Préparer les maths Hec en prépa ECE

116 exercices et 74 questions courtes d'oraux avec corrigés

Martin Canu

2021

Table des matières

Références à des parties du programme de ECE

• **Partie 0 : Révisions de première année.**

• **Partie 1 : Espaces vectoriels et applications linéaires.**

• **Partie 2 : Compléments sur les suites et les séries.**

• Partie 3 : Compléments sur les intégrales et les comparaisons de fonctions.

• Partie 4 : Réductions des endomorphismes et des matrices.

• Partie 5 : Couples et vecteurs aléatoires discrets.

• Partie 7 : Variables aléatoires à densité.

• Partie 8 : Convergences et approximations en probabilités.

• Partie 9 : Estimation ponctuelle, intervalles de confiance.

Avant-propos

Un objectif ...

Préparer les oraux de maths de Hec pour un étudiant de prépa ECE, ce n'est pas si facile. Les ECS sont plus aidés car ils préparent en même temps les oraux de Hec et de l'Escp, oraux de maths qui se ressemblent beaucoup et pour lesquels l'Escp fournit des outils assez développés depuis au moins 1996.

Hec n'a d'ailleurs jamais caché sa préférence à recruter des étudiants de profil ECS. Les chiffres donnant le nombre de candidats, d'admissibles et d'admis dans les différentes voies sont extrêmement parlants. Il faut donc être bien préparé et **commencer tôt**, et surtout ne pas attendre la publication des résultats d'admissibilité.

D'ailleurs, préparer ces exercices d'oraux rendra de précieux services à tous ceux qui souhaitent s'aguerrir pour les écrits. C'est un des moyens les plus efficaces pour passer de 15 à 20 dans vos résultats des épreuves écrites maths hec (ou essec).

Les sources ...

Presque tous les exercices (et questions) sont extraits de planches d'oraux HEC. Durant cet oral, un exercice est donné à préparer pendant 25 à 30 minutes. Ensuite, le candidat est appelé à exposer sa solution pendant 20 à 25 minutes. Le jury peut intervenir pour aider le candidat ou pour lui demander d'accélérer si celui-ci s'attarde trop sur des parties faciles. Le jury soumet ensuite une question courte au candidat (dans un autre domaine que celui couvert par l'exercice). L'exposé de la solution à la question est donc improvisé, et cela sur un temps de 5 à 10 minutes. Dans tous les cas, l'exercice ou bien la question portera sur les probabilités. Les exercices (et questions) marqués "Entraînement" sont de grands classiques, de sources diverses et perdues dans le temps (extrait de problèmes, échanges entre enseignants, oraux de l'Escp ...).

Les exercices (et questions) sont presque tous datées entre 1996 et 2015.
A partir de 2016, Hec a enfin accepté de publier un échantillon de planches posées aux oraux, accompagnées de corrigés. Le travail de préparation peut donc s'effectuer directement avec ces planches qui sont publiques, à disposition des enseignants et des étudiants de prépas.

Choisir un exercice ...

Les exercices sont classés dans l'ordre des années de préparation (et donc, le plus souvent, des années d'oraux de Hec).

Mais chaque exercice et chaque question possèdent une référence à une partie du programme de deuxième année de ECE. On peut donc puiser dans ce recueil les exercices au fur et à mesure que l'on avance dans l'année. Pour ceux qui ont déjà fait une deuxième année, tous les exercices sont directement accessibles.

On remarquera la présence d'assez nombreux exercices (et questions), référencés [Part 0], qui sont accessibles aux étudiants de première année, en fin d'année, ou aux étudiants de deuxième année, dès le début de l'année.

Vers un mode d'emploi ...

Une fois l'exercice choisi, il faut y consacrer au moins 30 minutes de préparation (comme à l'oral de Hec) et faire un premier bilan. Je conseille de poursuivre par au moins 15 minutes complémentaires, car il est presque impossible de traiter la totalité de l'exercice en 30 minutes.

Ce n'est qu'après ce temps de préparation que l'on pourra se référer à la correction. Celle-ci doit être travaillée en profondeur, et il ne faut pas hésiter à y consacrer au moins 45 minutes et à compléter ce travail sur le corrigé par un retour sur les parties du cours mal assimilées.

Pour les questions courtes, qui sont en fait de petits exercices improvisés, il convient de les aborder frontalement en essayant d'exposer tout de suite une solution. Si cela s'avère trop difficile, un regard rapide sur le corrigé peut permettre de lancer le travail (ce qui correspond à une indication donnée par le jury un jour d'oral). On peut consacrer 15 à 30 minutes à chaque question pour en profiter pleinement et retravailler le corrigé 5 à 15 minutes ensuite.

Bonnes maths !

Martin Canu

Professeur en prépa Hec puis ECE2 de 1990 à 2020
au lycée Gustave Flaubert Rouen

Chapitre 1

Exercices

1.1 Algèbre

Exercice 1 [Part 4] Entraînement

$\mathbf{R}^3$ est muni de sa base canonique (i, j, k).
Soit f et g deux endomorphismes tels que $f \circ g = g \circ f$.

1) *Le résultat de cette question pourra être admis dans un premier temps.*
Montrer que si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ dont l'espace propre est de dimension 1, alors il est vecteur propre de g.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de f dans (i, j, k).
On pose $e_1 = i + k$, $e_2 = \dfrac{1}{2}(i + j)$, $e_3 = j + k$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et donner la matrice de f dans $\mathscr{B}$.

3) On cherche la forme de la matrice de g dans $\mathscr{B}$.
Montrer l'existence de 2 réels a et c tels que $g(e_1) = a.e_1$ et $g(e_3) = c.e_3$.
Montrer que $u = g(e_2) - a.e_2$ est un vecteur propre de f.
En déduire la forme de la matrice de g dans $\mathscr{B}$.

4) Réciproquement, si g a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$, f et g commutent-ils ?

5) Trouver la forme générale des matrices M qui commutent avec A.

Exercice 2 [Part 1] Entraînement

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, avec $b \neq 0$. On définit :

$$C(A) = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \;/\; AM = MA\} \qquad \text{et} \qquad R(A) = \{X \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \;/\; X^2 = A\}$$

1) **a:** Soit $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
Montrer que : $\quad M \in C(A) \Longleftrightarrow \quad (bx_3 = cx_2 \quad \text{et} \quad bx_1 = (a-d)x_2 + bx_4)$.

b: Montrer que $C(A)$ est le sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ engendré par A et I.

2) **a:** Montrer que $R(A) \subset C(A)$.

b: Montrer qu'il existe un couple unique $(\tau, \delta) \in \mathbf{R}^2$, que l'on déterminera, tel que $A^2 = \tau A - \delta I$.

3) Pour les matrices A_i suivantes $(1 \leqslant i \leqslant 3)$, indiquer le nombre d'éléments de $R(A_i)$ et lorsqu'il n'est pas vide, donner le produit et la somme de ses éléments :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 [Part 4] Entraînement

Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Soit ϕ l'application de E dans E définie par :

$$\phi : P \longmapsto Q \quad \text{avec } Q(X) = 6P'(0)X^3 + 3P''(0)X^2 + 6P(0)X + P'''(0)$$

1) Rappeler la dimension de l'espace vectoriel E

2) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.

3) Choisir une base de E et donner la matrice B de ϕ dans cette base.

4) Calculer B^3 le plus simplement possible.
Quelles sont les valeurs propres de B ?
B est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 [Part 4] Entraînement

Soit a, b, et c trois réels non nuls tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est A.

1) Déterminer une base B_1 de $\ker f$.

2) Déterminer une base B_2 de $\operatorname{Im} f$.

3) Montrer que la famille constituée par les vecteurs de B_1 et ceux de B_2 est une base de $\mathbf{R}^3$.

4) En déduire que f est diagonalisable.

Exercice 5 [Part 4] HEC 2001 oral voie E

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) **a:** Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

b: Déterminez les valeurs propres de A et B.

2) On veut déterminer les matrices M, carrées d'ordre 2 à coefficients réels, vérifiant les conditions :

$$(S)\ \begin{cases} M^3 - 3M^2 + 3M &= A \\ \text{et} & \\ M^2 + 2M &= B \end{cases}$$

On dira qu'une telle matrice est solution du système (S). On suppose que le système (S) a des solutions et on note M l'une d'elles.

a: Établir les égalités : $(M-I)^3 = A - I$ et $(M+I)^2 = B + I$.

b: En déduire que les matrices $M - I$ et $M + I$ ne sont pas inversibles.

c: En déduire que la matrice M est diagonalisable et vérifie l'égalité $M^2 = I$.

d: Déterminer toutes les solutions du système (S).

3) On veut déterminer les matrices M carrées d'ordre 2 à coefficients réels vérifiant l'égalité :

$$M^3 - 3M^2 + 3M = A$$

Notons M une telle matrice (s'il en existe).

a: Montrer qu'il existe deux réels a et b et une matrice P inversible tels qu'on a

$$M = P \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} P^{-1}$$

b: En déduire que la matrice $M^2 - 4M + 7I$ est inversible.

c: Établir les égalités : $(M+I)(M^2 - 4M + 7I) = A + 7I$.

d: Déterminer toutes les matrices M vérifiant l'égalité : $M^3 - 3M^2 + 3M = A$

Exercice 6 [Part 1] Entraînement

Cours : Formule du binôme : énoncé, une démonstration ?

1) On considère un entier naturel N non nul et à toute suite réelle finie $a = (a_0, a_1, \dots, a_N)$ on associe la suite $\widehat{a} = (\widehat{a_0}, \widehat{a_1}, \dots, \widehat{a_N})$ où, pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant N$, $\widehat{a_n}$ est défini par l'égalité :

$$\widehat{a_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a_k$$

Pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n \leqslant N$, calculer $\widehat{a_n}$ dans les cas suivants :

a: Pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n \leqslant N$, $\quad a_n = q^n$ où q est un réel fixé.

b: Pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n \leqslant N, \quad a_n = n^2$.

c: Pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n \leqslant N, \quad a_n = \binom{n}{p}$ où p est un entier naturel fixé.

2) Pour tout suite finie $a = (a_0, a_1, \dots, a_N)$, vérifier que $\widehat{\widehat{a}} = a$.

3) Dans cette question, on suppose que $N = 3$ et on note Φ l'application qui à tout élément $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbf{R}^4$ associe l'élément $\widehat{a} = (\widehat{a_0}, \widehat{a_1}, \widehat{a_2}, \widehat{a_3})$ de $\mathbf{R}^4$.

a: Vérifier que Φ est linéaire et donner sa matrice M relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^4$.

b: Justifier l'inversibilité de M et déterminer M^{-1}.

c: On note F l'ensemble des éléments $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ de $\mathbf{R}^4$ vérifiant $a = \widehat{a}$. Déterminer la dimension de F.

Exercice 7 [Part 1] HEC 1999 oral voie E

On considère un entier naturel n non nul et on note $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. L'élément de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls est noté O_n.

1) Étant donné un élément B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on considère l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans lui-même noté Φ_B, qui à toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ associe $\Phi_B(M) = MB - BM$.

a: Vérifier que Φ_B est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

b: Dans le cas particulier où $n = 2$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, déterminer les matrices A telles que $\Phi_B(A) = A$.
Que vaut A^2 pour une telle matrice ?

2) On considère deux éléments A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant : $\quad AB - BA = A$.

a: Montrer que : $\quad A^2B - BA^2 = 2A^2$
puis que, pour tout entier naturel k, $A^kB - BA^k = kA^k$.

b: Dans le cas où A^k est non nulle, comment interpréter l'égalité précédente vis à vis de l'endomorphisme Φ_B ?

c: En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0_n$.

3) On considère les endomorphismes f et g de $\mathbf{R}[X]$ définis, pour tout polynôme P par :
$f(P) = P'$ et $g(P) = XP$.

a: Déterminer l'application $f \circ g - g \circ f$.

b: En déduire qu'on peut trouver un endomorphisme h de $\mathbf{R}[X]$ tel que $f \circ h - h \circ f = f$.

c: Existe-t-il un entier naturel p tel que f^p soit l'endomorphisme nul ?

d: Comparer ces derniers résultats avec les résultats de la question 2.

Exercice 8 [Part 1] HEC 2002 oral voie E

Si $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ est élément de $\mathbf{R}^4$, on pose $M(a)=\begin{pmatrix}0&0&0&a_1\\0&0&0&a_2\\0&0&0&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix}$.

On note F le sous ensemble de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ constitué des matrices $M(a)$ quand a parcourt $\mathbf{R}^4$.

On note $J=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ et en donner la dimension.

2) Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$. Pour $i\in[\![1,4]\!]$, on pose $M_i=M(e_1)$. Montrer que pour tout élément i de $[\![1,4]\!]$, la matrice M_i+J est inversible et que la famille $(M_i+J)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ est libre.

3) Soit $a\in\mathbf{R}^4$. Montrer que si pour tout réel θ non nul, la matrice $M(a)+\theta J$ est non inversible, alors $a=(0,0,0,0)$

4) Soit G un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ contenant J et ne contenant aucune matrice inversible.

a: Déterminer $G\cap F$ et en déduire que la dimension de G est inférieure ou égale à 12.

b: Existe-t-il un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ de dimension 12 ne contenant aucune matrice inversible et contenant J ?

Exercice 9 [Part 1] HEC 2005 oral voie E

Soit $t\in\mathbf{R}$ et $A(t)$ la matrice

$$A(t)=\begin{pmatrix}1-t&-t&0\\-t&1-t&0\\-t&t&1-2t\end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{M}$ l'ensemble de ces matrices lorsque t décrit $\mathbf{R}$.

1) Montrer que $\mathscr{M}$ est stable par produit matriciel.

2) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $A(t)$ est inversible.
Montrer que dans ce cas, $A(t)^{-1}$ appartient encore à $\mathscr{M}$.

3) Résoudre l'équation

$$X^2=A\left(-\frac{3}{2}\right)$$

d'inconnue $X\in\mathscr{M}$.

4) Soit $C=A(-1)$. Déterminer C^n pour n entier naturel.

Exercice 10 [Part 4] Entraînement

On considère deux endomorphismes de $\mathbf{R}^n$ où $n\geqslant 2$

1) Montrer que l'on a : $\ker g \subset \ker(f \circ g)$ et $Im(f \circ g) \subset Im f$.

2) Montrer que si $f \circ g$ est bijectif, alors f et g le sont aussi.

3) Soit $\lambda \neq 0$. Montrer que λ est valeur propre de $g \circ f$ si et seulement si il l'est aussi de $f \circ g$

4) Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 11 [Part 1] Entraînement

Pour A matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $(n > 1)$, on pose $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ / \ MA = AM\}$.

1) Montrer que $C(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de dimension supérieure ou égale à 2.

2) On suppose que $C(A) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique (e_i) et f l'endomorphisme dont la matrice est A.

- **a:** Soit g l'endomorphisme tel que $g(e_i) = e_i$ et $g(e_j) = 0_E$ pour $i \neq j$.
  Montrer qu'il existe α_i tel que $f(e_i) = \alpha_i e_i$
- **b:** Montrer que les α_i sont tous égaux.
- **c:** Déterminer A

Exercice 12 [Part 4] Entraînement

Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ et g linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$.
On note A et B les matrices de f et g dans les bases canoniques respectives.

1) En utilisant $Im g$, montrer que $\dim Im(g \circ f) < 3$.
Que peut-on en déduire pour $g \circ f$?
Donner une valeur propre de $g \circ f$.

2) On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- **a:** Soit $X \in \mathbf{R}^2$ non nul, montrer que BX n'est pas nul.
- **b:** Montrer que si λ est valeur propre de AB, alors il est valeur propre de BA.
- **c:** En déduire que BA est diagonalisable

Exercice 13 [Part 1] Entraînement

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $(n > 1)$. On cherche les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $AM - MA = A$

1) Montrer que si l'équation proposée admet au moins une solution, elle en admet une infinité.

2) Soit M une solution de l'équation.

- **a:** Montrer que, pour tout entier naturel p : $\quad A^pM - MA^p = pA^p$.
- **b:** En considérant l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ défini par $\phi(N) = NM - MN$, montrer qu'il existe un entier k tel que $A^k = 0$

3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a: Montrer qu'il existe un vecteur x tel que $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de $\mathbf{R}^n$.

b: Écrire la matrice de u dans cette base.

Exercice 14 [Part 4] Entraînement

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, symétrique, dont tous les termes sont des 1 et des 0 et telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & k & 1 & \ldots & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & \ldots & & 1 & k \end{pmatrix} \qquad \text{avec } k \geqslant 2.$$

1) Montrer que $(1, 1, \ldots, 1)$ est vecteur propre de A.

2) Montrer que $n = k^2 - k + 1$ et en déduire que n est nécessairement impair.

3) Déterminer les valeurs propres éventuelles de A.

Exercice 15 [Part 4] HEC 2006 oral voie E

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) La matrice A est-elle diagonalisable ?
La matrice A est-elle inversible ?

2) Déterminer tous les entiers naturels p et q tels que $A^{2p+1} = A^{2q}$.

3) Existe-t-il un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $M^n = A$ si

a: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 16 [Part 4] HEC 2006 oral voie E

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Définition et propriétés des matrices de passage.

2) Donner une base et la dimension de $\ker f$.

3) Donner une base et la dimension de $\mathrm{Im} f$.
4) Donner les valeurs propres et les sous espaces propres de f ?
5) f est-il diagonalisable ?
6) Calculer A^n pour $n \in \mathbf{N}^*$.
7) On note I la matrice de l'identité. Déterminer les réels a tels que $(A-aI)^2 = I$.

Exercice 17 [Part 1] HEC 2007 oral voie E

On donne les fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}$:
$f : x \longmapsto 1$
$g : x \longmapsto x$
$h : x \longmapsto x \ln |x|$ pour $x \neq 0$ et $h(0) = 0$
On pose $E = Vect(f, g, h)$.

1) Montrer que (f, g, h) est une base de E.
2) Soit Z l'application de E dans E définie par $Z(u) = (gu)'$. Montrer que Z est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base du 1).
3) M est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse en minimisant les calculs.
4) Résoudre l'équation $Z(u) = a + bg + h$ où a et b sont des réels fixés.
5) Déterminer une primitive de h.

Exercice 18 [Part 4] HEC 2007 oral voie E

Soit E l'ensemble des suites réelles et F l'application qui à toute suite (u_n) associe la suite (v_n) avec $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1) Montrer que F est linéaire.
2) Calculer les images de F d'une suite arithmétique, géométrique, arithmético géométrique.
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (u_n) pour que la série de terme général v_n converge.
4) Trouver $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$
5) Soit S l'ensemble des suites vérifiant : $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
   Montrer que S est stable par F.
   Montrer que la restriction de F à S est un automorphisme.
6) Déterminer les valeurs propres de F.

Exercice 19 [Part 4] HEC 2007 oral voie E

Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie. On note, pour tout endomorphisme u de E et pour tout r de $\mathbf{N}^*$:

$$u^0 = id_E \qquad \text{et} \qquad u^r = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{r \text{ fois}}$$

On commence par considérer un endomorphisme non nul de E tel que, pour tout $x \in E$, il existe $r(x) \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^{r(x)} = 0$.

1) Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice réelle (en toute généralité).

