

## TD : Primitives

## Exercice 1 - Fractions rationnelles

Déterminer une primitive des fonctions suivantes en donnant un intervalle de définition.

- 1)  $f(x) = \frac{1}{(2x+5)^6}$    2)  $f(x) = \frac{6x}{(x^2+1)}$    3)  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+3}$    4)  $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$   
 5)  $f(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4}$    6)  $f(x) = \frac{5x^2+3x+1}{x}$    7)  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$  (On écrira  $f(x) = ax + \frac{bx}{1+x^2}$ )  
 8)  $f(x) = \frac{x^2+5x-1}{x-3}$    9)  $f(x) = \frac{(2x+5)^2}{(x+1)^2}$ . (Écrire  $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ )

## Exercice 2 - Dérivées de fonctions composées

Déterminer une primitive des fonctions suivantes en donnant un intervalle de définition.

- 1)  $f(x) = (3x+1)^5$    2)  $f(x) = \frac{5}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$    3)  $f(x) = \frac{e^{x+2}}{e^{x+1}}$    4)  $f(x) = \frac{1}{x}(\ln 2x)^2$   
 5)  $f(x) = \frac{-5x}{\sqrt{x^2+1}}$    6)  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \times e^{\frac{2x+1}{x+1}}$    7)  $f(x) = e^{3x+1}$

## Exercice 3 - Un peu de tout

Déterminer une primitive des fonctions suivantes en précisant rapidement un intervalle de définition.

- 1)  $f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{1}{x} + \frac{7}{x^3}$    2)  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$    3)  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$    4)  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$   
 5)  $f(x) = 20xe^{x^2+5}$    6)  $f(x) = \frac{1}{4x+3}$    7)  $f(x) = x^2e^{x^3}$    8)  $f(x) = \frac{x^4}{x^5+1}$    9)  $f(x) = \frac{-e^x}{\sqrt{e^x+5}}$   
 10)  $f(x) = x^7(x^8-1)^6$    11)  $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^6}$    12)  $f(x) = \frac{1}{x}(2+\ln x)^4$   
 13)  $f(x) = (x-3)(x-4)$    14)  $f(x) = (3x+1)(3x^2+2x)$    15)  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

## Exercice 4 - Densité de probabilité

Calculer la primitive des fonctions suivantes dont la limite en  $+\infty$  vaut 1.

- 1) (Loi exponentielle) :  $f(x) = e^{-\lambda x}$  sur  $\mathbf{R}^+$  où  $\lambda$  est un réel.  
 2) (Loi de Gumbel) :  $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$   
 3) (Loi Logistique) :  $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$   
 4) (Loi de Pareto) :  $f(x) = k \frac{x^k}{x^{k+1}}$  où  $k$  est un entier naturel et  $x_m$  un réel strictement positif.

## Exercice 5 - Plus délicat \*

Chercher une primitive pour chaque fonction sur leurs domaines de continuité :

- 1)  $f(x) = |x|$    2)  $f(x) = \ln(x)$    3)  $f(x) = \ln(x^3)$    4)  $f(x) = x \ln(x)$   
 5)  $f(x) = xe^x$    6)  $f(x) = x^2e^x$    7)  $f(x) = x^n e^x$  où  $n$  est un entier naturel.

## Exercice 6 - Parité, limites \*

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbf{R}$ . On note  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbf{R}$

1. Montrer que si  $f$  est impaire alors  $F$  est paire.
2. Si  $f$  est paire, à quelle condition  $F$  est-elle impaire ?
3. Si  $f$  admet une limite finie en  $+\infty$ ,  $F$  admet-elle une limite finie en  $+\infty$  ?