Test 15 18/03

1. Donner une primitive de :

a) $x^2 - \frac{1}{x}$ $\qquad \frac{x^3}{3} - \ln x$

b) $2x - x^3 + e^{2x}$ $\qquad x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{e^{2x}}{2}$

c) $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ $\qquad \ln(x+2) + \frac{1}{x+1}$

d) $x e^{x^2}$ $\qquad \frac{1}{2} e^{x^2}$

e) $6x e^{-2x^2}$ $\qquad -\frac{3}{2} e^{-2x^2}$

f) $\frac{7}{x^7} + x^7$ $\qquad \frac{-7}{6x^6} + \frac{x^8}{8}$

g) $\frac{x^2+1}{x}$ $\qquad \frac{x^2}{2} + \ln x$

h) $\frac{x^2}{x+1}$

$x^2 = x(x+1) - x - 1 + 1$

2. Donner la primitive des fonctions suivantes qui s'annule en 1 :

a) $f(x) = 2 - e^{2x}$ $\qquad 2x - \frac{1}{2} e^{x} - 2 + \frac{e^1}{2}$

b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ $\qquad x - \ln(x+1) - 1 + \ln 2$

c) $f(x) = 1$ $\qquad x - 1$

$\frac{1}{2} e^{2x} + x e^{2x}$

$\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4}$

3. Calculer les intégrales :

a) $\int_0^1 t^4 + t^3 \, dt = \left[\frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$

b) $\int_1^e \frac{3}{x} \, dx = [3 \ln x]_1^e = 3.$

c) $\int_0^2 x e^{2x} \, dx = \left[\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^2 = e^4 - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3e^4+1}{4}.$

d) $\int_0^1 |-2t+1| \, dt = \int_0^{1/2} -2t+1 \, dt + \int_{1/2}^1 -1+2t \, dt = [-t^2+t]_0^{1/2} + [t^2-t]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

On a $-2t+1 \geq 0 \iff t \geq \frac{1}{2}$, donc on découpe selon $1/2$.

(4*) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-3} + \frac{x^3}{x-2} + \left|x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right| dx$

Par linéarité, calculons séparément :

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx = [\ln|x-3|]_0^1 = \ln 2 - \ln 3$.

- On calcule

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x-2 \\ \cline{2-2} -(x^3-2x^2) & x^2+2x+2 \\ \cline{1-1} 2x^2 & \\ -(2x^2-2x) & \\ \cline{1-1} 2x & \\ -(2x-4) & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x-2}\,dx = \int_0^1 x^2+2x+2 + \frac{4}{x-2}\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 4\ln(x-2)\right]_0^1$

$\displaystyle = \frac{1}{3} + 1 + 2 + 4\ln 3 - 4\ln 2 = \frac{10}{3} + 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

- $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}$ admet $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ comme racines sur $[0,1]$, donc on découpe selon :

$\displaystyle\int_0^1 \left|x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right| dx = \int_0^{1/3} x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\,dx + \int_{1/3}^{1/2} -x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}\,dx + \int_{1/2}^1 x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\,dx$

$\displaystyle = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{12} + \frac{1}{6}x\right]_0^{1/3} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{12} - \frac{1}{6}x\right]_{1/3}^{1/2} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{6}x\right]_{1/2}^1$

$\displaystyle = \frac{55}{648}$ (de tête !)

5 – a) Mq : $\forall n \geq 1$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{\underbrace{1+x}_{=1-(-x)}}\,dx \xrightarrow[\text{somme géométrique}]{} = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x)^k\,dx \overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^k\,dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$.

b) $\displaystyle\left|\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\,dx\right| \underset{\text{Inégalité triangulaire}}{\leq} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx \underset{\frac{1}{1+x} \leq 1 \text{ sur } [0,1]}{\leq} \int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Ainsi par théorème d'encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\,dx = 0$

(c) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \underset{(a)}{=} \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\,dx \quad \text{(linéarité)}$$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\,dx \quad (b)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2 - 0$$

Ainsi $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$