2) Montrer qu'il existe $r \in \mathbf{N}^*$ tel que u^r soit nulle et que u^{r-1} ne soit pas l'application nulle.

3) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme u ; est-il diagonalisable ?

4) On pose : $\quad v = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{u^k}{k!}$.

Montrer que v est un automorphisme de E. Exprimer l'inverse de v en fonction de u.

5) Donner une relation simple entre $\ker u$ et $\ker(v - id)$.

6) Déterminer les valeurs propres de v.

Exercice 20 [Part 4] HEC 2007 oral voie E

Question de cours : Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisibilité d'une matrice.

On considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Justifier que f est diagonalisable.

2) Montrer que -2 est valeur propre de f et déterminer la dimension du sous espace propre E_{-2} associé.

3) Calculer $f((1,-1,-1,1))$. En déduire une autre valeur propre ainsi que le sous espace propre associé.

4) Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^4$ dans laquelle la matrice M' de f est diagonale. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^4$ à la base $\mathscr{B}$. Calculer M'^2.

5) Calculer M^n pour tout entier naturel n.

6) On considère les suites (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) définies par u_0, v_0, w_0 et t_0 et

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{4}(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ \\ v_{n+1} &= \frac{1}{4}(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ \\ w_{n+1} &= \frac{1}{4}(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ \\ t_{n+1} &= \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{cases}$$

Calculer u_n, v_n, w_n et t_n en fonction de u_0, v_0, w_0, t_0 et n.
Que dire de leurs limites respectives ?

Exercice 21 [Part 4] HEC 2008 oral voie E

1) **Question de cours :** donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme.

Dans l'exercice, on note C^0 l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
Soit Φ l'application définie sur C^0, qui, à toute fonction f de C^0 associe la fonction $g = \Phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

2) Rappeler pourquoi, pour toute fonction f de C^0, $\Phi(f)$ est dérivable et expliciter sa fonction dérivée.

3) Vérifier que Φ est un endomorphisme de C^0.

4) Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbf{R}$ et non dérivable sur $\mathbf{R}$.
L'application Φ est-elle surjective ? injective ?

5) Recherche des valeurs propres de Φ.
On suppose que Φ admet une valeur propre λ non nulle. Soit f une la fonction propre associée à λ. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
En dérivant la fonction $x \mapsto f(x)e^{-\frac{x}{\lambda}}$, montrer que f ne peut être que la fonction nulle.
Conclure alors que Φ n'admet aucune valeur propre.

6) Pour toute fonction f de C^0, on pose : $F_0 = \Phi(f)$ et $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad F_n = \Phi(F_{n-1})$.
Montrer que F_n est de classe C^{n+1} sur $\mathbf{R}$ et préciser la valeur de ses dérivées successives en 0.
En déduire que : $\qquad \forall x \in \mathbf{R} \qquad F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\, dt$

Exercice 22 [Part 4] HEC 2008 oral voie E

Pour tout réel a, on note $A(a)$ la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) **Question de cours :** rappeler la définition d'une matrice diagonalisable.
On admet la propriété suivante dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$: $\quad {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$.
Montrer que si une matrice est diagonalisable, sa transposée est également diagonalisable.

2) **a:** Justifier le fait que, pour tout réel a, la matrice $A(a)$ est diagonalisable.

b: Montrer que a est valeur propre de $A(a)$ et déterminer le sous espace propre associé.

c: Soit $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A(a)U_1$ et $A(a)U_2$

d: Diagonaliser $A(a)$.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ trois suites réelles vérifiant, pour tout n entier naturel ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_b \\ z_{n+1} = y_n + 2z_n \end{cases}$$

a: Si l'on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, quelle relation a-t-on entre X_{n+1} et X_n ?

b: Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur x_0, y_0 et z_0 pour que les suites (x_n), (y_n) et (z_n) soient bornées. Que peut-on dire alors de ces trois suites ?

4) **a:** Montrer que si B et B' sont deux matrices semblables de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et qu'il existe $C \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $C^2 = B$, alors il existe $C' \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $C'^2 = B'$.

b: Montrer que si B et C sont deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $C^2 = B$, alors $BC = CB$.

c: Si $a \in \mathbf{R}$, déterminer les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ commutant avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

d: Existe-t-il une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = A(3)$?

Exercice 23 [Part 4] HEC 2009 oral voie E

Soient $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $N = A - I$ et $M = N^2 - N$ (où I désigne la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

Soient u et v les endomorphismes de $\mathbf{R}^3$ associés canoniquement aux matrices N et M.

1) **Question de cours :** Matrices semblables, définition et propriétés.

2) Étudier la diagonalisabilité de A.

3) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de I et de M.

4) On suppose dans cette question que le rang de u est égal à 2.

a: Montrer l'existence d'un vecteur x de $\mathbf{R}^3$ tel que $\mathscr{B} = (u^2(x), u(x), x)$ soit une base de $\mathbf{R}^3$.

En déduire que N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b: Exprimer la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ et en déduire que M et N sont semblables.

c: Conclure que A et A^{-1} sont aussi semblables.

Exercice 24 [Part 4] HEC 2009 oral voie BL

Soit x un nombre réel et $M(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ définie par :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 1-x & 0 \\ -x & x & 1-2x \end{pmatrix}$$

On note $E = \{M(x)/x \in \mathbf{R}\}$.

1) **Question de cours :** Définition et propriétés des matrices inversibles.

2) L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$?

3) L'ensemble E est-il stable par :
- la multiplication par un scalaire ?
- l'addition des matrices ?
- la multiplication des matrices ?

4) Les éléments de E sont-ils inversibles ? Si oui, leur inverse appartient-il à E ?

5) Les éléments de E sont-ils diagonalisables ?

6) Exprimer $[M(1)]^n$ en fonction de l'entier naturel n.

Exercice 25 [Part 4] HEC 2011 oral voie E

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n. On note $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ de terme général :

$$m_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = i+1 \\ n+1-j & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

et u l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ est égale à M.

1) *Question de cours :* Rappeler la définition d'un vecteur propre d'un endomorphisme.
Énoncer la propriété relative à une famille de vecteurs propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres distinctes.

2) **a:** Calculer $u(X^k)$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

b: En déduire l'expression de $u(P)$ pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, en fonction notamment de P et de P'.

3) Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k(X) = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$.

a: Calculer $u(P_k)$.

b: En déduire que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

c: L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Préciser ses valeurs propres et les espaces propres associés.

4) Dans cette question, on suppose que $n = 3$.

a: Expliciter M et déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $P^{-1}MP = D$.

b: Déterminer les matrices commutant avec D.

c: Existe-t-il un endomorphisme v de $\mathbf{R}_3[X]$ tel que $v \circ v = u$?

Exercice 26 [Part 4] HEC 2015 oral voie E

1) **Question de cours :** Condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
Soit v un vecteur de $\mathbf{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \dots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ telles que $\sum_{i=1}^{n} v_i = 2$.
On considère l'application f définie sur $\mathbf{R}^n$ qui, à tout $x = (x_1, x_2, , \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, associe $f(x)$ avec

$$f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$$

2) **a:** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

b: Déterminer $f \circ f$. L'endomorphisme f est-il bijectif ?

c: Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

3) **a:** Déterminer les valeurs propres de f.

b: Quels sont les sous-espaces propres de f ? L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4) **a:** Écrire la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$.

b: Montrer que les matrices $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \dots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \dots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n & v_n & \dots & v_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 27 [Part 4] HEC 2015 oral voie E

1) Question de cours : Définition d'un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. Si $p \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_p[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbf{R}_p[X]$, alors $P(A)$ désigne la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_p A^p$.

2) Soit A et Q deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que la matrice Q est inversible, d'inverse notée Q^{-1}.
Soit P un polynôme à coefficients réels. Expliciter $P(Q^{-1}\,A\,Q)$ en fonction de $P(A)$, Q et Q^{-1}.

3) **a:** Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels deux à deux distincts et soit φ l'application de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbf{R}^n$ qui, à tout polynôme P de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ associe le n-uplet $(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n))$.
Autrement dit : $\forall P \in \mathbf{R}_{n-1}[X] \quad \varphi(P) = (P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n))$.
Montrer que l'application φ est bijective.

b: Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels non nuls et deux à deux distincts et $T = (t_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice triagulaire telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$.
Établir l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ tel que :
pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\lambda_i \times P(\lambda_i) = 1$.
Que vaut $T \times P(T)$? Conclure.

4) Déterminer un polynôme $P \in \mathbf{R}_2[X]$ tel que $\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit égal à $P(A)$.

1.2 Analyse

Exercice 28 [Part 0] Entraînement

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} - 1\right)$.

1) Étudier f et montrer que le point de coordonnées $(1/2, 0)$ est centre de symétrie.

2) Montrer que f admet une application réciproque notée g.
Donner le sens de variations de g, montrer qu'elle est dérivable et calculer $g'(0)$.
Calculer $g(y)$ en fonction de y.

3) Soit h définie par $h(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une seule solution dans $\mathbf{R}$ notée a.

4) On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = h(u_n) \\ u_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout n on a : $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{3}|u_n - a|$.
En déduire la convergence de la suite (u_n). Donner une méthode du calcul de a à ε près.

Exercice 29 [Part 3] Entraînement

Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}\, dx.$

1) Prouver l'existence de I_n.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer I_{2n} et I_{2n+1}

3) **a:** Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-nx^2/2}\, dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-nx^2/2}\, dx$$

b: Montrer que : $n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2}(x + \frac{1}{x} - 2)\, dx$

c: Étudier les variations de la fonction $f(x) = x + \dfrac{1}{x} - 2$. En déduire :

$$0 \leqslant \sqrt{n} I_n \leqslant I_{n+1}$$

4) Montrer que : $1 - \dfrac{1}{2n} \leqslant \sqrt{\pi n}\, 4^{-n} \dbinom{2n}{n} \leqslant 1$
Conclure !

Exercice 30 [Part 6] Entraînement

Soit $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x > 0 \text{ et } 0 < y < 1 \text{ et } x + y < 2\}$
et $E' = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ x \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } x + y \leqslant 2\}$.
On admet que E est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et que E' est un fermé de $\mathbf{R}^2$. Soit f la fonction définie sur E par :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 2y^2 + x + 7y$$

1) Représenter graphiquement l'ensemble E'.

2) Montrer que f n'admet pas d'extremum (local) dans l'ouvert E.

3) Déterminer les extremums de f dansE'.
En déduire un encadrement de f sur E'.

Exercice 31 [Part 0] Entraînement

Cours : rappeler les propriétés d'une fonction continue sur un segment.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

Question préliminaire : Étudier la fonction g_α définie par $g_\alpha(x) = x^2 - \alpha x$.

1) Montrer que l'application h définie par $h(x) = |x^2 - \alpha x|$ est continue sur $\mathbf{R}$.
En déduire que $\max\limits_{x\in[0,1]} |x^2 - \alpha x|$ existe. On note $f(\alpha)$ ce nombre.

2) Montrer que si $\alpha \leqslant 0$, alors $f(\alpha) \geqslant 1$.
Montrer que si $\alpha \geqslant 1$, alors $f(\alpha) \geqslant \dfrac{1}{4}$

3) Soit $\alpha \in]0,1[$.
Montrer que $f(\alpha) = \max\left(\dfrac{\alpha^2}{4}, 1-\alpha\right)$.
En déduire $\min\limits_{\alpha\in]0,1[} f(\alpha)$.

4) Calculer $\min\limits_{\alpha\in\mathbf{R}} f(\alpha)$.

Exercice 32 [Part 3] Entraînement

1)] Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ converge si et seulement si $x \in \mathbf{R}_*^+$.

On pose alors, pour $x \in \mathbf{R}_*^+$: $\quad f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$

2) Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_*^+$ et calculer sa dérivée f'.
En déduire les variations de f.

3) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4) En effectuant une intégration par parties, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_*^+ \qquad \frac{1}{x}e^{-x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}e^{-x}$$

En déduire un équivalent simple de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

5) On pose, pour $x \in]0,1[$, $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt$.
Montrer l'existence de $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.
En déduire un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 33 [Part 2] Entraînement

1) Étudier la convergence de la série $\sum \frac{\ln(k)}{k}$.

2) Soit $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Étudier cette fonction.

3) Démontrer la proposition suivante :
$\forall n > 3,\ \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}$

et en déduire un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

4) On se propose de démontrer l'existence d'un nombre c tel que
$S_n = \frac{1}{2}\ln^2(n) + c + \varepsilon(n)$ où $\varepsilon(n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

a: Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \ln^2(n) - \ln^2(n-1) = 2\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$

b: On pose $u_n = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}[\ln^2(n) - \ln^2(n-1)]$.
Démontrer que $\sum_{k=2}^{n} u_n = S_n - S_1 - \frac{\ln^2(n)}{2}$

c: Conclure.

Exercice 34 [Part 3] HEC 1999 oral voie E

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}(1-e^{-t})^n\, dt$$

1) Justifier la convergence de l'intégrale impropre définissant $I_n(a)$.

2) **a:** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $I_n(1) = \frac{1}{n+1}$

b: En déduire que, pour tout réel a vérifiant $a \geqslant 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$.

3) **a:** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall a > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (n+1)(I_n(a) - I_{n+1}(a)) = aI_{n+1}(a)$$

b: En déduire $I_{n+1}(a)$ en fonction de $I_n(a)$.

4) Pour tout réel a vérifiant $a > 1$ et tout entier naturel n, on pose : $S_n(a) = \sum_{k=0}^{n} I_k(a)$.

a: Prouver l'égalité : $S_n(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a)$.

b: Montrer que, pour tout réel a vérifiant $a > 1$, la suite de terme général $S_n(a)$ est convergente.

c: Écrire une fonction Scilab qui renvoie la valeur de $S_n(a)$ (on utilisera l'en-tête `function y=S(n,a)`).

Exercice 35 [Part 2] HEC 2000 oral voie E

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^n}\,dt$$

1) **a:** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est monotone.

b: Montrer que la suite $(u_n)_{n\in N^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

2) **a:** Pour tout élément a de $]0,1[$ et tout entier naturel n non nul, prouver l'inégalité :

$$u_n \leqslant a + \frac{1}{(1+a^4)^n}$$

b: Pour tout élément a de $]0,1[$, prouver l'inégalité : $\ell \leqslant a$.

c: En déduire la valeur de ℓ.

3) **a:** Pour tout entier naturel non nul, établir l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{2^n} + 4n\int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt$$

b: En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n2^{n+2}} - \frac{u_n}{4n}$$

c: Prouver la convergence de la série de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

4) Déterminer la nature de la série de terme général u_n, $(n\in\mathbf{N}^*)$.

Exercice 36 [Part 2] HEC 2001 oral voie E

Pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, on pose $f(x) = \ln(1+x)$.

1) **a:** Pour tout entier naturel n et tout réel x de $]-1,+\infty[$, calculer $f^{(n)}(x)$.

b: Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

c: En déduire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et donner sa somme.

2) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$

a: Quelle est la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$?

b: À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=n^2+1}^{n^2+2n} \frac{1}{k}$.

a: Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

b: Déterminer la nature de la série de terme général v_n .

Exercice 37 [Part 3] HEC 2002 oral voie E

1) **a:** Donner le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$

b: Trouver des équivalents simples de $\ln(1+x^2)$ quand x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ par

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

a: Montrer que f admet sur I une primitive de la forme $x \mapsto a\ln x + b\ln(1+x^2)$, où a et b sont des constantes que l'on déterminera.

b: Soit x un réel strictement positif. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ et montrer que sa valeur est égale à $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

c: Démontrer la convergence et l'égalité des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Exercice 38 [Part 0] HEC 2005 oral voie E

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)\dots\left(1+\frac{x}{n}\right)}\,dx$$

Étudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad I_n \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{1+x\ln(n)}$$

et déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Exercice 39 [part 0] HEC 2005 oral voie E

Soit $a \in \mathbf{R}^{+*}$. On se propose de déterminer les fonctions f trois fois dérivables sur un intervalle $[0,2a]$ à valeurs réelles et telles que

$$\forall x \in [0,2a] \qquad \frac{f(x)}{2} = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(a - \frac{x}{2}\right)$$

Montrer qu'il existe $c \in [0,2a]$ tel que $f''(c) = \max\limits_{t\in[0,2a]} (f''(t))$ et prouver que $f''(c) = f''\left(\frac{c}{2}\right)$.
Déterminer alors les solutions f.

Exercice 40 [Part 3] Entraînement

1) Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ sur $\mathbf{R}^{+*}$ et vérifier qu'elle est bornée.

2) Montrer que :

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \frac{x}{e^x - 1} = xe^{-x} \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} + \frac{xe^{-(n+1)x}}{e^x - 1}$$

3) Étudier la convergence des intégrales

$$J = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+1)x}}{e^x - 1}\,dx$$

4) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$ et en admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, déduire la valeur de J

Exercice 41 [part 0] Entraînement (court)

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^n}\,du$

1) Montrer que la suite (I_n) est monotone et convergente vers 1

2) À l'aide d'une intégration par parties, déterminer la limite de $n(1-I_n)$ et en déduire un équivalent de I_n.

Exercice 42 [part 0] Entraînement

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1) Montrer que F est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

2) Montrer en utilisant F^{-1} qu'il existe une unique application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = 1$$

3) Montrer que f est dérivable et que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 43 [part 2] Entraînement

1) Montrer que, pour x positif assez petit, on a : $0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant x^2$.

2) À l'aide d'intégrales, montrer qu'il existe deux réels a et b tels que
$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim an^b$

3) Trouver la limite de : $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{n^3}}\right)$

Exercice 44 [Part 3] Entraînement

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ par :

$$f(x) = x\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \text{ si } x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

1) Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$.

2) Montrer que l'intégrale $\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt$ est convergente et préciser sa valeur en utilisant le changement de variable $t = \frac{u^2}{2}$

3) Déduire de 2) un équivalent simple de f en $+\infty$

Exercice 45 [Part 3] Entraînement

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$.

1) Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $[0, 1]$ (que l'on notera f également).

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\int_0^1 f(x)dx = -\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{2k} \ln x\, dx + \int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx$$

3) Montrer que $\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4) Conclure.

Exercice 46 [Part 3] HEC 2006 oral eco

Soit E l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^2 telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ \quad f''(x) - (1+x^4)f(x) = 0$$

On admet que E contient une unique fonction f_0 vérifiant $f_0(0) = f_0'(0) = 1$.

1) Rappeler la définition et les propriétés des fonctions convexes et montrer que f_0^2 est convexe.

2) Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbf{R}^+ \quad f_0(t) \geqslant 1.$

3) Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)}\,dt.$

4) On définit f_1 par : $\quad \forall x \in \mathbf{R}^+ \quad f_1(x) = f_0(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)}\,dt.$

Montrer que $f_1 \in E$ et que f_1 est bornée.

Exercice 47 [Part 6] Hec 2006 oral voie E

Soit $a > 0$ et f définie sur $(\mathbf{R}^{+*})^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{a}{xy}$.

Déterminer les extremas de f.

Exercice 48 [part 0] HEC 2006 oral voie E

1) Montrer que la fonction g_n définie sur $\mathbf{R}$ par $g_n(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) e^{-x}$ est dérivable et calculer sa dérivée.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation

$$\frac{e^x}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

admet une solution et une seule dans $\mathbf{R}^+$.
Dans la suite, on note a_n cette solution.

