Variables aléatoires discrètes

1_ Généralités et définitions

On se place dans ce cours dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, où on rappelle que Ω est l'univers (les issues), $\mathcal{A}$ l'ensemble des événements et $\mathbb{P}$ une probabilité.

<u>Définition</u>: On appelle variable aléatoire réelle toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, de sorte que, pour tout réel x, $\{\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \leq x\}$ est un événement.

<u>Remarque</u>: . On note, en pratique, l'événement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = [X \leq x]$. C'est-à-dire, l'ensemble des issues ω de l'expérience pour lesquelles $X(\omega) \leq x$.

. Une variable aléatoire est un outil de modélisation, elle permet d'associer à chaque issue un nombre réel, l'intérêt étant de pouvoir faire des calculs.

<u>exemple 1</u>: On lance une pièce 10 fois. On note X la variable égale au nombre de piles obtenus. On note Y la variable égale à 1 si on a obtenu au moins 1 pile au cours des lancers, et à 0 sinon.

Définition : On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.

Remarque : • Ainsi $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$. On l'appelle parfois support de X.

• Dans l'exemple ci-dessus : $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

Définition* : On dit qu'une variable aléatoire X est discrète si $X(\Omega)$ est fini ou bien si $X(\Omega) = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

exemple 2 : • On lance une pièce jusqu'à obtenir pile. On note X le nombre de lancers effectués. Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc X est discrète.

• On attend à un guichet d'où commence l'arrivée du premier client, on note Y le temps d'attente à partir de l'ouverture du guichet, ainsi $Y(\Omega) = [0, +\infty[$, donc Y n'est pas discrète.

Définition : On caractérise la loi d'une variable aléatoire discrète X par les valeurs, pour tout $k \in X(\Omega)$, de $P(X = k)$.

exemples 3 : On lance un dé à 8 faces équilibrés. On note X la variable aléatoire égale au n° obtenu et Y celle égale à 1 si on a obtenu le n°6 et à 0 sinon.

On a donc : $P(Y = 1) = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$P(Y = 0) = \frac{5}{6}$

$\forall k \in [\![1, 6]\!] \quad P(X = k) = \frac{1}{6}$.

Proposition : La famille d'événements $(X=k)_{k\in X(\Omega)}$ forme, lorsque X est une variable aléatoire discrète, un système complet d'événement.

Ainsi, $\sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

Preuve (théorique) : $\Omega = \bigsqcup_{k\in X(\Omega)} \{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=k\} = \bigsqcup_{k\in X(\Omega)} [X=k]$

Ainsi, par incompatibilité, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=k)$.

Remarque : Penser à vérifier, une fois la loi calculée, que la somme de toutes les valeurs fait 1. Penser aussi que connaître toutes les valeurs de la loi, permet de calculer la dernière.

exemple 4 : On tire une poignée de n boules dans une urne en contenant $2n$, qui sont numérotées de 1 à $2n$. On note X la variable aléatoire égale à 1 si on a tiré le n°1 et 0 sinon. Calculons la loi de X. On a bien sûr $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$\mathbb{P}(X=0) = \dfrac{\text{nombre de poignées favorables}}{\text{nombre de poignées totales}}$ car nous sommes en équiprobabilité

nombre de poignées ne contenant pas 1 $\longrightarrow$

nombre de poignées de n boules parmi $2n$ $\longrightarrow$

$$= \frac{\binom{2n-1}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n-1)!}{n!\,(2n-1-n)!}}{\frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, vu que $X(\Omega) = \{0,1\}$: $\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1$

donc $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$.

exemple 5 : Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$ et $P(X=0) = P(X=-1) = \frac{1}{7}$.

Soit $Y = 2X+1$ et $Z = X^2$. Calculons les lois de Y et Z.

Notons déjà que $P(X=1) = 1 - (P(X=0) + P(X=-1)) = \frac{5}{7}$.

• Etude de Y. Nous avons $Y(\Omega) = \{2\times(-1)+1, 2\times 0+1, 2\times 1+1\} = \{-1, 1, 3\}$.

$P(Y=-1) = P(2X+1=-1) = P(X=-1) = \frac{1}{7}$; $P(Y=1) = P(X=0) = \frac{1}{7}$; $P(Y=3) = P(X=1) = \frac{5}{7}$

• Etude de Z. Nous avons $Z(\Omega) = \{(-1)^2, 0, 1^2\} = \{0, 1\}$.

$P(Z=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = \frac{1}{7}$;

$P(Z=1) = P(X^2=1) = P(X=1 \text{ ou } X=-1) = P(X=-1) + P(X=1) = \frac{6}{7}$.

exemple 6 : Un joueur mise 8 € et joue au jeu suivant

Il lance deux dés à 6 faces équilibrés de manière indépendante, il gagne en € le carré du n° du 1er dé et perd le double du n° du 2ème dé. On note G la variable égale à son gain, X celle égale au n° du 1er dé et Y le n° du 2ème dé.

Ainsi $G = X^2 - 2Y - 8$.

Comment savoir si le jeu est équilibré ?

2 – Espérance des variables discrètes.

Dans toute cette partie nous étudions des variables aléatoires discrètes.

Définition (Espérance cas où $X(\Omega)$ est fini) : Etant donné une variable aléatoire X prenant des valeurs dans un ensemble fini : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.
On définit l'espérance de X par : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}(X = x)$.

Remarque : Lorsque $X(\Omega)$ est composé de 1, 2 ou 3 éléments, on se passe d'écrire le symbole Σ. Par exemple si Y est la variable de l'exemple 3 :

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Si X est la variable de l'exemple 3 :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6} = \frac{6 \times 7}{2} \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Définition (cas où $X(\Omega)$ est infini) : Etant donné une variable aléatoire X à support infini. On dit que X admet une espérance lorsque la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}(X = x)$ converge absolument.

