TD : Intégration sur un segment

1. Calculer les intégrales suivantes en justifiant au préalable pourquoi elles sont bien définies :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 t^n dt$ où $n \in \mathbf{N}$.
   (b) $\displaystyle\int_e^2 \frac{\ln x}{x} dx$.
   (c) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^2} dx$.
   (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x} dx$.
   (e) $\displaystyle\int_0^2 dx$.
   (f) $\displaystyle\int_{-10}^{10} t^{17}+t^3 dt$.
   (g) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$.
   (h) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n dx$. où $n \in \mathbf{N}$.

2. Calculer les intégrales suivantes à l'aide de la relation de Chasles :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \max(t, \frac{1}{2}) dt$.
   (b) $\displaystyle\int_0^1 \max(t, x) dt$ où $x \in \mathbf{R}$.
   (c) $\displaystyle\int_0^1 |3t-1| dt$.
   (d) $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x| dx$.
   (e) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \lfloor x \rfloor dx$.
   (f) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \min(t, \frac{-3}{2}) dt$.

3. Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbf{I}$ et calculer leur dérivée.

   (a) $\displaystyle f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ où $\mathbf{I} = \mathbf{R}$.
   (b) $\displaystyle f(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$ où $\mathbf{I} = \mathbf{R}$.
   (c) $\displaystyle f(x) = \int_{e^x}^{x^2+x} ln(t^2+1) dt$ où $\mathbf{I} = \mathbf{R}$.
   (d) $\displaystyle f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{t^4} dt$ où $\mathbf{I} = \mathbf{R}^*$.

4. Déterminer le domaine de définition de F. Est elle dérivable sur ce domaine ? Si oui calculer F'.
   $\displaystyle F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}$.

5. Soit $f \in \mathbf{C}^0(\mathbf{R})$. Montrer que : $\displaystyle F : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t) dt$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0.

6. A l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$.
   (b) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$.
   (c) $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$.
   (d) $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$.
   (e) $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2 dx$.
   (f) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$.

7. On pose pour $n \geqslant 0$: $\displaystyle I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.
   (b) Montrer que $\displaystyle I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1}$.
   On pose $\displaystyle J_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$ pour $n \geqslant 0$.
   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
   (d) Montrer que $J_{n+1} = J_n - \frac{1}{(n+1)!}$.
   (e) En déduire à l'aide d'un télescopage que : $\displaystyle e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

8. Soient $(p,q) \in \mathbf{N} : I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.
   (a) Montrer que $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
   (b) En déduire que $I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I_{p+q,0}$.
   (c) Calculer $I_{p+q,0}$.

9. A l'aide d'un changement de variable, calculer :
   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$. $(e^x = u)$
   (b) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$. $(e^{\sqrt{x}} = u)$.
   (c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$. $(\sqrt{x} = u)$
   (d) $\displaystyle\int_8^{27} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$. $(\sqrt[3]{x} = u)$

10. Pour $n \in \mathbf{N}$: On pose $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln t)^n dt$.
    (a) Montrer que, pour $n \geqslant 0, I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
    (b) Effectuer le changement de variable $u = \ln t$ dans I_n.
    (c) En déduire que : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.
    (d) En utilisant (a) et (c), montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = e$.
    (e) Justifier que : $\forall n \in \mathbf{N} : I_n > 0$.
    (f) Écrire une fonction Python qui renvoie la valeur de I_n quand l'utilisateur rentre $n \in \mathbf{N}$.

11. Étudier la monotonie des fonctions suivantes :
    (a) $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{xt} dt$ sur $\mathbf{R}$.
    (b) $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^x}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
    (c) $h : x \mapsto \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{1+t^x}$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
    (d) $l : x \mapsto \displaystyle\int_{-1}^0 e^{xt} dt$ sur $\mathbf{R}$.

12. Calculer les limites des suites suivantes quand $n \to +\infty$:
    (a) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{e^t+1} dt$.
    (b) $v_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t) dt$ où $f \in \mathbf{C}^0([0,1])$.
    (c) $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} e^{t^2} dt$.
    (d) $r_n = \displaystyle\int_1^n e^{t^2} dt$

13. (a) Soit f une fonction continue sur le segment [0,1]. Lorsque n est grand, de quoi la somme $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$ est elle une valeur approchée ? (On pourra illustrer avec un dessin). Dans la suite on admet ce résultat, connu sous le nom des sommes de Riemann.
    (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
    (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{e^{\frac{k}{n}}}{n}$.
    (d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \displaystyle\sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$.