3) Écrire une fonction Scilab permettant de calculer $g_n(x)$, puis une autre permettant d'obtenir une valeur approchée de a_n à 10^{-2} près.

4) La suite de terme général a_n est-elle monotone ?

Exercice 49 [Part 3] HEC 2008 oral voie E (adapté)

1) **Question de cours :** définition du développement limité à l'ordre 2 d'une fonction au voisinage de 0. Cas d'une fonction de classe C^2 au voisinage de 0.

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-x^2}$ et F la primitive de f sur $\mathbf{R}$ vérifiant $F(0) = 0$.

2) Étudier les variations de F et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

3) **a:** Montrer que, pour tout x réel, l'intégrale $\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt$ existe.

On définit alors la fonction G par : $G(x) = \int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt.$

b: Démontrer que G est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et que sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^* \qquad G'(x) = \frac{xe^{-x^2} - F(x)}{x^2}$$

En déduire les variations de G.

c: Montrer que G est continue en 0 et que $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$.

d: Vérifier que G est dérivable et que G' est continue sur $\mathbf{R}$.

4) **a:** Montrer que G vérifie :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad xG'(x) + G(x) = f(x)$$

b: On veut prouver que G est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad xg'(x) + g(x) = f(x) \qquad (E)$$

Soit G_1 une fonction réelle dérivable sur $\mathbf{R}$ et vérifiant l'équation (E).
On pose $H = G - G_1$.
Déterminer $H(x)$ pour $x > 0$, puis pour $x < 0$. Conclure en utilisant la continuité de H en 0.

Exercice 50 [part 0] HEC 2009 oral voie E

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3,\ u_1 = 29/9 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 9 - \frac{26}{u_{n+1}} + \frac{24}{u_n u_{n+1}} \ (1).$$

1) **Question de cours :** Énoncer les résultats concernant les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

2) Écrire une fonction Scilab permettant de calculer la valeur du terme u_n pour tout $n \in \mathbf{N}$ (paramètre de la fonction).

3) Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ telle que :

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \\ \forall n \in \mathbf{N},\ a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n \ (2) \end{cases}$$

4) Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = 2^n + 3^n + 4^n$ (3).

5) Expliciter u_n en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

Exercice 51 [Part 3] HEC 2010 oral voie BL

Soit H définie par : $\quad H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}\, dt$

1) *Question de cours :* Citer des conditions suffisantes de convergence pour une intégrale impropre.

2) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $H(x)$ est convergente.

3) Étudier les variations de H sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa limite en $+\infty$

4) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} H(t)\, dt$ converge et exprimer cette intégrale en fonction de $H(0)$.

5) Soit (x_n) la suite définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = H(x_n)$.

a: Prouver que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad x_n \in \mathbf{R}^{+*}$.

b: Montrer qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $H(\alpha) = \alpha$.

c: Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad |x_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x_n - \alpha|$.

d: En déduire que (x_n) est convergente.

Exercice 52 [Part 2] HEC 2011 oral voie E

On admet la propriété $\mathscr{P}$ suivante :
si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le nombre réel L, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$V_n = \frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1})$$

converge aussi vers L.

On se donne deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n\, \frac{1+\alpha.u_n}{1+\beta.u_n}$$

1) *Question de cours :* Convergence et divergence des suites réelles monotones.

2) Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

a: Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^+$ par :

$$f(x) = x\, \frac{1+x}{1+2.x}$$

b: Étudier la convergence de la suite (u_n).

3) Dans le cas général, prouver que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

4) On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Prouver que la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\beta - \alpha$.

5) En utilisant la propriété $\mathscr{P}$, déduire du résultat précédent un équivalent de u_n de la forme $\dfrac{1}{q.n}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où q est un réel strictement positif.

Exercice 53 [Part 0] HEC 2011 oral voie BL

On considère la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \neq 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{u_n-1}$$

1) *Question de cours :* Énoncer le principe du raisonnement par récurrence.

2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbf{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et le signe de $f(x) - x$.
Donner l'allure de la courbe représentative de f.
Justifier que la suite (u_n) est bien définie.

3) On suppose dans cette question que $u_0 > 1$.
Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\quad u_n \geqslant 2(1+\sqrt{2})$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.

4) Étudier de même le cas où $u_0 < 1$.
Montrer que le suite (u_n) est monotone. Étudier la nature de cette suite.

Exercice 54 [Part 2] HEC 2011 oral voie BL

1) *Question de cours :* Critères de convergence d'une série à termes positifs.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$, à valeurs réelles, par :

$$f_n(x) = (1-x^n)^{1/n}$$

On pose, pour $n \geqslant 2$, $u_n = 1 - \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$

2) **a:** Étudier les variations de la fonction f_n sur $[0,1]$.
Calculer la dérivée seconde de f_n et en déduire que f_n est une fonction concave.

b: Montrer que la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé, est symétrique par rapport à la première bissectrice.

c: Montrer que l'unique point fixe de f_n sur $[0,1]$ a pour abscisse $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n}$.

3) On pose, pour tout $n \geqslant 2$: $v_n = (1-x_n)^2$ et $w_n = \displaystyle\int_0^{x_n} (1-f_n(x))\,dx$.
À l'aide de la représentation graphique de f_n, montrer que : $u_n = v_n + 2w_n$.

4) **a:** Quelle est la nature de la série de terme général v_n ?

b: Établir, pour tout réel y positif, la relation :

$$1-y^{1/n}=\frac{1-y}{1+\sum_{k=1}^{n-1} y^{k/n}}$$

c: En déduire que l'on a : $\quad 0 \leqslant w_n \leqslant \dfrac{2}{(n+1)^2}$.

d: Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 55 [Part 2] HEC 2012 oral voie E

1) **Question de cours :** Définition d'une série convergente. Pour quels x réels la série de terme général $(\ln(x))^n$ est-elle convergente ? Calculer alors sa somme.

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note f_n la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(x)=(\ln(x))^n-x$$

a: Calculer les dérivées premières et seconde f_n' et f_n'' de la fonction f_n.

b: Montrer que la fonction f_1 ne s'annule jamais.

c: Justifier l'existence d'un réel $a \in]0,1[$ vérifiant l'égalité : $\quad f_2(a)=0$.

3) On suppose maintenant que $n \geqslant 3$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation $(E_n) \quad f_n(x)=0$ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

a: Dresser le tableau de variations de f_n sur $]1,+\infty[$ et montrer que (E_n) admet deux racines notées u_n et v_n sur $]1,+\infty[$ (avec $u_n < v_n$).

b: Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

c: Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 56 [Part 2] HEC 2012 oral voie E

1) **Question de cours :** Convexité d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbf{R}$.

2) **a:** Justifier que, pour tout x dans $\mathbf{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \exp(t^2)\,dt$ est convergente.

On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^x \exp(t^2)\,dt$

b: Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Étudier la parité et la convexité de f.

c: Étudier les variations de f sur $\mathbf{R}$ et tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

3) **a:** Établir, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'existence d'un unique réel u_n vérifiant $f(u_n)=\dfrac{1}{n}$.

b: Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et convergente.

c: Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4) **a:** Établir pour tout $u \in [0, \ln(2)]$ l'encadrement : $1+u \leqslant \exp(u) \leqslant 1+2u$.

b: En interprétant le résultat de la question 3) c, montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :
$\int_0^{u_n} (1+t^2)\ dt \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_0^{u_n} (1+2t^2)\ dt.$

c: Montrer que $\lim_{n\to+\infty} nu_n^3 = 0$ et en déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 57 [Part 3] HEC 2017 oral voie E

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0 \quad f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1}$

1) **a:** **Question de cours :** rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction réelle d'une variable réelle.

b: Montrer que f se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\mathbf{R}^+$.

2) Justifier, pour $n \in \mathbf{N}^*$, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt = \frac{2}{n^3}$$

3) **a:** Établir, pour tout $t > 0$, l'inégalité : $f(t) \leqslant t$.

b: Justifier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\ dt$.

c: Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\ dt = 0$.

4) **a:** Établir, pour tout $t > 0$, l'égalité : $f(t) = t^2 \sum_{k=1}^{n} e^{-kt} + f(t)e^{-nt}$.

b: En déduire l'égalité : $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

5) **a:** Justifier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'inégalité $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

b: Compléter le script Scilab suivant, pour que la fonction `approx` affiche une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ avec une précision `epsilon` entrée en argument.

```
function I=approx(epsilon)
    I=0
    n=.....
    for i=1:n
        I=I+  ......
```

```
    end
    disp(I,'intégrale = ')
endfunction
```

1.3 Probabilités

Exercice 58 [Part 7] Entraînement

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt$.

1) Étudier la parité de f (en utilisant un changement de variable).

2) Trouver le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3) En encadrant e^{-t^2} pour $t > 1$, majorer $f(x)$ et en déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

4) Étudier les variations de f et préciser d'éventuels points d'inflexion.

5) Soit X une V.A.R. suivant une loi normale centrée d'écart type σ.
Trouver $a > 0$ pour que $P(a \leqslant X \leqslant 2a)$ soit maximal.

Exercice 59 [Part 7] Entraînement

Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_m(x) = e^{-|x-m|}$$

1) **a:** Étudier cette fonction : continuité, dérivabilité, variations, limites,...

b: Représenter graphiquement f_0.
Comment peut-on en déduire la représentation de f_m ?

2) **a:** Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t)\, dt$.

b: Déterminer l'unique réel k tel que $k.f_m$ soit une densité de probabilité.

c: Soit X_m une variable aléatoire admettant $k.f_m$ pour densité.
Montrer que X_m a une espérance et une variance et calculer ses moments.

d: Déterminer la fonction de répartition F_m de X_m et donner l'allure de la représentation graphique de F_m.

3) Une entreprise vend de la farine conditionnée en sac. Le poids, en kilogrammes, d'un sac quelconque est une variable aléatoire X de même loi que X_{20}.

a: Quelle est la probabilité qu'un sac pèse plus de 20 kilos ? moins de 20 kilos ?

b: Quelle est la probabilité que le poids d'un sac soit compris entre 18 et 22 kilos.

c: Quelle est la probabilité que le poids d'un sac soit supérieur à 21 kilos, sachant qu'il est supérieur à 20 kilos ?

d: Comment choisir α pour que la probabilité de l'événement "l'écart $|X-20|$ entre le poids d'un sac et sa moyenne est inférieur à α" soit supérieur ou égales à $0,9$?

Exercice 60 [Part 8] Entraînement

Deux compagnies **GUEPE** et **ABEILLE** affrètent chacune 1000 navires.
Le coût de remplacement est de 10 millions d'euros pour chaque navire. La probabilité qu'un navire coule est de 0,001.
Soit X le nombre de navires perdus par **GUEPE** et Y le nombre de navires perdus par **ABEILLE**.

1) Déterminer les lois de X et de Y. Calculer la probabilité pour que le nombre de navires perdus par **ABEILLE** soit k. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$.

2) Par quelle loi peut-on approcher les lois de X et de Y ?
Trouver le montant des réserves financières que doit posséder chaque compagnie pour honorer ses contrats avec une probabilité supérieure à 0,999. Donner une méthode d'évaluation de ces réserves.

3) Les 2 compagnies fusionnent. Que se passe-t-il ?

Exercice 61 [Part 0] Entraînement

Soit N et n deux entiers naturels non nuls. On considère $N+1$ urnes numérotées de 0 à N.
L'urne k contient k boules rouges et $N-k$ boules blanches.
On choisit au hasard une urne et on tire avec remise dans cette urne.

On note R_i l'événement : "obtenir une boule rouge au i^{ieme} tirage"
et A_j l'événement : $R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_j$.

1) Calculer $P(R_1)$, $P(A_1)$ et $P(A_2)$.

2) On note p_n la probabilité conditionnelle $P_{A_n}(R_{n+1})$

a: Calculer p_1 en fonction de N.

b: Calculer $P(A_n)$ puis p_n en fonction de N et n.

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

4) Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} p_n$.

Exercice 62 [Part 8] Entraînement (court)

Avant le dépouillement d'une élection où 2 candidats A et B sont en lice, on veut estimer la proportion de voix obtenues par A.
Pour cela, on répète n fois l'expérience suivante : on retire un bulletin des urnes, on note pour qui il est et on le remet.
On note X_n le nombre de bulletins pour A parmi les n

et on note $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.
On note $u_n = P(|Y_n - p| > 0{,}01)$.
Soit a un nombre compris entre 0 et 1. On cherche le nombre de bulletins qu'il suffit de dépouiller pour que $u_n \leqslant a$, c'est à dire pour connaître p à $0{,}01$ près avec un risque d'erreur inférieur à a.
Trouver la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.
Montrer que $V(X_n) \leqslant \dfrac{n}{4}$
Trouver un majorant de u_n ne dépendant que de n.
Comment faut-il choisir n pour réaliser la condition du début avec $a = 0{,}1$?

Exercice 63 [Part 5] HEC 1999 oral voie E

Soit a et b appartenant à $]0,1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} \dfrac{1+a}{2} & \dfrac{1-a}{2} \\ \dfrac{1-b}{2} & \dfrac{1+b}{2} \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^2)$ dont la matrice relativement à la base canonique est M.

1) Déterminer les vecteurs de $\mathbf{R}^2$ invariants par f.

2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. Calculer M^n pour $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = \dfrac{2}{3}$.

3) Un castor bigame possède deux maisons. L'une sur une île au milieu de la Loire, l'autre sur la rive droite. Chaque jour à midi, il essaie de changer de maison : il effectue donc une tentative par jour, mais compte tenu du courant, il n'est pas sûr d'aboutir (auquel cas il rebrousse chemin).
Il a une chance sur 6 de pouvoir quitter l'île pour atteindre la rive et une chance sur 3 de pouvoir quitter la rive pour aller sur l'île.
Sachant que le premier juillet 99, il se dore au soleil levant sur l'île, quelle est la probabilité qu'il soit sur l'île le 3 juillet 99 au soir ? le 20 Août au soir ?

Exercice 64 [Part 0] Entraînement

On admet que, pour tout entier naturel fixé, la série de terme général $\dbinom{n}{k} x^n$ converge absolument pour tout réel x de $]-1,+1[$ et que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Soit p un nombre réel tel que $0 < p < \dfrac{2}{3}$

Dans un pays, la probabilité q_n qu'une famille ait exactement n enfants est $\dfrac{p^n}{2}$ quand $n \geqslant 1$.

Par ailleurs, la probabilité, à chaque naissance d'avoir un garçon est $\dfrac{1}{2}$.

1) Calculer la probabilité q qu'une famille ait au moins un enfant.
Calculer la probabilité q_0 qu'une famille n'ait aucun enfant.

2) Soit n un entier donné ($n \geqslant 1$) et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On considère une famille donnée de n enfants.
Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.

3) On suppose $k \geqslant 1$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait exactement k garçons.

4) Calculer la probabilité pour qu'une famille n'ait aucun garçon.

Exercice 65 [Part 0] Entraînement

Un arbre produit des fleurs ; N désigne le nombre aléatoire de centaine de fleurs pour une saison. $N+1$ suit une loi géométrique de paramètre p

1) Calculer $E(N), V(N)$

2) Une année l'arbre produit 1000 fleurs. Déterminer p pour que $P(N=10)$ soit maximum.

3) La probabilité qu'une fleur donne un fruit est $2/3$. La probabilité qu'un fruit soit mangé avant maturation est $1/4$.
Calculer la probabilité qu'une fleur donne un fruit mur

4) Soit $r \leqslant n$. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $(N=n)$, sachant que r fruits sont arrivés à maturation.

Exercice 66 [Part 5] Entraînement

Cours : Rappeler la définition et les propriétés du coefficient de corrélation linéaire.

On considère un couple de variables aléatoires X et Y suivant la même loi de Bernoulli :

$$P(X=0)=P(Y=0)=q \qquad P(X=1)=P(Y=1)=p=1-q$$

1) Prouver que les données précédentes ne suffisent pas à déterminer la loi du couple (X,Y).

2) Démontrer que l'ensemble des lois possibles pour le couple (X,Y) s'identifie à une partie de l'ensemble des solutions du système linéaire suivant d'inconnues a,b,c,d :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \\ q \\ p \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

3) Par un raisonnement probabiliste, déterminer une solution particulière du système $(\star)$.

4) Toujours par un raisonnement probabiliste, démontrer que la matrice du système $(\star)$ n'est pas inversible.
Déterminer alors une base de son noyau.

5) Quelles sont les lois possibles pour le couple (X,Y) ?

6) Le réel p étant fixé, quelles sont les valeurs possibles pour le coefficient de corrélation linéaire de X et Y ?
On notera en particulier $r_{min}(p)$ la valeur minimale du coefficient de corrélation linéaire.

7) Déterminer $r_{min}\left(\frac{1}{2}\right)$. Comment calculer le minimum de $r_{min}(p)$ lorsque p varie entre 0 et 1 ?

Exercice 67 [Part 7] HEC 1999 oral voie E

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, toutes de même loi uniforme sur le segment $[0,1]$.
Pour tout entier naturel n et tout élément ω de Ω, on réordonne par ordre croissant les réels $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, ..., $X_{2n+1}(\omega)$, et on note $M_n(\omega)$ le terme médian, i.e. le $(n+1)$-eme dans l'ordre croissant.

1) Pour tout réel x de $[0,1]$, exprimer $P(M_n \leqslant x)$ à l'aide d'une somme de termes.

2) En considérant les variables $X'_k = 1 - X_k$ $(k \in \mathbf{N}^*)$, montrer que la variable M_n est d'espérance égale à $\frac{1}{2}$.

3) Prouver l'égalité :

$$E(M_n) = \int_0^1 P(M_n > x)\, dx$$

4) **a:** Pour tous les entiers naturels k et m tels que $0 \leqslant k \leqslant m$, calculer l'intégrale :

$$I_{k,m} = \int_0^1 x^k(1-x)^{m-k}\, dx$$

b: Retrouver ainsi, par un calcul, la valeur de l'espérance de M_n.

Exercice 68 [Part 5] HEC 2001 oral voie E

Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 et 3. Dans cette urne, on effectue des tirages successifs, chaque tirage se déroulant selon le protocole suivant :
on tire au hasard un jeton parmi les 3 et on le replace dans l'urne après avoir changé son numéro par un numéro choisi au hasard entre 1, 2 et 3 (il se peut donc que le jeton garde le même numéro).
On note X_n le nombre de numéros distincts présents dans l'urne après le n^{ieme} tirage. Ainsi $X_0 = 3$.

1) Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance.

2) Pour tout entier naturel n on pose $p_n = P(X_n = 1)$, $q_n = P(X_n = 2)$, $r_n = P(X_n = 3)$.
Pour tout entier naturel n prouver la relation :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

où

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) **a:** Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est constante.

b: Déterminer p_n pour tout entier naturel n.

c: Déterminer r_n pour tout entier naturel n.

d: Déterminer l'espérance de X_n.

4) **a:** Déduire de la question précédente, sans nouveau calcul, que la matrice A admet 1 comme valeur propre et déterminer un vecteur propre associé à cette valeur propre.

b: Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A et que A est non inversible.

5) Comment, à l'aide de la matrice A, retrouver les résultats du 3) ?