Si c'est le cas, on note $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}(X = x)$.

Remarque : Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$, cela donne $\sum_{n=0}^{+\infty} n \, \mathbb{P}(X = n)$

Si $X(\Omega) = [\![2, +\infty [\![$, cela donne $\sum_{n=2}^{+\infty} n \, \mathbb{P}(X = n)$ ...

- L'espérance est donc la moyenne des valeurs prises pondérées par leur probabilité d'apparition. Le nombre réel $\mathbb{E}(X)$ correspond donc à la valeur moyenne espérée de la variable X.

Propriété (linéarité de l'espérance) : Soient X et Y des variables admettant une espérance :

- Pour tout réel $\alpha \in \mathbb{R}$, αX a une espérance et $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha\, \mathbb{E}(X)$.
- $X+Y$ a une espérance et $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

exemple : On lance deux dés à 6 faces. On note Z la somme des deux dés, X et Y le n°, respectivement, du 1er et du 2nd dé. On a donc $Z = X+Y$. On a vu (exemple 3) que $\mathbb{E}(X) = 3,5$, donc $\mathbb{E}(Y) = 3,5$ (la loi de Y est la même que celle de X).

Ainsi $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 7$ par linéarité de $\mathbb{E}$.

Propriété (Positivité) : Soit X une variable admettant une espérance et ayant des valeurs positives, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Preuve : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} \underbrace{x}_{\geq 0} \underbrace{P(X=x)}_{\geq 0} \geq 0$.

Corollaire (croissance de l'espérance) : Si X et Y admettent une espérance et si, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Preuve : Poser $Z = Y - X$ et utiliser la positivité de $\mathbb{E}$ puis la linéarité de $\mathbb{E}$.

Définition : On dit qu'une variable X est centrée si elle admet une espérance égale à 0.

Théorème de transfert : Soit X une variable discrète et g une fonction définie (a minima) sur $X(\Omega)$. La variable discrète $g(X)$ admet une espérance si et seulement si $\sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \, \mathbb{P}(X=x)$ converge absolument.

Dans ce cas $E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \, \mathbb{P}(X=x)$

__exemple__ : Reprenons l'exemple 6 et utilisons le transfert pour calculer $E(X^2)$.

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{6} k^2 \frac{1}{6} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

comme $E(Y) = 3,5$, alors, par linéarité de E :

$$E(G) = \frac{91}{6} - 2 \cdot 3,5 - 8 = \frac{91 - 42 - 48}{6} = \frac{1}{6}.$$

Cette espérance est > 0 donc le jeu est en faveur du joueur.

__Remarque__ : On a utilisé le fait que $E(8) = 8$. En effet, on peut voir 8 comme la variable X qui vaut toujours 8. Ainsi $E(8) = 8 \, \mathbb{P}(8=8) = 8 \cdot 1 = 8$

De manière générale, si $a \in \mathbb{R}$, $E(a) = a$.

3_ Variance des variables aléatoires discrètes.

Définition : On dit que la variable discrète X admet une variance lorsque $\mathbb{E}(X)$ existe et que la variable $(X-\mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance.

Dans ce cas, on note $V(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)$.

On appelle écart-type de X, le nombre réel positif $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$!

Remarque : La positivité de $\mathbb{E}$ garantit que σ_X existe lorsque $V(X)$ existe.

σ_X mesure la dispersion des valeurs que prend X par rapport à son espérance.

Lorsque σ_X est "petit", X prend des valeurs proches de sa moyenne.

Propriété : Soient a, b des réels et X une variable admettant une variance.

$aX+b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Preuve : $V(aX+b) = \mathbb{E}\left[(aX+b-\mathbb{E}(aX+b))^2\right] \underset{\text{linéarité de } \mathbb{E}}{=} \mathbb{E}\left((aX+b-\mathbb{E}(X)-b)^2\right) = \mathbb{E}\left(a^2(X-\mathbb{E}(X))^2\right)$

$\underset{\text{linéarité de } \mathbb{E}}{=} a^2 V(X)$

Proposition (Formule de Huygens) : Soit X une variable aléatoire discrète.

- X admet une variance si et seulement si X^2 admet une espérance.
- Dans ce cas : $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

exemple : On reprend la variable X de l'exemple 6.

$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$ et $\sigma_X \simeq 1,7$.

Preuve : Admettons les considérations d'existence (qui viennent de la linéarité de $\mathbb{E}$).

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) \text{ , linéarité de } \mathbb{E}.$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X).\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Remarque : • En pratique on va donc calculer d'abord $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide du théorème de transfert pour calculer $\mathbb{V}(X)$.

• Lorsque les variables sont finies ($X(\Omega)$ fini), les espérance et variances existent toujours (car il n'y a que des sommes).

Définition : On dit qu'une variable aléatoire X est réduite si elle admet une variance égale à 1.

Définition : Etant donné une variable aléatoire X d'espérance $m \in \mathbb{R}$ et de variance $\sigma_X^2 > 0$. On définit la centrée réduite de X par :

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma_X}.$$

Remarque : X^* est à la fois centrée et réduite, en effet :

$$\mathbb{E}(X^*) = \frac{1}{\sigma_X}(\mathbb{E}(X) - m) = 0 \quad \text{par linéarité de } \mathbb{E}$$
$$\mathbb{V}(X^*) = \frac{1}{\sigma_X^2}\mathbb{V}(X) = 1 \quad \text{par propriétés de } \mathbb{V}.$$