TD : Intégration sur un segment 3

Exercice 1 : Une suite d'intégrale

Pour tout entier naturel n, on considère $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx$.

1. Calculer $I = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$. Exprimer J_0 en fonction de I et en déduire la valeur de J_0.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n}$ et en déduire la limite de J_n en $+\infty$.
3. Montrer que la suite (J_n) est décroissante.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leq J_n \leq \frac{1}{2}(J_{n-1} + J_n)$.
5. Calculer la valeur de $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n. En déduire la limite de nJ_n.

Exercice 2 : Une autre suite d'intégrale

Pour tout entier naturel n, on pose : $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$. On admet que $J_0 = \frac{\pi}{4}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, 0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de J_n en $+\infty$.
2. Soit un entier naturel n, calculer $J_n + J_{n+2}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
4. Ecrire un programme Python permettant de calculer la valeur de J_{100}

Exercice 3 : Fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ et f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative qu'on appelle C.
2. Que représente $F(x)$ pour C ?
3. Étudier le sens de variation de F.
4. Étudier le signe de la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : g$(x) = F(x) - \ln x$. En déduire la limite de F lorsque x tend vers 0 et lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Montrer que : $\forall t \in \mathbf{R}_+^*, e^t > te^{\frac{t}{2}}$. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$.

Exercice 4 : Fonction implicite

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique $y \in \mathbf{R}$ tel que $\int_x^y \exp\left(t^2\right) dt = 1$, on note $y = \varphi(x)$ le réel ainsi défini.
2. Montrer que φ est croissante. Quelles sont les limites en $\pm\infty$?
3. Montrer que φ est continue et dérivable.