Exercice 69 [Part 7] HEC 2002 oral voie E

1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Établir l'égalité :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$$

2) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, possédant une espérance.

a: Pour tout entier n établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y > k) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y = k) - (n+1)P(Y > n)$$

b: Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(Y = k).$

c: En déduire l'égalité : $E(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(Y > k)$

3) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Établir l'égalité :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t)\, dt$$

4) Soit Y une variable possédant une densité notée f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $\mathbf{R}^+$. On suppose que Y possède une espérance.

a: Pour tout réel positif T, établir l'égalité :

$$\int_0^T tf(t)\, dt = -TP(Y > T) + \int_0^T P(Y > t)\, dt$$

b: Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{T\to+\infty} TP(Y>T)$

c: En déduire l'égalité : $E(Y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(X>t)\,dt$

Exercice 70 [Part 0] HEC 2005 oral voie E

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, A, P) et à valeurs dans $\mathbf{N}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $Y(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$ si $X(\omega)$ est pair et $Y(\omega) = \dfrac{1-X(\omega)}{2}$ sinon.

1) Déterminer $[Y=0]$ et, pour chaque $k \in \mathbf{Z}$, $[Y=k]$.

2) Soit $p \in]0,1[$. On suppose que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad P(X=k) = p(1-p)^k$$

Déterminer alors la loi de Y ainsi que son espérance mathématique

Exercice 71 [Part 0] HEC 2005 oral voie E

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n.
On effectue des tirages avec remise tant que les numéros obtenus forment une suite strictement décroissante.

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire X représentant le nombre de tirages effectués.

2) Déterminer son espérance mathématique et la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$

On pourra utiliser sans démonstration la formule suivante :
si X admet une espérance, alors $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$

Exercice 72 [Part 5] Entraînement (court)

On met n jetons numérotées au hasard dans n boites numérotées (un seul jeton dans chaque boite).
Soit X le nombre de coïncidences entre les numéros des jetons et des boites.
Soit X_k la variable valant 1 si le k-ième jeton est dans la k-ième boite et 0 sinon.

1) Déterminer la loi de X_k.

2) Pour i différent de j, déterminer la loi de X_iX_j

3) Déterminer l'espérance et la variance de X

Exercice 73 [Part 5] Entraînement (court)

On considère la fonction Scilab suivante :

```
function y=X(m)
    N:=floor(1+m*rand())
    y=0
    for i =1:N
      y=y+floor(2*rand())
   end
endfunction
```

On fixe $m \in \mathbf{N}^*$.

1) Quelle est la loi suivie par la variable locale N ? Préciser $X(\Omega)$.
Calculer pour tout couple d'entiers (i,k) la probabilité $P_{(N=k)}(X=i)$.
En déduire la loi de X (on ne cherchera pas à simplifier la somme obtenue).

2) Calculer $E(X)$

Exercice 74 [Part 5] Entraînement (court)

Un immeuble de p étages est équipé d'un ascenseur. N personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante.
Soit X le nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On note X_i la variable valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon.

1) Déterminer $P(X_i = 0)$.

2) Calculer $E(X)$.

3) Déterminer pour i différent de j : $P(X_i = 0 \cap X_j = 0)$.
En déduire $P(X_iX_j = 0)$

4) Calculer $V(X)$

Exercice 75 [Part 7] Entraînement (court)

Soit X une variable aléatoire à densité f continue sur $\mathbf{R}$ et strictement positive.

1) Montrer qu'il existe m unique tel que $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$ (m est appelé médiane de X).

2) On suppose que X possède une espérance et une variance.
Exprimer $V(X)$ à l'aide d'une intégrale et en déduire que $|m - E(X)| \leqslant \sqrt{2V(X)}$

Exercice 76 [Part 5] Entraînement

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même Ω, à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que $Y \leqslant X$.
On suppose que X a une espérance et que $P(X = n) > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
On suppose de plus que la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi uniforme sur $[\![0;n]\!]$.

1) Sans chercher à la déterminer, montrer que $X-Y$ et Y ont la même loi.

2) On suppose que $Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre p.

a: En calculant $P(Y=n)-P(Y=n+1)$, déterminer $P(X=n)$.

b: Montrer que $X-Y$ et Y sont indépendantes.

Exercice 77 [Part 7] Hec 2006 oral voie E

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à densités continues.
Soient $U=\min(X,Y)$ et $V=\max(X,Y)$.
Soit F_X, F_Y, F_U et F_V les fonctions de répartition de X, Y, U et V respectivement.

1) Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

2) Montrer que : $\forall t \in \mathbf{R} \quad F_U(t) = 1-(1-F_X(t))(1-F_Y(t))$.

3) Établir une relation analogue entre F_V, F_X et F_Y.

4) On suppose à présent que X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre 1.

a: Quelle est la loi de U ? Que vaut $P(U=X)$?

b: Montrer que V a même loi que $Z=X+\frac{1}{2}Y$. En déduire l'espérance et la variance de V.

Exercice 78 [Part 9] HEC 2006 oral voie E

Soit $\theta \in [-2,2]$ et X une variable aléatoire à densité f_θ définie par $f_\theta(x) = \theta x - \frac{\theta}{2}+1$ si $x \in [0,1]$ et $f_\theta(x)=0$ sinon.

1) Donner la définition et des exemples d'estimateurs.

2) Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera.

3) On admet que : $\forall n \in \mathbf{N} \qquad \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!$
Montrer que la variable aléatoire $Y=-\ln(X)$ admet une espérance et une variance que l'on calculera (on pourra effectuer le changement de variable défini par la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ sur un intervalle adéquat).

4) On considère un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X et on pose $\widehat{X_n} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ et $T_n = 12(\widehat{X_n}-\frac{1}{2})$.
Montrer que T_n est un estimateur sans biais de θ.

Exercice 79 [Part 8] HEC 2006 oral voie E

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1+\ldots+Y_n$.

1) Déterminer la loi de Y_n.

2) Les variables Y_i sont-elles deux à deux indépendantes ?

3) Calculer $E(U_n)$ et $V(U_n)$.

4) Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{U_n}{n}\right)$.

Exercice 80 [Part 5] HEC 2006 oral voie E

Soient X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi définie par :

$$P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{3}$$

On définit alors des variables $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ par :

- $Y_i = 1$ si $X_i = 1$ et $Y_i = 0$ sinon
- $Z_i = 1$ si $X_i = 0$ et $Z_i = 0$ sinon

On pose $T_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $T_1 = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, et $U = T_1 + T_2$.
Déterminer $P_{(T_1=t_1)\cap(T_2=t_2)}(X_i = 1)$.
Déterminer $P_{(U=k)}(T_1 = t_1)$ $(0 \leqslant t_1 \leqslant k \leqslant n)$ et expliquer ce résultat.

Exercice 81 [Part 0] HEC 2006 oral voie E

On dispose de 7 euros. Chaque semaine a lieu une loterie de 100 billets dont 10 sont gagnants. Chaque billet coûte 1 euro.

1) Dans cette question, on veut maximiser la chance de gagner au moins une fois. Discuter l'affirmation “On a intérêt à acheter sept billets la première semaine plutôt que d'acheter un billet pendant sept semaines".

2) On veut maximiser le nombre de billets gagnants achetés. Discuter l'affirmation “On a intérêt à acheter sept billets la première semaine plutôt que d'acheter un billet pendant sept semaines".

Exercice 82 [Part 0] HEC 2006 oral voie E

Vous disposez d'une trousse contenant 10 stylos dont un seul fonctionne.

1) Vous en essayez un (au hasard), puis, s'il y a échec, un deuxième, puis, s'il y a échec, vous remettez le premier et vous tirez au hasard le troisième, puis, s'il y a échec, vous remettez le deuxième et vous tirez au hasard le quatrième, puis, ...
Combien devrez-vous effectuer d'essais de stylo en moyenne pour trouver le bon ?

2) Vous les essayez l'un après l'autre jusqu'à trouver celui qui fonctionne. Combien d'essais de stylo en moyenne ?

3) Même question si on suppose qu'à chaque essai infructueux, vous remettez (à tort) le stylo dans la trousse et que vous tirez au hasard à nouveau.

Exercice 83 [Part 8] HEC 2006 oral voie E

Dans un programme de calcul, l'opérateur décide d'utiliser J chiffres significatifs après la virgule et d'arrondir tous les résultats d'opérations à cette configuration (donc à $0.5\ 10^{-J}$ près) .
On suppose qu'il fait 10^6 opérations élémentaires successives, que les erreurs commises pour chacune sont indépendantes, de loi uniforme sur $[-0.5\ 10^{-J}, 0.5\ 10^{-J}]$ et que l'erreur sur le résultat final est la somme des erreurs commises sur chaque opération.
Déterminer une valeur approchée de la probabilité pour que l'erreur finale soit inférieure ou égale, en valeur absolue, à $0.5\ 10^{-J+3}$. On donne $2F(\sqrt{3}) - 1 \simeq 0.92$ où F est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exercice 84 [Part 0] HEC 2006 oral voie S

Cours : Rappeler la définition et les propriétés du coefficient de corrélation linéaire.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $E = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1) On choisit de façon équiprobable deux éléments A et B de $\mathscr{P}(E)$.
Déterminer la probabilité pour que : $A \subset B$

2) Soit $k \in \mathbf{N}$. Déterminer la probabilité pour que : $Card(A \cap B) = k$.

3) Soit X la v.a.r. définie par : $X = Card(A \cap B)$. Déterminer $E(X)$.

4) Calculer $S = \sum_{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2} Card(A \cap B)$

Exercice 85 [Part 7] HEC 2006 oral voie S

Un composant électronique a une durée de vie X, variable aléatoire positive de densité f. Pour tout réel $t \in \mathbf{R}^{+*}$, on définit la fiabilité de ce composant à l'instant t par

$$R(t) = P(X > t)$$

et on définit le taux de défaillance par

$$h(t) = \lim_{x \to 0} \frac{P_{(t<X)}(t < X \leqslant t + x)}{x}$$

1) Quel lien existe-t-il entre R et t ?

2) Montrer que, pour tout t strictement positif :

$$h(t) = -[\ln(R(t))]' = \frac{f(t)}{R(t)}$$

3) On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ. Montrer que, pour s et t strictement positifs, on a

$$P_{(X>t)}(X > t + s) = P(X > s)$$

4) Montrer qu'un composant qui a un taux de défaillance constant a une durée de vie exponentielle.

5) On considère n composants électroniques de durée de vie indépendantes et de même loi X. On note $N(t)$ le nombre de composants encore en marche à la date t. Quelle est la loi de $N(t)$?
Montrer que, pour tout $t > 0$, on a

$$h(t) = \lim_{x \to 0} \frac{E(N(t)) - E(N(t+x))}{xE(N(t))}$$

Commenter ce résultat.

Exercice 86 [Part 7] Entraînement

Pour une variable aléatoire X de densité f, possédant une espérance et telle que

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \int_x^{+\infty} f(t)\, dt \neq 0$$

on pose :

$$M(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t f(t)\, dt}{\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt} = \frac{H(x)}{G(x)}$$

1) Montrer que $M(x) \geqslant x$.

2) On suppose que, dans cette question seulement, f est définie par :
$f(x) = \dfrac{a}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{a+1}$ si $x \geqslant x_0$ et 0 sinon $\quad (a > 1)$.
Calculer $M(x)$.

3) On suppose dans cette question que $X(\Omega) = [x_0, +\infty[$ et que $M(x) = kx$ pour $x \geqslant x_0$ où $k > 1$.

a: Montrer que H et G sont dérivables et calculer leur dérivée.

b: Montrer que $G(x) = \dfrac{1-k}{k} xG'(x)$ pour $x \geqslant x_0$.

c: Pour $x \geqslant x_0$, on pose $I(x) = x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$.
Calculer $I'(x)$ et en déduire la valeur de $G(x)$.

Exercice 87 [Part 9] HEC 2007 oral voie E

Question de cours : Définition d'un estimateur ; du biais et du risque quadratique.

On considère n variables aléatoires réelles ($n \geqslant 2$), indépendants $X_1, \ldots X_n$, de même loi de densité :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{\theta^3} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre strictement positif. On pose $S = X_1 + \ldots + X_n$ et $T = Max(X_1, \ldots, X_n)$.

1) Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

2) Calculer $P(T \leqslant t)$. En déduire une densité de T, puis $E(T)$ et $V(T)$.

3) On suppose maintenant que θ est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.

a: Montrer qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $S' = aS$ et $T' = bT$ soient des estimateurs sans biais de θ. Calculer $V(S')$ et $V(T')$.

b: Entre les deux estimateurs de θ, S' et T', lequel doit-on préférer ?

Exercice 88 [Part 7] HEC 2007 oral voie E

On considère deux types de composants électroniques, dont la durée de vie X, exprimée en heures, est une variable aléatoire de densité f telle que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{t^2} & \text{si } t \geqslant 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Rappeler les qualités d'une densité de probabilité ; en déduire la valeur du réel c.

2) Déterminer les réels m pour lesquels $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$.

3) Quelle est la probabilité que, sur un lot de 5 composants du type précédent, 3 au moins fonctionnent durant au moins 15 heures ?
Deux machines A et B sont équipées de composants du type précédent. Plus précisément :

— A contient deux composants et cesse de fonctionner dès que l'un de ces composants est défectueux ;

— B contient également deux composants mais un seul de ces composants suffit à le faire fonctionner.

On note T_A et T_B les durées de fonctionnement de ces machines.

4) Déterminer une densité pour chacune des variables T_A et T_B.

5) Pour chacune des variables T_A et T_B, indiquer si elle possède une espérance et, le cas échéant, la calculer.

Exercice 89 [Part 0] HEC 2007 oral voie E

Question de cours : Rappeler la formule des probabilités totales.

On lance deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité p_1 et la pièce 2 donne pile avec une probabilité p_2. On effectue les lancers de la façon suivante : on choisit une pièce au hasard et on lance la pièce choisie. Si on obtient pile, on relance la même pièce et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on obtienne face ; à ce moment, on change de pièce ; plus généralement ; dès que l'on obtient face, on change de pièce. On suppose que p_1 et p_2 sont dans $]0,1[$.

1) Quelle est la probabilité de lancer la pièce 1 au n-ième lancer ?

2) Quelle est la probabilité, notée r_n, d'obtenir pile au n-ième lancer ?

3) Calculer : $\quad L = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n.$

4) Dans cette question, on suppose $p_1 = \dfrac{1}{3}$ et $p_2 = \dfrac{1}{6}$. Écrire un script Scilab permettant de calculer la valeur du rang n_0 à partir duquel : $\quad |r_n - L| \leqslant 10^{-6}$.

Exercice 90 [Part 7] HEC 2007 oral voie E

Soit $\alpha > 0$ et $x_0 > 0$ et f la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{\alpha}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1} \quad \text{si } x \geqslant x_0 \qquad \text{et } f(x) = 0 \text{ sinon}$$

1) **a:** Donner la définition d'une variable aléatoire à densité et vérifier que la fonction f est bien la densité de probabilité d'une variable réelle X.
Déterminer la fonction de répartition de X et donner l'allure de son graphe.
On dit que X suit une loi de Pareto de paramètres x_0 et α

b: Pour quelles valeurs de α la variable X admet-elle une espérance et une variance ?
Calculer l'espérance de X quand elle existe.

c: On suppose $\alpha > 1$ et on pose, pour tout $x > x_0$:

$$M_X(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t f(t)\, dt}{\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt}$$

Calculer $M_X(x)$.

2) On se propose d'établir une réciproque de la propriété précédente. Soit x_0 et Y une variable aléatoire à valeurs dans $[x_0, +\infty[$, de densité h continue, à valeurs strictement positives, admettant une espérance et telle qu'il existe un réel $k > 1$ vérifiant :

$$\forall x > x_0 \qquad M_Y(x) = \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} t h(t)\, dt}{\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\, dt} = kx$$

a: On pose, pour tout $x > x_0$, $\qquad G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\, dt.$

Montrer que : $\quad G(x) = \dfrac{1-k}{k} x G'(x).$

b: En calculant, pour tout $x > x_0$, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$, déterminer la valeur de $G(x)$, puis la fonction de répartition de Y.
Quelle loi retrouve-t-on ?

Exercice 91 [Part 5] HEC 2007 oral voie E

Une coccinelle se déplace sur un tétraèdre régulier (c'est à dire une pyramide dont chacune des 4 faces est un triangle) $PQRS$ en longeant les arêtes. Elle est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet P.
On suppose que si elle se trouve sur un sommet à l'instant n, elle sera sur l'un des trois autres sommets à l'instant $n+1$ de façon équiprobable.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note p_n (respectivement q_n, r_n et s_n) la probabilité que la coccinelle se trouve sur le sommet P (respectivement Q, R et S) à l'instant n.

1) On définit la matrice colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \\ s_n \end{pmatrix}$.
Déterminer une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$, indépendante de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

2) Montrer que cette matrice est diagonalisable.

3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$; donner une expression de p_n, q_n, r_n et s_n en fonction de n.

4) On note T le temps nécessaire à la coccinelle pour visiter au moins 3 sommets distincts du tétraèdre.
Déterminer la loi de T. Calculer son espérance.

5) On note U le temps nécessaire à la coccinelle pour visiter tous les sommets du tétraèdre.
Montrer que pour $\ell \geqslant 3$, $\quad P(U = \ell) = \dfrac{2^{\ell-1} - 2}{3^{\ell-1}}$.

6) Déterminer l'espérance de U, si elle existe.

Exercice 92 [Part 7] Entraînement

Question de cours : Définition d'une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b] \quad (a < b)$.
Donner une densité, la fonction de répartition d'une telle loi. Simulation.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
On pose $Y = Min(X, 1-X)$ et $Z = Max(X, 1-X)$.

1) Expliciter la fonction de répartition de Y. En déduire une densité, puis $E(Y)$ si elle existe.

2) Expliciter la fonction de répartition de Z. En déduire une densité, puis $E(Z)$ si elle existe.

3) Même question pour $R = \dfrac{Y}{Z}$.

4) Écrire un script Scilab permettant d'obtenir une simulation de la variable Z et l'estimation de son espérance, si elle existe.

Exercice 93 [Part 7] HEC 2007 oral voie S

Pour une variable à densité, énoncer les propriétés caractéristiques d'une fonction de répartition.

Les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
On pose $X = -\ln\left(\dfrac{2U}{1+U}\right)$.

1) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

2) En déduire une densité de la variable X.

3) Calculer $E(X)$ en justifiant son existence.

4) Soit V une variable aléatoire de Bernoulli, de paramètre $\dfrac{1}{2}$, indépendante de U.
Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = VX + (1-V)X^2$.

5) Écrire un algorithme de simulation de la variable Y

6) Soit B la variable de Bernoulli de paramètre $\alpha = P(U > 1/2)$.
On pose $Z = BX$.

a: Z est-elle une variable à densité ?

b: Écrire un algorithme de simulation de Z

Exercice 94 [Part 5] HEC 2008 oral voie E

1) **Question de cours :** donner le formule de la variance d'une somme finie de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{-1,1\}$, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p = P(X_n = 1)$, et on suppose que $p \in]0,1[$.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $Y_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$.

a: Déterminer les lois de Y_2 et de Y_3.

b: On pose, pour $n \geqslant 1$, $P(Y_n = 1) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, puis la valeur de p_n, pour tout $n \geqslant 1$.

c: Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles les variables Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?

3) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.
(Indication : on pourra se ramener à des variables X_i' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ indépendantes suivant une loi de Bernoulli).

4) Écrire une fonction Scilab permettant de simuler la loi de S_n.

Exercice 95 [Part 5] HEC 2008 oral voie E

1) **Question de cours :** définition et propriétés de la loi de Bernoulli et de la loi binomiale.

Une urne contient $2n$ boules ($n \in \mathbf{N}^*$) de couleurs toutes différentes. La moitié d'entre elles sont marquées du chiffre zéro et les autres sont numérotées de 1 à n. On extrait simultanément n boules de cette urne, obtenant ce qu'on appelle une poignée. On suppose que toutes les poignées sont équiprobables. Pour i entier compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire réelle qui prend la valeur 1 si la boule i se trouve dans la poignée et 0 sinon.

2) Déterminer la loi de probabilité de X_i.

3) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, calculer la covariance du couple (X_i,X_j).

4) On note S la variable aléatoire réelle prenant pour valeur la somme des numéros portés par les boules figurant dans la poignée.

a: Exprimer S en fonction X_1, X_2, ..., X_n.

b: En déduire l'espérance et la variance de S.

5) On désigne par Z la variable aléatoire réelle donnant le nombre de boules portant le numéro 0 au sein de la poignée. Donner la loi de probabilité de Z, puis son espérance.

Exercice 96 [Part 9] HEC 2008 oral voie E

1) **Question de cours :** définition d'un estimateur et définir la notion de risque quadratique.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On sait que N est au moins égal à deux, mais on ne connaît pas sa valeur exacte et on cherche à l'estimer. Pour cela, on effectue n tirages avec remise ($n \in \mathbf{N}^*$) et on note Z_k le numéro de la boule obtenue au k-ième tirage ($1 \leqslant k \leqslant n$). On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

2) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Z_k$.

Déterminer l'expression d'un estimateur sans biais de N, fonction de M_n et dont la suite des variances converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3) On note $S_n = \text{Max}(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$.

a: Déterminer la fonction de répartition de S_n.

b: Montrer que pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1,2,\ldots,N\}$, on a la relation :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{N} P(Y \geqslant k)$$

c: En déduire que : $\quad E(S_n) \geqslant N - \dfrac{N}{n+1}$

d: En déduire que S_n est un estimateur de N, dont l'espérance converge vers N lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 97 [Part 5] HEC 2009 oral voie E

On étudie la vente d'un certain type de produit sur internet sur trois sites A, B, C et on fait les constatations suivantes :

- si un client choisit le site A pour un achat, il choisit indifféremment A, B ou C pour l'achat suivant,
- si un client fait un achat auprès du site B, il fait l'achat suivant sur le même site B,
- si un client fait un achat sur le site C, il choisira pour l'achat suivant le site A avec une probabilité $1/12$, le site B avec une probabilité $7/12$ et le site C avec une probabilité $1/3$.

Au départ le client choisit au hasard l'un des trois sites.
On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités pour que, au n-ième achat, le client se fournisse respectivement auprès de A, B et C.

1) **Question de cours :** Énoncer la formule des probabilités totales.

2) Quelles sont les valeurs de p_1, q_1 et r_1 ?

3) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, donner une relation entre p_n, q_n et r_n.

4) Exprimer p_{n+1}, respectivement q_{n+1} et r_{n+1}, en fonction des trois réels p_n, q_n et r_n.

5) Pour $n \geqslant 2$, exprimer p_n en fonction de r_n et r_{n-1}.

6) Prouver que la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire. Donner l'expression de r_n, puis p_n et q_n en fonction de n.

7) Étudier la convergence des trois suites $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, $(p_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Exercice 98 [Part 0] HEC 2009 oral voie E

1) **Question de cours :** Loi géométrique, espérance et variance.

2) Soit x un réel de $]0, 1[$.

a: Établir, pour tout $n \in \mathbf{N}*$, l'égalité :

$$\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

b: Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

c: En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ ainsi que l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

3) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ qui suit une loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$.
On pose : $Y = \dfrac{1}{X}$.

a: Déterminer $Y(\Omega)$ et la loi de probabilité de Y.

b: Établir, pour tout entier m de $\mathbf{N}^*$, l'existence du moment d'ordre m, $E(Y^m)$, de Y.

c: Calculer $E(Y)$ en fonction de p.

Exercice 99 [Part 5] HEC 2009 oral voie E

Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. Les proportions respectives de ces boules sont b pour les blanches, n pour les noires et r pour les rouges $(b+n+r=1)$.

On effectue dans cette urne des tirages successifs indépendants avec remise. Les proportions des boules restent ainsi les mêmes au cours de l'expérience.

On modélise l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, p)$.

1) **Question de cours :** Loi d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes. Lois marginales.

2) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on note Z_k la variable aléatoire qui prend la valeur $+1$ si une boule blanche est tirée au k-ième tirage, -1 si une boule noire est tirée au k-ième tirage et 0 si une boule rouge est tirée au k-ième tirage. On note $S_k = Z_1 + \cdots + Z_k$.

a: Trouver la loi de probabilité de S_1. Calculer son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de S_k.

b: Pour tout réel t strictement positif et pour tout k de $\mathbf{N}^*$, on pose $g_k(t) = E(t^{S_k})$. Expliciter $g_k(t)$ en fonction de t et de k.

c: Montrer que $g'_k(1) = E(S_k)$ et retrouver le résultat de la question (a).

3) **a:** On note X_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule blanche sort pour la première fois. Trouver la loi de probabilité de X_1. Calculer son espérance et sa variance.

b: Sachant que $X_1 = k$, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge à chacun des $k-1$ premiers tirages ?

c: On note W la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées avant l'obtention de la première boule blanche. Quelle est la loi conditionnelle de W sachant $X_1 = k$?

d: En déduire la loi de W (sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer).

4) On note Y_1 la variable aléatoire représentant le numéro du tirage auquel une boule noire sort pour la première fois.

a: Trouver, pour tout couple d'entiers strictement positifs (k,l), la probabilité de l'événement $\{X_1 = k\ ,\ Y_1 = l\}$ (On pourra distinguer selon que $k > l$, $k = l$ ou $k < l$). Les variables aléatoires X_1 et Y_1 sont elles indépendantes ?

b: On se place, pour cette question, dans le cas particulier où $r = 0$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de boule rouge). Calculer alors la covariance de X_1 et Y_1.

Exercice 100 [Part 5] HEC 2010 oral voie E

Soit n un entier naturel non nul. Un jardinier plante n bulbes de tulipes dans son jardin. Chaque bulbe a une probabilité $p \in]0,1[$ de donner une fleur. Lorsqu'une tulipe fleurit une année, elle refleurit toutes les années suivantes. Par contre si un bulbe n'a pas donné de fleur une année, il a toujours une probabilité p de donner une fleur l'année suivante. On suppose de plus que les floraisons des différents bulbes sont indépendants. On pose $q = 1 - p$.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$.
On appelle T la variable aléatoire réelle correspondant au nombre d'années nécessaires pour que tous les bulbes fleurissent.

1) *Question de cours :* Loi géométrique, définition, propriétés.

2) Pour tout $h \in [\![1,n]\!]$, on définit la variable aléatoire T_h égale au nombre d'années nécessaires pour que le h-ième bulbe fleurisse.

a: Déterminer la loi de T_h.

b: Exprimer T en fonction de T_1, T_2, ...,T_n. En déduire la loi de T.

3) **a:** Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k N (q^k)^N$.

b: Calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum\limits_{j=1}^{N} (q^k)^{j-1}$

c: En déduire $E(T)$ sous forme d'une somme.

Exercice 101 [Part 7] HEC 2010 oral voie E

I) *Question de cours :* Comparaison de fonctions au voisinage de l'infini.
II) Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ à valeurs réelles telle que :

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad g(x) = x(\ln x)^2$$

1) Montrer que g réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$.
Soit h la bijection réciproque de la restriction de g à l'intervalle $]1,+\infty[$.

2) **a:** Montrer que : $\quad \forall x > 0 \quad \ln(h(x)) + 2\ln(\ln(h(x)) = \ln x$

b: En déduire un équivalent simple de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

III) Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2g(|x|)} & \text{si } |x| < \dfrac{1}{e} \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Vérifier que f est bien une densité.

2) Montrer que X possède une espérance et la calculer.

3) X possède-t-elle une variance ?

Exercice 102 [Part 5] HEC 2010 oral voie E

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$, qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, avec $n \geqslant 2$ et $0 < p < 1$. On définit sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$ une variable aléatoire Y de la façon suivante :

- pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la réalisation de l'événement $(X = k)$ entraîne celle de l'événement $(Y = k)$
- la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 0)$ est la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1) *Question de cours :* Le modèle binomial.

2) Déterminer la loi de probabilité de Y.

3) Calculer l'espérance $E(Y)$.

4) **a:** Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant $(X \neq 0)$.

b: Calculer l'espérance, notée $E(Y/X \neq 0)$, de la loi conditionnelle de Y sachant $(X \neq 0)$.

Exercice 103 [Part 7] HEC 2010 oral voie E

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$.

1) *Question de cours :* Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète finie ; définition et interprétation.

2) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une variable aléatoire X (discrète ou possédant une densité) prenant toutes ses valeurs dans l'intervalle $[a,b]$ et ayant un moment d'ordre 2.

a: Montrer que, pour tout réel λ, on a la relation : $V(X) \leqslant E([X-\lambda]^2)$.

b: En déduire que : $V(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

3) Dans la suite, X est une variable discrète ayant un moment d'ordre 2.

a: On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{a,b\}$, c'est à dire :

$$\mathbf{P}(X = a) = \mathbf{P}(X = b) = \frac{1}{2}$$

Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité précédente.

b: Étude d'une réciproque : on suppose que $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
Montrer que $X(\Omega) = \{a,b\}$, puis que X suit une loi uniforme sur $\{a,b\}$.

4) Que signifie le résultat précédent ? (on pourra s'appuyer sur l'interprétation de la variance).

Exercice 104 [Part 5] HEC 2010 oral voie E

Soient n un entier supérieur ou égal à 2, et p et q deux réels de $]0,1[$ tels que $p+q=1$. On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$. La loi du couple (X,Y) est donnée par :
Pour tout (j,k) tels que $0 \leqslant j \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\mathbf{P}([X=j] \cap [Y=k]) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k=j,\ j \neq 0 \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } k \neq j \text{ et } j \neq 0 \end{cases}$$

1) *Question de cours :* Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.

2) **a:** Déterminer les lois marginales de X et Y respectivement.
b: Calculer $E(X)$

3) Soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n$
a: Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X=j)$.
b: Calculer l'espérance conditionnelle, notée $E(Y/X=j)$ de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=j)$.

4) **a:** Montrer que, pour tout $q \in]0,1[$, on a :

$$\mathbf{P}([X=1] \cap [Y=1]) \neq \mathbf{P}([X=1]) \times \mathbf{P}([Y=1])$$

Conclure.
b: Calculer $Cov(X,Y)$. Montrer qu'il existe une valeur de q pour laquelle $Cov(X,Y) = 0$.
c: Conclure.

Exercice 105 [Part 7] HEC 2010 oral voie E

1) *Question de cours :* Moment d'ordre r d'une variable aléatoire à densité ; définition, existence.

2) Montrer qu'il existe deux réels A et B, indépendants de x tels que, pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$.

3) On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x(x+1)} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k est un paramètre réel.

a: Déterminer k pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X.
Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

b: X admet-elle une espérance ?

4) **a:** Déterminer la loi de $T = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor X \rfloor$ désigne la partie entière de X.

b: En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$.

5) Déterminer la loi de $Z = \dfrac{1}{X}$.

6) **a:** Déterminer la loi de $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

b: Montrer que, pour tout entier $r \geqslant 1$, Y admet un moment d'ordre r.

c: Calculer $E(Y)$.

Exercice 106 [Part 9] HEC 2010 oral voie E

1) *Question de cours :* Définition d'un estimateur, d'un estimateur sans biais d'un paramètre réel inconnu θ.

Soit Z une variable aléatoire discrète d'espérance $E(Z) = \theta \quad (\theta \in \mathbf{R}^*)$ et de variance $V(Z) = 1$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on dispose d'un n-échantillon $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Z, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$.

On pose : $\quad \overline{Z_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} Z_j$. On suppose que θ est inconnu.

2) **a:** La variable $\overline{Z_n}$ est-elle un estimateur sans biais de θ ?

b: Quel est le risque quadratique de $\overline{Z_n}$ en θ ?

3) Soient β_1, β_2, ..., β_n, des réels non nuls et $Y_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j Z_j$.

a: Déterminer la condition que doivent vérifier les réels β_1, β_2, ..., β_n pour que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}^*$ on ait : $E(Y_n) = \theta$?

On suppose dans la suite, que cette condition est vérifiée.

b: Calculer $Cov(\overline{Z_n}, Y_n)$ et $V(\overline{Z_n})$, où Cov désigne la covariance et V la variance.
En déduire que $V(\overline{Z_n}) \leqslant V(Y_n)$. Interprétation.

4) Soient α_1, α_2, ..., α_n des réels non nuls.
On définit la variable aléatoire U_n par : $\quad U_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j Z_j$,
et on suppose que $E(U_n) = \theta$ et $V(U_n) = \frac{1}{n}$.
Montrer que $U_n = \overline{Z_n}$ avec une probabilité égale à 1.

Exercice 107 [Part 5] HEC 2010 oral voie BL

1) Soit N un entier de $\mathbf{N}^*$. On lance N fois une pièce équilibrée. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbf{p})$ l'espace probabilisé associé à cette expérience.
On désigne par X (respectivement Y) la variable égale au nombre de “face" (respectivement de “pile") obtenus.

a: *Question de cours :* Définition de la covariance de deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$.

b: Calculer $Cov(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Dans la suite de l'exercice, le nombre N de parties est une variable aléatoire définie sur ω.
On modélise l'expérience par l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$.

2) On suppose que N suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a: Calculer $\mathbf{P}(X = 0)$.

b: Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3) Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

a: Déterminer les lois de X et de Y. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

b: En déduire la valeur de $Cov(X,Y)$.

c: Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 108 [Part 8] HEC 2011 oral voie E

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$$

1) *Question de cours :* rappeler la définition d'une densité de probabilité.

2) Vérifier que f est une densité de probabilité.
Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont f est une densité de probabilité.

3) **a:** Déterminer l'espérance $E(X)$ de X.

b: A-t-on, pour tout réel s, pour tout réel t tels que $t \geqslant s$,

$$P_{[X>s]}([X > t]) = P([X > t - s])?$$

4) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, on pose :

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)(1 + t.e^{-n|t|})\, dt$$

Montrer que H_n est une fonction de répartition.

5) Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de fonction de répartition H_n. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers X.

Exercice 109 [Part 7] HEC 2011 oral voie E

1) *Question de cours :* variable aléatoire à densité. Propriétés de sa fonction de répartition.

On considère une densité de probabilité f, nulle sur $\mathbf{R}^-$, continue sur $\mathbf{R}^{+*}$, associée à une variable aléatoire X. On suppose que X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et on note F la fonction de répartition de X.

2) Montrer que F possède une unique primitive s'annulant en 0. On note H_f cette fonction. Montrer que H_f est de classe C^1.

3) Donner H_f dans les cas suivants :

a: $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$.

b: $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ si $x > 0$.

c: $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{2(1+x)^{3/2}}$ si $x > 0$.

Dans chacun des cas, étudier l'existence d'une direction asymptotique et d'une asymptote oblique pour la courbe représentative de H_f lorsque x tend vers $+\infty$.

4) On suppose que X admet une espérance ℓ.

a: En intégrant par parties $\displaystyle\int_0^x tf(t)\, dt$, montrer que $H_f(x) \sim x$ au voisinage de $+\infty$.
En déduire que la courbe représentative de H_f admet une direction asymptotique en $+\infty$.

b: A-t-on toujours une asymptote ?

Exercice 110 [Part 5] HEC 2011 oral voie E

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

1) *Question de cours :* Indépendance de n variables aléatoires discrètes ($n \in \mathbf{N}^*$).

2) On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir « Pile »est égale à p. On notera « P »et « F »les événements (Obtenir « Pile ») et (Obtenir « Face »).
On définit les variables aléatoires X_1 et X_2 de la façon suivante : X_1 vaut k si le premier « Pile »de rang impair s'obtient au rang $2k-1$ (entier qui représente le k-ième nombre impair de $\mathbf{N}^*$) ; X_2 vaut k si le premier « Pile »de rang pair s'obtient au rang $2k$ (entier qui représente le k-ième nombre pair de $\mathbf{N}^*$).
Par exemple, si l'on obient « (F,P,F,F,F,P,P,...) », alors X_1 prend la valeur 4 et X_2 prend la valeur 1.
On posera $X_1 = 0$ (respectivement $X_2 = 0$) si « Pile »n'apparaît à aucun rang impair (respectivement à aucun rang pair).

a: Prouver que $P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = 0$.

b: Calculer $P(X_1 = 1)$ et $P(X_2 = 1)$. Déterminer les lois de X_1 et X_2. Les variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

c: Déterminer la loi de la variable aléatoire Y égale au minimum de X_1 et de X_2.

3) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.

a: Montrer que la variable aléatoire $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$ suit une loi géométrique ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel x.).

b: Montrer que les variables Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice 111 [Part 8] HEC 2011 oral voie E

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{n}$ (d'espérance n).
Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soient :

$$Y_n = \lfloor X_n \rfloor \quad \text{et} \quad Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$$

1) *Question de cours :* Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2) Déterminer la loi de Y_n et son espérance.

3) Déterminer $Z_n(\Omega)$ et montrer que

$$\forall t \in [0,1] \quad P(Z_n \leqslant t) = \frac{1-e^{-\frac{t}{n}}}{1-e^{-\frac{1}{n}}}$$

4) Montrer que la suite de variables aléatoires (Z_n) converge en loi vers une variable aléatoire Z dont on précisera la loi.

5) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et N_n la variable aléatoire définie par :

$$N_n = card\left\{k \in [\![1,n]\!] \text{ tel que } X_k \leqslant \frac{k}{n}\right\}$$

où $card(A)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble A.

a: Reconnaître la loi de N_n et donner son espérance et sa variance.

b: Montrer que la suite de variables aléatoires (N_n) converge en loi vers une variable aléatoire N dont on précisera la loi.

Exercice 112 [Part 9] HEC 2011 oral voie E

1) *Question de cours :* Estimateur, biais, risque quadratique.

Soit a, b,et c trois réels strictement positifs et soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad f(x) = c \text{ si } x \in [0,a], \quad f(x) = \frac{b}{x^4} \text{ si } x \in [a,+\infty[$$

2) Déterminer b et c en fonction de a pour que f soit une densité de probabilité continue sur $\mathbf{R}^+$.
On suppose b et c ainsi définis dans la suite de l'exercice et X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ de densité f.
Donner une allure de la représentation de f.

3) Pour quelles valeurs de $k \in \mathbf{N}^*$, X admet-elle un moment d'ordre k.

4) Déterminer l'espérance et la variance de X si elles existent.

5) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. On pose :

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

a: Montrer que (T_n) est un estimateur de a.

b: Construire à partir de (T_n) un estimateur (S_n) sans biais de a.

c: Quel est le risque quadratique de (S_n) ?

