TD : Intégration sur un segment *

Exercice 1 : La fonction arctan

Soit la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$. On admet que $F(1)=\frac{\pi}{4}$.

1. Justifier l'ensemble de définition de F. Déterminer le signe de $F(x)$, ainsi que les variations de F.
2. Montrer, en utilisant le changement de variable t $=-$u, que F est impaire.
3. On pose $\forall x>0, G(x)=F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que G est une fonction constante. Déterminer cette constante.
4. En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5. Déterminer $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.
6. Étudier la convexité de F.
7. Tracer C_F en faisant apparaître la tangente au point d'abscisse 0 .

Exercice 2 : Comparaison série intégrale

Soit la fonction f définie sur $[2;+\infty[$par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.. On pose $\forall n\in\mathbf{N}^*\backslash\{1\}, I_n=\int_2^n f(x)dx$ et $\forall n\in\mathbf{N}^*\backslash\{1\}, S_n=\sum_{i=2}^n f(i)$.

1. Montrer que $\forall x\geq 2, \frac{1}{x}\leq f(x)$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Montrer que F est une primitive de f. En déduire I_n.
4. Montrer que $I_{n+1}\leq S_n$, en déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 2 bis : Comparaison série intégrale

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}$ Soit la suite définie par :
$\forall n\in\mathbf{N}^*\backslash\{1\}, S_n=\sum_{i=2}^n f(i)$.

1. Étudier les variations de f et en déduire un encadrement de $\int_k^{k+1} f(x)dx$ avec $k\in\mathbf{N}^*\backslash\{1\}$.
2. Étudier la monotonie de (Sn).
3. On pose pour tout $n\geq 2, I_n=\int_2^n f(x)dx$. Montrer que : $S_n-\frac{\ln 2}{4}\leq I_n\leq S_n-\frac{\ln n}{n^2}$
4. Calculer I_n, en déduire que la suite (Sn) converge.
5. Montrer que sa limite l vérifie : $l\in\left[\frac{1+\ln 2}{2};\frac{2+3\ln 2}{4}\right]$.

Exercice 3 : Suite d'intégrale

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$.

1. Calculer I_0.
2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2(n+1)+3}I_n$.
3. Calculer une expression explicite de I_n.

Exercice 4 : Intégrale à paramètre

Pour $x\in\mathbf{R}$, on pose $\varphi(x)=\int_1^e \frac{\ln(t)}{1+x^2t^2}dt$.

1. Justifier que φ est bien définie sur $\mathbf{R}$. Montrer que φ est strictement positive, et que φ est paire en procédant à un changement de variable affine.
2. Montrer que : $\forall x,x_0\in\mathbf{R}, |\varphi(x)-\varphi(x_0)|\leqslant\left|x^2-x_0^2\right|\int_1^e t^2\ln(t)dt$. En déduire que φ est continue sur $\mathbf{R}$.
3. Montrer que φ est dérivable en 0 , et préciser la valeur de $\varphi'(0)$.
4. Soit $x\in\mathbf{R}_+^*$. En effectuant le changement de variable $u=xt$ dans l'intégrale, montrer que $\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_x^{xe}\frac{\ln(u)}{1+u^2}du-\frac{\ln(x)}{x}\int_x^{xe}\frac{1}{1+u^2}du$
5. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
6. Étudier la monotonie de φ sur $\mathbf{R}_+$.
7. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} x^2\varphi(x)$.