = \int_0^1 t^m e^t dt$

Montrons que $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = 0$ sans calculer explicitement I_m (on n'a pas de primitive connue de $t \mapsto t^m e^t$)

Pour cela on va encadrer l'intégrande :

pour $t \in [0, 1]$: $e^t \leq e^1$

comme $t^m \geq 0$, on a $t^m e^t \leq t^m e^1$

par croissance de l'intégrale sur $[0, 1]$: $\int_0^1 t^m e^t dt \leq \int_0^1 t^m e^1 dt$

donc on a : $I_m \leq \left[\frac{t^{m+1}}{m+1} e^1 \right]_0^1 = \frac{e^1}{m+1}$.

Remarquons que, sur $[0, 1]$ $t^m e^t \geq 0$, donc par positivité $I_m \geq 0$.

Donc : $0 \leq I_m \leq \frac{e^1}{m+1}$, et ce pour tout $m \geq 1$.

Par théorème d'encadrement, comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{e^1}{m+1} = 0$ $\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = 0$.

L'idée est de majorer l'intégrande par une autre fonction de sorte que :

- on puisse calculer la nouvelle intégrale à l'aide d'une primitive.
- la nouvelle intégrale dépend toujours de m .