Exercice 113 [Part 5] HEC 2013 oral voie E

1) **Question de cours :** le schéma binomial.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\quad W_n = \sum_{k=1}^{n} kX_k \quad$ et $\quad s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) **a:** Calculer l'espérance $E(W_n)$ et la variance $V(W_n)$ de la variable W_n.

b: Calculer les probabilités $P(W_n = 0)$ et $P(W_n = s_n)$.

c: Calculer suivant les valeurs de n, la probabilité $P(W_n = 3)$.

3) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, s_n]\!]$, on a : $\quad P(W_n = k) = P(W_n = s_n - k)$.

4) **a:** Déterminer pour tout $j \in [\![0, s_n]\!]$, la loi de probabilité conditionnelle de W_{n+1} sachant $(W_n = j)$.

b: En déduire les relations :

$$P(W_{n+1} = k) = \begin{cases} \frac{1}{2}P(W_n = k) & \text{si } k \leqslant n \\ \frac{1}{2}P(W_n = k) + \frac{1}{2}P(W_n = k - n - 1) & \text{si } n + 1 \leqslant k \leqslant s_n \\ \frac{1}{2}P(W_n = k - n - 1) & \text{si } s_n + 1 \leqslant k \leqslant s_{n+1} \end{cases}$$

Exercice 114 [Part 8] HEC 2013 (année 0) oral voie E

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\qquad Y_n = \lfloor X_n \rfloor \quad$ et $\quad Z_n = X_n - Y_n$

1) **Question de cours :** Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2) Déterminer la loi de Y_n et son espérance.

3) Déterminer $Z_n(\Omega)$ et montrer que :

$$\forall t \in [0, 1] \qquad P(Z_n \leqslant t) = \frac{1 - e^{-t/n}}{1 - e^{-1/n}}$$

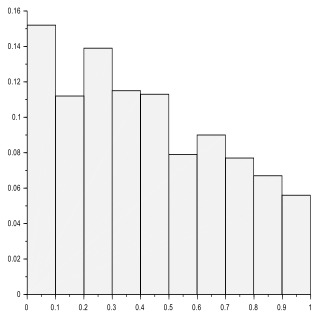
4) Écrire un script Scilab permettant de saisir l'entier n au clavier, de simuler Z_n, d'obtenir une échantillon de 1000 valeurs de Z_n ainsi simulée et d'en tracer un histogramme avec 10 classes.
On exécute ce script trois fois en donnant successivement 1, 50, et 100 comme valeurs de n. On obtient les trois graphiques suivants.

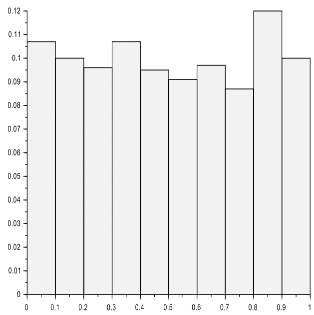
Interpréter les résultats de ces graphiques, faire une conjecture, puis la prouver.

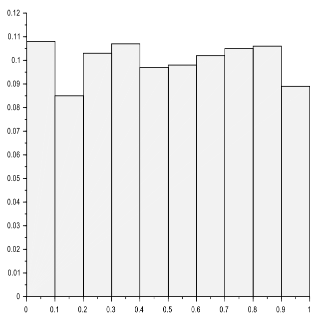
5) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et N_n la variable définie par :

$$N_n = \text{card}\left\{k \in [\![1; n]\!], \quad X_k \leqslant \frac{k}{n}\right\}$$

a: Reconnaître la loi de N_n, donner son espérance et sa variance.







b: Montrer que la suite (N_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

c: Proposer un programme Scilab permettant de mettre le phénomène précédent en évidence.

Exercice 115 [Part 8] HEC 2016 oral voie E

1) **Question de cours :** loi faible des grands nombres.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de loi uniforme sur $[0,1]$.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a: Déterminer la fonction de répartition de U_n.

b: Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $P(U_n \geqslant \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3) Compléter la deuxième ligne du code Scilab suivant pour que la fonction `minu` simule la variable U_k, pour la valeur k du paramètre.

```
function u=minu(k)
   x= ...
   u=min(x)
endfunction
```

4) Soit $p \in]0,1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$P(Z \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} P(U_k \leqslant x)$$

(on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

a: Justifier, pour tout $x \in]0,1[$, l'égalité : $P(Z \leqslant x) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$.

b: En déduire une densité de Z.

5) **a:** Justifier que le fonction Scilab suivante fournit une simulation de la variable Z de la question précédente.

```
function z=geomin(p)
    z=minu(grand(1,1,'geom',p))
endfunction
```

b: De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p=0.5
R=[]
for k=1:10000
    R=[R,geomin(p)]
end
disp(mean(R))
```

Exercice 116 [Part 7] HEC 2017 oral voie E

1) **Question de cours :**

a: Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

b: Donner un programme Scilab permettant de représenter la fonction partie entière sur l'intervalle $\left[-\dfrac{5}{2}, +\dfrac{5}{2}\right]$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ dont une densité est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} e^{-t/n} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Reconnaître la loi de X_n, puis en donner l'espérance et la variance.

3) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = P(|X_n - E(X_n)| < 1)$.

a: Montrer que $u_n = (e^{2/n} - 1)e^{-(n+1)/n}$.

b: Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, de la forme $\dfrac{\alpha}{n}$ où α est un réel que l'on déterminera.

4) Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on considère l'événement $A_k = \left[k + \dfrac{1}{2} < X_n < k+1\right]$.

a: Exprimer l'événement $B_n = \left(X_n - \lfloor X_n \rfloor > \dfrac{1}{2}\right)$ en fonction des événements A_k ($k \in \mathbf{N}$).

b: Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $v_n = P(B_n)$. Calculer v_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

5) On suppose désormais que les variables X_1, X_2, $\dots$, X_n, $\dots$ sont indépendantes et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

a: Déterminer la loi de M_n.

b: Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $w_n = P\left(|M_n - E(M_n)| < 1\right)$. Calculer w_n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

Chapitre 2

Questions courtes

2.1 Algèbre

Question 1 [Part 4] Entraînement

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension finie. On suppose que $f^2 = f$. Montrer que f est diagonalisable.

Question 2 [Part 4] Entraînement

Déterminer les coefficients de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b' & c' \\ 1 & b'' & c'' \end{pmatrix}$ en sachant que A admet comme vecteurs propres $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 3 [Part 1] HEC 1998 oral voie E

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $A\ {}^tA\ A = I_n$. Montrer que A est symétrique, puis déterminer A.

Question 4 [Part 4] HEC 1998 oral voie E

A et B sont deux matrices semblables de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose que A est inversible. La matrice B est-elle inversible ?
Prouver qu'il existe deux matrices X et Y de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, telles que $XY = A$ et $YX = B$.
Réciproquement, on suppose qu'il existe deux matrices X et Y de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, telles que $XY = A$ et $YX = B$, prouver que A et B sont semblables.

Question 5 [Part 4] HEC 1998 oral voie E

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle inversible ? diagonalisable ? Déterminer les sous espaces propres.

Question 6 [Part 4] HEC 1998 oral voie E

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Cette matrice est-elle diagonalisable ? Déterminer son rang, puis ses éléments propres.

Question 7 [Part 1 (Scilab)] HEC 1998 oral voie E

Proposer une fonction écrite en Scilab permettant de calculer le coefficient $\binom{n}{p}$

Question 8 [Part 4] HEC 2005 oral voie E

À tout triplet de nombres réels (a,b,c), on associe la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

1) Une telle matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ? inversible ?

2) Calculer $(M - I_3)^n$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

3) Déterminer M^n en fonction de I_3, M et M^2, pour $n \in \mathbf{N}$ puis pour $n \in \mathbf{Z}$

Question 9 [Part 4] Hec 2005 oral voie E

1) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

2) Déterminer une matrice P inversible et trois réels a, b et c tels que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Question 10 [Part 1] Entraînement

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.

1) Montrer que $\dim Im(f+g) \leqslant \dim Imf + \dim Img$.

2) On suppose $f+g$ bijectif et $g \circ f = 0$.
Déterminer $\dim Imf + \dim Img$.

Question 11 [Part 4] HEC 2006 oral voie S

Soit M la matrice de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que M^n soit inversible.

2) Déterminer les entiers $n \in \mathbf{N}$ tels que M^n soit diagonalisable.

Question 12 [Part 4] HEC 2006 oral voie S

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont valeurs propres. Montrer que f est diagonalisable.

Question 13 [Part 4] HEC 2007 oral voie E

On considère l'endomorphisme de $\mathbf{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est diagonalisable.

2) On admet que les valeurs propres de M sont 2 et -2.
Calculer M^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Question 14 [Part 1] HEC 2007 oral voie E

1) Donner s'il en existe un exemple de trois vecteurs de $\mathbf{R}^2$ tels que deux quelconques d'entre eux soient linéairement indépendants. Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ dont ces trois vecteurs soient des vecteurs propres ?

2) Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ et $\mathscr{F}$ une famille de $n+1$ vecteurs propres de f s'il en existe.

a: $\mathscr{F}$ peut-elle être une famille libre ?

b: On suppose que toute sous-famille de n vecteurs de $\mathscr{F}$ est libre. Démontrer que les $n+1$ vecteurs propres associés respectivement aux $n+1$ vecteurs de $\mathscr{F}$ sont égales.
Que peut-on en conclure pour f ?

Question 15 [Part 1] HEC 2007 oral voie E

Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ dont les matrices respectives dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbf{R}^2$ sont notées A et B. On suppose que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) v peut-il être bijectif ? Déterminer $\operatorname{Im} v$.

2) Déterminer $\ker u$.

3) Donner la forme des matrices A et B.

Question 16 [Part 4] HEC 2008 oral voie E

Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1) **a:** Trouver une relation entre A^2, A et I (matrice d'identité).
b: En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2) Calculer les valeurs propres possibles de A.

3) A est-elle diagonalisable ?

Question 17 [Part 1] HEC 2009 oral voie E

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Existe-t-il $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ telle que $AB = I_3$?

2) Existe-t-il $C \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbf{R})$ telle que $CA = I_2$?

Question 18 [Part 4] HEC 2009 oral voie E

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n - \{(0, \ldots, 0)\}$.

On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, puis $B = {}^tX\,X$ et $A = X\,{}^tX$.

1) Écrire la matrice B.

2) Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.

Question 19 [Part 1] HEC 2010 oral voie E

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Déterminer les endomorphismes f de E diagonalisables qui vérifient $Imf \subset Kerf$.

Question 20 [Part 4] HEC 2010 oral voie E

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$, $f(e_2)$ et $f(-e_1 + e_3)$.

Montrer que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

M est-elle diagonalisable ?

Question 21 [Part 4] HEC 2010 oral voie E

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ($n \in \mathbf{N}^*$), et vérifiant $A^k = I_n$.
Que peut-on dire de A dans les cas suivants :

- k est un entier naturel impair ?
- k est un entier naturel pair, non nul ?

Question 22 [Part 1] HEC 2010 oral voie E

Soit $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Calculer A^{-1}.

Question 23 [Part 1] HEC 2010 oral voie BL

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 5 et f un endomorphisme non nul de E tel que

$$f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad (1)$$

1) Montrer que le rang de f est inférieur ou égal à 2 (on rappelle que le rang de f est la dimension de l'image de f).

2) Montrer qu'il existe des endomorphismes de E vérifiant (1), dont le rang est égal à 1 (respectivement égal à 2).

Question 24 [Part 4] HEC 2011 oral voie E

Soit n un entier $\geqslant 2$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n - \{(0,0,\ldots,0)\}$.

On considère la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

On pose $B = X\ {}^tX$ et $A = {}^tXX$.

On désigne par u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à B.

1) Expliciter la matrice B et la matrice A.

2) Quel est le rang de u ? Déterminer son noyau.

3) B est-elle diagonalisable ?

4) Calculer B^k pour $k \in \mathbf{N}^*$.

Question 25 [Part 1] HEC 2011 oral voie E

Soit E l'ensemble des matrices $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où (a,b) prend toute valeur de $\mathbf{R}^2$.

1) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.
Calculer le produit $M_{a,b} \times M_{a',b'}$ pour $(a,b,a',b') \in \mathbf{R}^4$.
Vérifier que ce produit appartient à E.

2) Calculer $M_{a,b}^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Question 26 [Part 4] HEC 2011 oral voie E

On note E_4 l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égale à 4 et on considère l'application Δ qui, à un polynôme P de E_4 associe le polynôme $Q = \Delta(P)$ défini par : $\quad Q(x) = P(x+2) - P(x)$.

1) Vérifier que l'application Δ est un endomorphisme de E_4.
Expliciter la matrice de Δ dans la base canonique de E_4.

2) Déterminer le noyau de Δ. On pourra prouver que si $P \in Ker\Delta$, alors $P(x) = P(0)$ a une infinité de racines.

3) L'endomorphisme Δ est-il diagonalisable ?

4) Existe-t-il un polynôme Q appartenant à E_4 ayant un unique antécédent par Δ ?

Question 27 [Part 4] HEC 2011 oral voie E

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 - I$.

2) A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

Question 28 [Part 4] HEC 2017 oral voie E

On considère les deux sous espaces vectoriels F et G de $\mathbf{R}^3$ définis par :

$$\begin{cases} F = Vect\{(1,1,1)\} \\ G = Vect\{(1,-1,0),(0,2,1)\} \end{cases}$$

1) Trouver un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont l'image est F et le noyau G.

2) Peut-on le choisir diagonalisable ?

Question 29 [Part 4] HEC 2017 oral voie E

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

1) **a:** Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la probabilité $P(\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor)$.

b: En déduire la probabilité $P(U = V)$.

2) Soit A la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} U & 1 \\ 0 & V \end{pmatrix}$

a: Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

b: Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

2.2 Analyse

Question 30 [Part 0] Entraînement

Soit f définie par : $\quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et déterminer $(f^{-1})'$.

Question 31 [Part 3] Entraînement

Étudier la convergence de l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n \, dx \quad$ (pour $n \in \mathbf{N}$).

Calculer I_n.

Question 32 [Part 3] Entraînement

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.
Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur $\mathbf{R}$. Étudier la dérivabilité de f. Déterminer les branches infinies.

Question 33 [Part 7] Entraînement

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{2x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$
Montrer que f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ dans un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ où α est un réel positif que l'on déterminera.
Résoudre l'équation $(E) \quad f(x) = 1$

Question 34 [Part 0] HEC 1998 oral voie E

Écrire une fonction Scilab qui, pour tout réel $a \in \mathbf{R}^{+*}$ et tout entier $n \in \mathbf{N}^*$ renvoie le nombre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k a^k}{k!}$.

Question 35 [Part 0] HEC 2005 oral voie E

Étudier la fonction

$$f \longrightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}\,dt$$

Ensemble de définition, continuité, dérivée, limites, graphe.

Question 36 [Part 0] HEC 2006 oral voie S

Soit pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\qquad P_n(x) = x^n + x - 1$

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $P_n(x) = 0$ (on définit ainsi une suite de réels (x_n)).

2) Étudier la monotonie de la suite (x_n)

3) Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel que l'on précisera.

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\quad 1 - x_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$.

Question 37 [Part 6] HEC 2007 oral voie E

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donnée par

$$f(B,N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

1) Déterminer les extremums de la fonction f ; donner leur nature.

2) Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B+2N=23$, déterminer l'optimum de rendement.

Question 38 [Part 2] HEC 2007 oral voie E

1) Étudier la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in]0,1[$ et

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = 1+\frac{u_n}{n+1}$$

2) Déterminer deux réels a et b tels que, pour n voisin de ∞ :

$$u_n = 1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Question 39 [Part 6] HEC 2008 oral voie E

Soit f la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x,y) = x^3+y^3-3xy+1$$

1) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de f

2) Déterminer les points critiques de f

3) La fonction f a-t-elle des extrema locaux ?

Question 40 [Part 3] HEC 2009 oral voie E

1) Montrer que pour $z>0$, l'intégrale

$$J(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

est convergente.

2) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J(z)$ est équivalent en $+\infty$ à $\dfrac{e^{-z}}{z}$.

Question 41 [Part 0] HEC 2010 oral voie E

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

où α est un nombre réel,

1) dans le cas où $\alpha = 2$,

2) dans le cas où $\alpha \neq 2$

Question 42 [Part 6] HEC 2010 oral voie E

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}$, à valeurs réelles, par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^{+*}$.

2) Déterminer les points critiques de f.

3) Quelle est la nature de ces points critiques ?

Question 43 [Part 3] HEC 2013 oral voie E

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $\qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^3}$.

2) En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\quad \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)$

Question 44 [Part 6] Entraînement

Rechercher les extremums locaux de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x^3$$

Discuter le caractère local ou global de ces éventuels extremums.

Question 45 [Part 6] HEC 2013 oral voie E (année 0)

1) On se place dans $\mathbf{R}^2$, où on définit $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x| + |y| = 1\}$.

- **a:** Représenter graphiquement l'ensemble E.
- **b:** Déterminer parmi les éléments de E les éléments dont la distance à l'origine est maximale.
- **c:** Déterminer parmi les éléments de E les éléments dont la distance à l'origine est minimale.

2) On définit $F = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad \max(|x|,|y|) = 1\}$.
Reprendre les mêmes questions pour l'ensemble F.

Question 46 [Part 0] HEC 2016 oral voie E

Pour $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2}\, dt - \int_x^1 e^{-nt^2}\, dt$$

1) Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$

2) **a:** Établir l'existence d'un unique réel, noté c_n, tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\, dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\, dt.$

b: Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

2.3 Probabilités

Question 47 [Part 0] Entraînement

On joue à pile ou face jusqu'à obtenir "pile". S'il a fallu n jets de la pièce, on tire ensuite une boule au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Soit X le numéro de la boule obtenue.
Simuler la variable aléatoire X.
Après avoir déterminé l'ensemble des valeurs possibles de X, écrire $P(X=k)$ sous forme d'une série.
Déterminer $P(X=1)$.

Question 48 [Part 0] Entraînement

On considère une suite d'épreuves indépendantes, la probabilité du succès étant p ($p \in]0,1[$) à chaque épreuve.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la v.a.r. égale au nombre d'essais pour obtenir n succès.
Simuler la v.a.r. X_n.
Déterminer la loi de X_n.
Pour $n > 1$, on pose $Y = \dfrac{n-1}{X_n - 1}$. Déterminer $E(Y)$.

Question 49 [Part 0] Entraînement

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On extrait les boules de cette urne au hasard, une par une sans remise jusqu'à obtenir les trois boules numérotées 1, 2 et 3.
Soit X le nombre aléatoire de tirages justes nécessaires.
Déterminer la loi de X et calculer son espérance.

Question 50 [Part 7] HEC 1998 oral voie E

Soit X une v.a.r. suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
Déterminer la fonction de répartition de loi de la v.a.r. $Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}$.
Donner $E(Y)$.

Question 51 [Part 0] HEC 1998 oral voie E

Une personne a égaré un document qu'elle cherche dans une armoire contenant n tiroirs ($n \geqslant 2$). La probabilité que le document se trouve dans l'armoire est $\frac{1}{2}$.
Elle ouvre p tiroirs ($1 \leqslant p \leqslant n-1$) et constate que le document ne s'y trouve pas.
Quelle est la probabilité que le document soit dans l'armoire ?

Question 52 [Part 0] HEC 1998 oral voie E

Soit X une v.a.r. suivant une loi géométrique de paramètre p. la v.a.r. $\frac{1}{X}$ admet-t-elle une espérance ? Si oui, laquelle ?

Question 53 [Part 0] Entraînement (court)

Un mobile se déplace entre deux points A et B. A l'instant 0, il est en A.
On note A_n l'événement "le mobile se trouve en A à l'instant n" et B_n l'événement "le mobile se trouve en B à l'instant n".
On note $a_n = P(A_n)$ et $b_n = P(B_n)$.
On suppose que l'on a :

$$\exists \theta \in [0,1] \qquad P(A_n \cap A_{n+1}) = \theta\ a_n \qquad \text{et} \qquad P(B_n \cap B_{n+1}) = \theta\ b_n$$

1) Trouver une relation entre a_{n+1} et a_n
On utilisera la formule des probabilités totales.

2) En déduire l'expression de a_n en fonction de n et de θ puis sa limite lorsque n tend vers l'infini.

Question 54 [Part 0] Entraînement

Dans le plan euclidien, on appelle "chemin" de O$(0,0)$ à $A_n(n,n)$ (où $n \in \mathbf{N}$) une ligne brisée de O à A_n formée de segments de longueur 1 et dont les changements de direction ne se font que vers le haut ou vers la droite.
Dénombrer le nombre de chemins différents de O à A_n.

Question 55 [Part 8] HEC 2006 oral voie S

En utilisant une variable aléatoire discrète usuelle, montrer que lorsque n tend vers l'infini,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}$$

est équivalent à $\frac{1}{2}e^n$

Question 56 [Part 5] HEC 2007 oral voie E

Soit X et Y deux variables aléatoires binomiales de paramètres $(n, 1/2)$ indépendantes. Calculer $P(X = Y)$.

Question 57 [Part 0] HEC 2007 oral voie E

Soient A, B et C des événements de même probabilité p et tels que $P(A \cap B \cap C) = 0$

1) Prouver que $p \leqslant \frac{2}{3}$.

2) p peut-il prendre la valeur $\frac{2}{3}$?

3) On suppose en outre que A, B et C sont indépendants deux à deux. Prouver l'inégalité : $p \leqslant \frac{1}{2}$

Question 58 [Part 5] HEC 2007 oral voie E

Soient n et N des entiers non nuls.
Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On effectue N tirages avec remise dans cette urne.

1) Soit F_i la variable aléatoire égale au nombre de fois où le jeton i a été tiré.
Déterminer la loi de F_i
On pose : $F = \sum_{i=1}^{n} F_i$.
Déterminer la loi de F, son espérance et sa variance.
Les variables F_i sont-elles deux à deux indépendantes ?

2) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 0 si le jeton i n'a pas été tiré et égale à 1 s'il a été tiré au moins une fois. Déterminer la loi de X_i, son espérance et sa variance.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, déterminer la probabilité : $P_{(X_i=0)}(X_j = 0)$.
Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?

Question 59 [Part 7] Hec 2008 oral voie E

On définit la fonction φ par : $\forall x \in \mathbf{R} \quad \varphi(x) = ke^{-|x|}$.

1) Déterminer le réel k pour φ soit une densité.

2) Déterminer la fonction de répartition.

3) Justifier l'existence de $E(X)$ et de $V(X)$ et les calculer.

Question 60 [Part 7] HEC 2008 oral voie E

1) Vérifier que la fonction F définie sur **R** par $F(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, vérifie les propriétés d'une fonction de répartition.

2) Déterminer la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace $(\Omega,\mathscr{A},P)$, et de même loi de fonction de répartition F.
Généraliser à n variables.

Question 61 [Part 9] HEC 2008 oral voie E

Les variables considérées dans cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
Soit a un réel strictement positif et X une variable de loi uniforme sur $[0,2a]$.

1) Soit $n\in\mathbf{N}^*$. On considère n variables indépendantes X_1, ..., X_n qui ont toutes la même loi que X.
On pose : $M_n=\max(X_1,\ldots,X_n)$.
Déterminer la loi de M_n et calculer son espérance et sa variance.

2) En déduire que $U_n=\dfrac{n+1}{2n}M_n$ est un estimateur sans biais de $E(X)$.
Est-il préférable à l'estimateur $V_n=\dfrac{X_1+\ldots+X_n}{n}$?

Question 62 [Part 5] HEC 2009 oral voie E

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},p)$, indépendantes et de loi géométrique de paramètres p_1 et p_2 respectivement ($p_i\in]0,1[,i=1,2$).
On pose $U=X_1+X_2$ et $T=X_1-X_2$.

1) On suppose que $p_1\neq p_2$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

2) On suppose que $p_1=p_2=p$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Question 63 [Part 0] HEC 2009 oral voie E

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$. On désigne l'espérance par E.

1) Établir l'existence de $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

2) Montrer que $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)\leqslant\min\left(1,\dfrac{1}{\lambda}\right)$.

Question 64 [Part 0] HEC 2009 oral voie BL

Une urne contient n boules numérotées $1, 2, \ldots, n$ ($n \geqslant 3$). On tire les boules une à une sans remise. Quelle est la probabilité que les boules numérotées 1, 2, 3 sortent dans cet ordre ?

Question 65 [Part 5] HEC 2010 oral voie E

Soient X et Y définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$, indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 0 \\ 1 & Y(\omega) \end{pmatrix}$

1) Déterminer $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega, M(\omega) \text{inversible}\})$.

2) Déterminer $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega, M(\omega) \text{diagonalisable}\})$.

Question 66 [Part 5] HEC 2010 oral voie BL

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{p})$ et suivant toutes deux la loi binomiale de paramètres n et p.
Soit $Z = X + Y$ et n_0 un entier de $[\![1, 2n]\!]$.
Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = n_0]$. Reconnaître cette loi.

Question 67 [Part 0] HEC 2011 oral voie E

n souris (minimum 3) sont lâchées en direction de 3 cages, chaque cage pouvant contenir les n souris et chaque souris allant dans une cage au hasard.

1) Calculer la probabilité pour qu'une cage au moins reste vide.

2) Soit X le nombre aléatoire égale au nombre de cages restées vides. Calculer l'espérance de X.

Question 68 [Part 5] HEC 2011 oral voie E

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, indépendantes et telles que :

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \quad P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{2^i}$$

1) Reconnaître la loi de X et de Y.

2) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$ et la loi de X conditionnellement à $(X + Y = k)$, k étant un entier supérieur ou égal à 2 fixé.

3) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.

4) Calculer $P(X \geqslant 2Y)$ et $P_{[X \geqslant Y]}(X \geqslant 2Y)$.

Question 69 [Part 0] HEC 2011 oral voie BL

Soit n un entier $\geqslant 2$ et k un entier de $[\![1, n-1]\!]$.
Une urne contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
On les tire toutes une à une sans remise.
Soit X la variable aléatoire égale au rang de la dernière boule blanche tirée.
Donner la loi de X.
Calculer son espérance et sa variance. On rappelle la formule :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Question 70 [Part 0] HEC 2011 oral voie BL

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, avec $n \geqslant 2$. On lance n pièces de monnaie équilibrées. On définit les événements :
A : « On obtient Face au plus une fois »,
B : « On obtient Face au moins une fois et Pile au moins une fois ».

Monter qu'il existe une valeur de n pour laquelle A et B sont indépendants.

Question 71 [Part 8] HEC 2012 oral voie E

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, de même loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$.
Pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

1) **a:** Calculez $Cov(Y_k, Y_{k+1})$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

b: Montrer que : $0 < Cov(Y_k, Y_{k+1}) \leqslant \dfrac{1}{4}$

2) Calculer $Cov(Y_k, Y_\ell)$ pour tout couple (k, ℓ) tel que $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$.

3) Soit ε un réel strictement positif fixé.

Montrer que : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right) = 0$

Question 72 [Part 5] HEC 2012 oral voie E

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[)$ et Y une variable aléatoire telle que :

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est impair} \\ \dfrac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Y, puis calculer l'espérance de Y.

Question 73 [Part 7] HEC 2015 oral voie E

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f strictement positive sur $\mathbf{R}$ et possédant une espérance.
Pour tout $\alpha \in]0,1[$, on note h_α la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $h_\alpha(t) = |t| + (2\alpha - 1)t$.
Pour tout $q \in \mathbf{R}$, on pose : $L(q) = E\left(h_\alpha(X - q)\right)$.

1) Établir l'existence d'un unique réel q_α en lequel la fonction L est minimale.

2) On suppose que $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et que X suit la loi $\mathscr{N}(0,1)$. Calculer q_α.

Question 74 [Part 5] Hec 2015 oral voie E

Soit X_1, X_2, ..., X_n n variables aléatoires telles que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p_k avec $0 < p_k < 1$.

On pose $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $V(Y) \leqslant \dfrac{n^2}{4}$.

Chapitre 3

Corrigés des exercices

3.1 Algèbre

Corrigé exercice 1 — *Entraînement*

1) *C'est une question classique.Si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ, on a donc $f(x) = \lambda\, x$. Le sous espace propre $Vp(\lambda)$ est $Vect(x)$, car il est de dimension 1 et $x \neq 0_E$*
Donc : $\quad g\,[g(x)] = g\,[f(x)] = g(\lambda\, x) = \lambda g(x)$.

- *Si $g(x) = 0_E$, x est vecteur propre de g associé à la valeur propre 0.*

- *Si $g(x) \neq 0_E$, $g(x)$ est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ donc $g(x) \in Vect(x)$*
  On a donc $\exists k \in \mathbf{R}$ tel que $g(x) = k\, x$, ce qui signifie que x est vecteur propre de g.

On a donc répondu à la question.

2) *Soit P la matrice de passage de $\mathscr{C} = (i, j, k)$ à $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
On montre facilement que P est inversible (en la pivotant, par exemple), donc $\mathscr{B}$ est bien une base.
En notant $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ les vecteurs colonne des composantes de e_1, e_2 et e_3 dans la base canonique $\mathscr{C}$.
$f(e_1)$ a pour composantes dans $\mathscr{C}$ le vecteur colonne AX_1 soit $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Donc $f(e_1) = 2e_1$. De même $f(e_3) = 4e_3$.
$f(e_2)$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $f(e_2) = 2e_2 + e_1$.

La matrice A' de f dans $\mathscr{B}$ est donc : $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$

3) *On vient de voir que e_1 et e_3 sont des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 2 et 4. D'après la matrice A', 2 et 4 sont les seules valeurs propres de f. C'est facile de vérifier que les sous espaces propres associées sont $Vect(e_1)$ et $Vect(e_3)$ (en faisant les calculs avec A', c'est immédiat).*
D'après la question 1), on a donc $g(e_1) = a.e_1$ et $g(e_3) = c.e_3$.
Soit $u = g(e_2) - a.e_2$.
$f(u) = f[g(e_2) - ae_2] = (f \circ g)(e_2) - af(e_2) = (g \circ f)(e_2) - af(e_2) = g(2.e_2) - 2a.e_2$
Donc $f(u) = 2g(e_2) - 2a.e_2$ et ainsi $f(u) = 2u$. u est bien un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2.

Donc $u = b.e_1$ et, ainsi, $g(e_2) = b.e_1 + a.e_2$. On aura donc $\boxed{B = mat_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}$

4) *Il suffit de calculer $A \times B$ et $B \times A$. On trouve $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 2a & 2b+a & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 4c \end{pmatrix}$.*

Donc $f \circ g = g \circ f$ et, donc oui, f et g commutent.

5) *On a :*

$$\begin{aligned} M \text{ commute avec } A &\iff f \circ g = g \circ f \\ &\iff mat_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = B \\ &\iff P^{-1}MP = B \\ &\iff M = PBP^{-1} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Les matrices qui conviennent sont donc de la forme } PBP^{-1}}$

Corrigé exercice 2

Entraînement

1) **a:** *Regardons la condition $AM = MA$*

$$AM = MA \iff (S) \begin{cases} -cx_2 + bx_3 &= 0 \\ cx_1 + (d-a)x_3 - cx_4 &= 0 \\ -bx_1 + (a-d)x_2 + bx_4 &= 0 \end{cases}$$

on fait $L_2 \leftarrow bL_2 + cL_3$

$$\iff \begin{cases} -cx_2 + bx_3 &= 0 \\ -bx_1 + (a-d)x_2 + bx_4 &= 0 \end{cases}$$

C'est le résultat cherché. On a donc $M = \frac{x_2}{b} \begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + x_4 I = \frac{x_2}{b} A + \left(x_4 - \frac{dx_2}{b} \right) I$

b: *Sot* $F = Vect(I,A)$. *D'après ce qui précède, on a* $C(A) \subset F$.
La réciproque est évidente, donc $C(A) = F$.

2) **a:** *Si* $X \in R(A)$, $XA = X^3 = AX$, *donc* $X \in C(A)$. *On a bien* $R(A) \subset C(A)$.

b: *Un calcul simple donne* $A^2 = (a+d)A + (bc-ad)I$, *ce qui répond à la question.*

3) *On commence par remarquer que pour les 3 matrices* A_i, *lle coefficient b est non nul.*

$$X^2 = A \iff (xA+yI)^2 = A \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^2(bc-ad)+y^2 & = & 0 \\ x^2(a+d)+2xy & = & 1 \end{array}\right.$$

• *Pour* A_1 *: (S) devient* $\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & 1 \end{array}\right.$

Pas de solution.

• *Pour* A_2 *: (S) devient* $\left\{\begin{array}{rcl} -x^2+y^2 & = & 0 \\ 2xy & = & 1 \end{array}\right.$

$x = y$ *ou* $x = -y$ *et* $x^2 = \frac{1}{2}$ *ou* $x^2 = -\frac{1}{2}$

On a donc deux solutions : $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *ou* $x = y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Le produit est égal à $-A_2$ *et la somme est nulle.*

• *Pour* A_3 *: (S) devient* $\left\{\begin{array}{rcl} -4x^2+y^2 & = & 0 \\ 5x^2+2xy & = & 1 \end{array}\right.$. $y = 2x$ *ou* $x = -2x$ *et donc,* $9x^2 = 1$ *ou* $x^2 = 1$

On a 4 solutions : $M_1 = A_3 - 2I$, $M_2 = -A_3 + 2I$, $M_3 = \frac{1}{3}(A_3+2I)$ $M_4 = \frac{1}{3}(A_3+2I)$.

On a une somme nulle et le produit donne $P = M_1M_2M_3M_4 = M_1^2M_3^2 = A_3A_3 = A_3^2$.

Corrigé exercice 3

Entraînement

1) *C'est du cours :* $\dim(E) = 4$.

2) *Soit* P_1 *et* P_2 *deux polynômes de E,* α *et* β *deux réels.*
Posons $Q = \phi(\alpha P_1 + \beta P_2)$.

$$\begin{array}{rcl} Q(X) = & = & 6(\alpha P_1'(0)+\beta P_2'(0))X^3 + 3(\alpha P_1''(0)+\beta P_2''(0))X^2 \\ & & +6(\alpha P_1(0)+\beta P_2(0))X + (\alpha P_1'''(0)+\beta P_2'''(0)) \\ & = & \alpha(6P_1'(0)X^3 + 3P_1''(0)X^2 + 6P_1(0)X + P_1'''(0)) \\ & & +\alpha(6P_2'(0)X^3 + 3P_2''(0)X^2 + 6P_2(0)X + P_2'''(0)) \end{array}$$

Donc $\phi(\alpha P_1 + \beta P_2) = \alpha\phi(P_1) + \beta\phi(P_2)$ *et* ϕ *est linéaire.*
Par définition, $\phi(P)$ *est un polynôme de E. Donc* ϕ *est bien un endomorphisme de E.*

3) *Prenons* $\mathscr{C} = (E_0, E_1, E_2, E_3)$ *la base canonique de E (avec* $E_i(X) = X^i$*).*
$\phi(E_0) = Q_0$ *avec* $Q_0(X) = 0X^3 + 0X^2 + 6X + 0 = 6X$

$\phi(E_1) = Q_1$ *avec* $Q_1(X) = 6X^3 + 0X^2 + 0X + 0 = 6X^3$
$\phi(E_2) = Q_2$ *avec* $Q_2(X) = 0X^3 + 6X^2 + 6X + 0 = 6X^2$
$\phi(E_3) = Q_3$ *avec* $Q_3(X) = 0X^3 + 0X^2 + 0X + 6 = 6$

Donc $\boxed{B = mat_{\mathscr{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

4) $\phi^3(1) = \phi^2(6X) = 6\phi(6X^3) = 36 \times 6 = 216$
$\phi^3(X) = \phi^2(6X^3) = 36\phi(1) = 216X$
$\phi^3(X^2) = \phi^2(6X^2) = 6\phi(6X^2) = 216X^2$
$\phi^3(X^3) = 6\phi^2(1) = 36\phi(X) = 216X^3$
Donc $\boxed{B^3 = 216I}$
On a un polynôme annulateur $p(x) = x^3 - 6^3$.
Si λ *est une valeur propre de B,* $\lambda^3 = 6^3$ *donc* $\lambda = 6$.
Donc $\lambda = 6$ *est la seule valeur propre possible. Or* 6 *est bien valeur propre (car* $\phi(X^2) = 6X^2$. *Donc* $\boxed{spec(B) = \{6\}}$
Si B était diagonalisable, on aurait B semblable à $6id_E$ *et donc B semblable à* $6I$ *ce qui n'est pas le cas (car seul* $6I$ *est semblable à* $6I$*).*
Donc $\boxed{\text{B n'est pas diagonalisable}}$

Corrigé exercice 4

Entraînement

1) *On peut commencer par remarquer que* $A = X\,{}^tX$ *avec* $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

et que ${}^tXX = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ *: c'est assez connu.*

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac & | & 0 \\ ab & b^2 & bc & | & 0 \\ ac & bc & c^2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On fait } L_1 \leftarrow \frac{1}{a}L_1 \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{b}L_2 \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{c}L_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b & c & |0 \end{pmatrix}$$

On peut conclure :

$$\boxed{\ker(f) \text{ est le plan vectoriel de base } B_1 = (u_1, u_2) \text{ avec } u_1 \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}}$$

2) *D'après le théorème du rang, Im f est de dimension* 1. *On remarque que les trois vecteurs colonne de A sont colinéaires au vecteur* $u_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\text{Im}f \text{ est la droite vectorielle de base } u_3 \text{ avec } u_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$

3) *Supposons* $xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$, *en composant par* f *on obtient* $zf(u_3) = 0$. *Or* $f(u_3)$ *a pour composante* $X\ {}^tXX = (a^2 + b^2 + c^2)X = X$ *(tiens,* u_3 *est un vecteur propre!). donc* $z = 0$. *Puis, comme* (u_1, u_2) *est une famille libre,* $x = 0$ *et* $y = 0$. *Donc* (u_1, u_2, u_3) *est une famille libre de* $\mathbf{R}^3$ *donc une base.*

4) u_1 *et* u_2 *sont des vecteurs propres associés à la valeur propre* 0, *et on a vu que* u_3 *est aussi vecteur propre associé à la valeur propre* 1. $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ *est donc une base propre. On aura* $D = mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *avec* $D = P^{-1}AP$ *et* $P = \begin{pmatrix} b & c & a \\ -a & 0 & b \\ 0 & -a & c \end{pmatrix}$.

Corrigé exercice 5

HEC 2001 oral voie E

1) **a:** *A et B sont diagonalisables car symétriques.*

b: *Cherchons les valeurs propres :*

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff (A - \lambda I) \text{ non inversible} \\ &\iff (-3-\lambda)^2 - 4^2 = 0 \\ &\iff (-3-\lambda-4)(-3-\lambda+4) = 0 \\ &\iff (-7-\lambda)(1-\lambda) = 0 \\ &\iff \lambda = -7 \text{ ou } \lambda = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } B &\iff (B - \lambda I) \text{ non inversible} \\ &\iff (1-\lambda)^2 - 2^2 = 0 \\ &\iff (3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \\ &\iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{spec(A) = \{-7, 1\} \text{ et } spec(B) = \{-1, 3\}}$

2) **a:** *On utilise le binôme de Newton :*
$(M - I)^3 = M^3 - 3M^2 + 3M - I = A - I$
$(M + I)^2 = M^2 + 2M + I = B + I.$

b: 1 *est valeur propre de A donc* $A - I$ *n'est pas inversible donc* $(M - I)^3$ *n'est pas inversible.*
Or $(M - I)^3 = (M - I)^2(M - I)$. *Si* $M - I$ *était inversible,* $(M - I)^2$ *le serait aussi et* $(M - I)(M - I)^2$ *le serait aussi : impossible. Donc* $M - I$ *n'est pas inversible. Même raisonnement pour justifier que* $M + I$ *n'est pas inversible.*

c: *Il en résulte que* 1 *et* -1 *sont valeurs propres de M (les seules car elle ne peut pas en avoir plus).*
Donc $spec(M) = \{-1, I\}$. *M est diagonalisable (2 valeurs propres distinctes) et M est semblable à* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
$M'^2 = I$ *donc* $M^2 = I$.

d: $M^2 = I$ *donc* $M^3 = M$ *donc* $(S) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} M - 3I + 3M & = A \\ et & \\ I + 2M & = B \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 4M & = A + 3I \\ et & \\ 2M & = B - I \end{array} \right.$

On obtient dans les deux cas $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

3) a: *On a vu que la condition permettait de justifier que* $M - I$ *était non inversible, donc que* 1 *était valeur propre. Soit u un vecteur propre associé, en prenant un vecteur v non colinéaire à u, dans la base* (u, v) *la matrice de l'endomorphisme associé à M dans la base canonique devient* $M' = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$. *Ce qui répond à la question.*

b: $M'^2 - 4M' + 7I = \begin{pmatrix} 1 & a + ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3a + ab \\ 0 & b^2 - 4b + 7 \end{pmatrix}$
Or $b^2 - 4b + 7 = 0$ *est impossible (discriminant négatif) donc* $M'^2 - 4M' + 7I$ *est inversible, donc l'endomorphisme associé aussi donc* $M^2 - 4M + 7I$ *est inversible.*

c: $(M + I)(M^2 - 4M + 7I) = M^3 + 3M^2 + 3M + 7I$
Donc $(M + I)(M^2 - 4M + 7I) = A + 7I$.

d: *Soit* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *C'est un vecteur propre de A associé à la valeur propre* -7.
On a donc $(M + I)(M^2 - 4M + 7I)X = 0$
Donc $(M^2 - 4M + 7I)\left[(M + I)X\right] = 0$ *et, ainsi,* $(M + I)X$ *est un vecteur du noyau de* $M^2 - 4M + 7I$. *Or ce noyau est réduit au vecteur nul d'après 3) b, donc* $(M + I)X = 0$ *donc* -1 *est valeur propre de M. Donc M est semblable à* $M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Donc* $M''^2 = I$ $M''^3 = M''$ *et donc* $M^2 = I$ *et* $M^3 = M$.

Donc $M - 3I + 3M = A$ *et* $4M = A + 3I = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. *Donc* $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Corrigé exercice 6

Entraînement

Cours : *Il faut évidemment maîtriser l'énoncé de la formule du binôme. Pour une démonstration, on peut opter pour l'utilisation de la loi binomiale, ou pour une récurrence, en utilisant la formule de Pascal.*

1) a: *Si* $a_n = q^n$, *alors* $\widehat{a_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k q^k = (1 - q)^n$ $\boxed{\widehat{a_n} = (1 - q)^n}$

b: *Si* $a_n = n^2$, *alors* $\widehat{a_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (-1)^k k^2$.
Pour $n = 1$, $\widehat{a_1} = -1$.
Pour $n = 2$, $\widehat{a_2} = 2$.
Considérons $n \geqslant 3$ *et posons* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k = (1-x)^n$

$P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k x^{k-1} = -n(1-x)^{n-1}$

$P_n''(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k k(k-1) x^{k-2} = n(n-1)(1-x)^{n-2}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k \\ &= P''(1) - P'(1) = 0\end{aligned}$$

$\boxed{\widehat{a_n} = 0 \text{ pour } n \geqslant 3}$

c: *Si* $a_n = \binom{n}{p}$ *alors* $\widehat{a_n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{p} (-1)^k$
Or de façon classique : $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}$ *(penser aux choix d'un groupe de k personnes parmi n avec p chefs).*
Donc $\widehat{a_n} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k} (-1)^k = \sum_{i=0}^{n-p} (1)^{i+p} \binom{n}{p} \binom{n-p}{n-p-i}$

$\widehat{a_n} = (-1)^p \binom{n}{p} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{n-p}{j}$

$\boxed{\widehat{a_n} = 0 \text{ si } n \neq p \qquad \text{et } \widehat{a_p} = (-1)^p \text{ si } n = p}$

2) *Calculons :*

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{a_n}} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (-1)^p a_p\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\sum_{p=0}^{n} \binom{k}{p} (-1)^p a_p\right] \\ &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \binom{k}{p}\right]}_{\alpha_p} a_p\end{aligned}$$

Or, d'après la calcul précédent, $\alpha_p = (-1)^p$ *si* $p = n$ *et* $\alpha_p = 0$ *sinon.*
Donc $\widehat{\widehat{a_n}} = (-1)^n \times (-1)^n a_n = a_n$ ***c.q.f.d.***

3) **a:** *La linéarité de* Φ *est évidente.*
Si $e_0 = (1,0,0,0)$, $\widehat{a_0} = 1$, $\widehat{a_1} = 1+0 = 1$, $\widehat{a_2} = 1+0+0 = 1$, *et* $\widehat{a_3} = 1+0+0+0 = 1$

Si $e_1=(0,1,0,0)$, $\widehat{a_0}=0$, $\widehat{a_1}=0-1=-1$, $\widehat{a_2}=0-2+0=-2$, *et* $\widehat{a_3}=0-3+0+0=-3$

Si $e_2=(0,0,1,0)$, $\widehat{a_0}=0$, $\widehat{a_1}=0+0=0$, $\widehat{a_2}=0+0+1=1$, *et* $\widehat{a_3}=0+0+3+0=3$

Si $e_3=(1,0,0,0)$, $\widehat{a_0}=$, $\widehat{a_1}=0+0=0$, $\widehat{a_2}=0+0+0=0$, *et* $\widehat{a_3}=0+0+0-1=-1$

Donc $\boxed{M=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&-2&1&0\\1&-3&3&-1\end{pmatrix}}$

b: *En utilisant 2) ou par le calcul :* $M^2=I$ *donc* $\boxed{M^{-1}=M}$

c: $a=\widehat{a}\iff MX=X\iff(M-I)X=0.$

$M-I=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-2&0&0\\1&-2&0&0\\1&-3&3&0\end{pmatrix}$ *On passe y et z en paramètre :*

$x=2y$, $y=y$, $z=z$, $-2t=-x+3y-3z=y-3z$ *donc* $t=-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z$

$$\boxed{F=\left\{\left(2y,y,z,-\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z\right);y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\right\}\qquad\dim(F)=2}$$

Corrigé exercice 7

HEC 1999 oral voie E

1) $\Phi_B(M)=MB-BM.$

a: *Soit* M_1, M_2 *deux matrices de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, x_1 *et* x_2 *deux réels.*

$$\begin{aligned}\Phi_B(x_1M_1+x_2M_2)&= =(x_1M_1+x_2M_2)B-B((x_1M_1+x_2M_2)\\&=x_1(M_1B-BM_1)+x_2(M_2B-BM_2)\\&=x_1\Phi_B(M_1)+x_2\Phi_B(M2)\end{aligned}$$

Donc Φ_B *est linéaire. Comme* $\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})\quad\Phi_B(M)\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, Φ_B *est bien un endomorphisme de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

b: *Prenons* $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\Phi_B(A)&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a&a\\c&c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a+c&b+d\\0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-c&a-b-d\\c&c\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\Phi_B(A)=A&\iff a=-c\quad a-b-d=b\quad c=d\\&\iff a=-c\quad b=-c\quad d=c\end{aligned}$$

Donc $A = c\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbf{R}$.

$A^2 = c^2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

2) *On considère deux éléments A et B de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ *vérifiant :* $\quad AB - BA = A$.

a: $AB - BA = A$ *donc, en multipliant par A à droite,* $A^2B - ABA = A^2$ *et, en multipliant par A à gauche,* $ABA - BA^2 = A^2$
Donc, en sommant, $A^2B - BA^2 = 2A^2$.
On généralise le résultat par une récurrence facile.

b: *On a* $\Phi_B(A^k) = kA^k$, *donc, dans le cas où* A^k *est non nulle,* A^k *est vecteur propre de* Φ_B *assoicié à la valeur propre k.*

c: *Il y a au plus* n^2 *valeurs propres pour l'endomorphisme* Φ_B, *donc* $A^k \neq 0$ *pour tout k dans* $\mathbf{N}$ *est impossible, donc il existe un entier naturel p tel que* $A^p = 0_n$.

3) **a:** *Déterminons l'application* $f\circ g - g\circ f$.

$$\begin{aligned}(f\circ g - g\circ f)(P) &= f(g(P)) - g(f(P)) = (XP)' - XP' \\ &= XP' + P - XP' = P\end{aligned}$$

donc $f\circ g - g\circ f = id$

b: *On compose par f à gauche :* $f\circ f\circ g - f\circ g\circ f = f\circ id = f$
Donc $f\circ(f\circ g) - (f\circ g)\circ f = f$.
D'où le résultat en prenant $h = f\circ g$.

c: *La réponse est non, car, cela ne marche pas : il suffit de regarder* $f^p(Q)$ *avec* $Q = X^{p+1}$ *qui n'est pas nul.*

d: *Voilà toute la différence ente dimension finie et infinie !*

Corrigé exercice 8

HEC 2002 oral voie E

1) *Notons* $A_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0 \end{pmatrix}$, *et* $A_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$.

On a $F = Vect(A_1,A_2,A_3,A_4)$, *ce qui prouve que F est un sous espace vectoriel de* $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$.
La famille (A_1,A_2,A_3,A_4) *est donc génératrice de F.*
$a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$
La famille (A_1,A_2,A_3,A_4) *est donc libre et forme une base de F.* $\boxed{\dim(F) = 4}$.

2) *On peut remarquer que* $M(e_i)$ *n'est autre que la matrice* A_i *déjà citée pour tout élément i de* $[\![1,4]\!]$.

$M_1+J=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. *En faisant* $L_4 \leftarrow L_4-L_1$, *on obtient* $M_1+J \sim \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

Donc M_1+J *est inversible.*

On procède de même pour M_2+J *et* M_3+J. M_4+J *est directement la matrice identité.*

$$\sum_{i=1}^{4} a_i(M_i+J) = \begin{pmatrix}a_1&0&0&a_1\\0&a_2&0&a_2\\0&0&a_3&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix} = 0 \iff a_1=a_2=a_3=a_4=0$$

Donc la famille $(M_i+J)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ *est libre.*

3) $M(a)+\theta J = \begin{pmatrix}\theta&0&0&a_1\\0&\theta&0&a_2\\0&0&\theta&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix}$ *On fait* $L_4 \leftarrow \theta L_4 - a_1L_1 - a_2L_2 - a_3L_3$

$M(a)+\theta J \sim \begin{pmatrix}\theta&0&0&a_1\\0&\theta&0&a_2\\0&0&\theta&a_3\\0&0&0&x\end{pmatrix}$ *avec* $x=\theta a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$

La condition $M(a)+\theta J$ *non inversible* $\forall\theta\in\boldsymbol{R}$ *impose donc* $a_4=0$ *et* $a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$ *donc* $a=0_{\boldsymbol{R}^4}$. *C'est le résultat attendu.*

4) **a:** *Voilà une question qui semble trop difficile pour ce niveau.*
S'il existe une matrice $M(a)$ *dans G, comme* $J\in G$, $\forall\theta\in\boldsymbol{R}$ $\quad M(a)+\theta J\in G$, *ce qui est implique* $a=0$ *d'après la question précédente. Donc* $\boxed{F\cap G=\{0_E\}}$
Soit $\mathscr{B}=(N_1,N_2,\dots,L_m)$ *une base de G. On la réunit avec la base* (M_1,M_2,M_3,M_4) *de* F. *Soit* $\mathscr{H}$ *la famille de vecteurs obtenue. Montrons que cette famille est libre. Supposons* $\alpha_1M_1+\dots\alpha_4M_4+\beta_1N_1+\dots+\beta_mN_m=0_E$
On a donc $\alpha_1M_1+\dots\alpha_4M_4=-(\beta_1N_1+\dots+\beta_mN_m)$ *et donc un vecteur de* $F\cap G$, *donc un vecteur nul. Donc* $\alpha_1=\dots\alpha_4=0$ *et* $\beta_1=\dots=\beta_m=0$. *La famille est bien libre. Elle comporte donc au plus 16 vecteurs car* $\dim(\mathscr{M}_4(R)=16$. *En conséquence* $\boxed{\dim(G)\leqslant 12}$

b: *Prenons G l'ensemble des matrices du type* $\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&0\\a_4&a_5&a_6&0\\a_7&a_8&a_9&0\\a_{10}&a_{11}&a_{12}&0\end{pmatrix}$.
G est bien un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\boldsymbol{R})$, *contenant J et ne contenant aucune matrice inversible. On montre facilement que* $\dim(G)=12$. *La réponse est donc oui.*

Corrigé exercice 9

HEC 2005 oral voie E

1) *On peut remarquer que* $A(t) = I + tB$ *avec* $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On peut aussi remarquer que $A(t) = A(t') \iff t = t'$, *car* (I, B) *est une famille libre de* $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$. *Donc* $A(t) \times A(t') = (I + tB)(I + t'B) = I + (t + t')B + tt'B^2$

Or $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} = -2B$.

Donc $A(t) \times A(t') = I + (t + t' - 2tt')B \in \mathscr{M}$.

2) *On utilise le calcul précédent :*

$$\begin{aligned} A(t) \times A(t') = I &\iff t + t' - 2tt' = 0 \\ &\iff t + t'(1 - 2t) = 0 \end{aligned}$$

• *Si* $t = \dfrac{1}{2}$, *l'égalité précédente est impossible.*

• *Si* $t \neq \dfrac{1}{2}$ $\qquad t' = \dfrac{t}{1 - 2t}$.

On peut donc conclure : $\boxed{A(t) \text{ est inversible si et seulement si } t \neq \frac{1}{2}}$

Puis $\boxed{\text{Si } t \neq \frac{1}{2} \qquad [A(t)]^{-1} = A\left(\frac{t}{1 - 2t}\right) \in \mathscr{M}}$

3) $A\left(\dfrac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 5/2 & 0 \\ 3/2 & -3/2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $A(t^2) = A(2t - 2t^2)$.

$$\begin{aligned} A(t)^2 = A\left(-\frac{3}{2}\right) &\iff 2t - 2t^2 = -\frac{3}{2} \\ &\iff 4t^2 - 4t - 3 = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = 16 + 48 = 8^2$ *donc deux solutions :* $\quad t_1 = \dfrac{4 - 8}{8} = -\dfrac{1}{2} \quad$ *et* $\quad t_2 = \dfrac{4 + 8}{8} = \dfrac{3}{2}$

$\boxed{\text{L'équation admet deux solutions } A\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ et } A\left(\frac{3}{2}\right)}$

4) *Soit* $C = A(-1)$. $C^2 = A(2.(-1) - 2.(-1)^2) = A(0) = I$.

Donc, immédiatement par récurrence : $\qquad C^n = I$ *si* n *est pair et* $C^n = A(-1)$ *si* n *est impair.*

Corrigé exercice 10

Entraînement

1) • *Si* $x \in \ker g \quad g(x) = 0_E$ *donc* $f[g(x)] = 0_E$ *et donc* $x \in \ker(f \circ g)$.

• *Si* $x \in Im(f \circ g) \quad \exists u \in E$ *tel que* $x = (f \circ g)(u)$ *donc* $x = f(v)$ *(avec* $v = g(u)$*)* .

On a bien les deux justifications demandées.

2) *Si* $f \circ g$ *est bijectif, alors* $\ker(g) = \{0_E\}$ *donc* g *est bijectif, donc* f *aussi.*

3) *Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $f \circ g$, et u un vecteur propre associé, $(f \circ g)(u) = \lambda u$. $g(u) \neq 0_E$ nécessairement, sinon on aurait $\lambda u = 0_E$ ce qui est impossible du fait que $\lambda \neq 0$.*
Donc $(g \circ f \circ g)(u) = \lambda g(u)$, soit encore $(g \circ f)(g(u)) = \lambda g(u)$.
Donc $g(u)$ est vecteur propre de $g \circ f$ associé à λ.
La réciproque est évidente, f et g jouant un même rôle.

4) *On a étudié le cas des valeurs propres non nulles. Il faut maintenant regarder le cas particulier de la valeur propre 0.*

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } f \circ g &\iff f \circ g \text{ non bijectif} \\ &\implies f \text{ et } g \text{ non bijectifs, d'après 2)} \\ &\implies g \circ f \text{ non bijectifs (symétrie des rôles)} \\ &\implies \lambda = 0 \text{ est valeur propre de } g \circ f \end{aligned}$$

La réciproque est immédiate. D'où le résultat global demandé.

Corrigé exercice 11 *Entraînement*

1) *Soit M_1 et M_2 deux matrices de $C(A)$, x_1 et x_2 deux réels. Posons $M = x_1M_1 + x_2M_2$.*
$AM = A(x_1M_1 + x_2M_2) = x_1AM_1 + x_2AM_2 = x_1M_1A + x_2M_2A = (x_1M_1 + x_2M_2)A = MA$
Donc $x_1M_1 + x_2M_2 \in C(A)$. Ainsi, $C(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$.
$I \in C(A)$ et $A \in C(A)$, en supposant A et I non colinéaires, (I, A) est une famille libre de $C(A)$, donc $\dim(C(A)) \geqslant 2$.
Et si A et I colinéaires, $C(A) = \mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$ qui est de dimension supérieure ou égale à 2 (car $n \geqslant 2$).

2) **a:** *$C(A) = \mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$, donc $MA = AM$ pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$ donc $f \circ g = g \circ f$.*
$(f \circ g)(e_i) = f[g(e_i)] = f(e_i)$.
$(g \circ f) = g[f(e_i)]$.
Donc $g[f(e_i)] = f(e_i)$ et ainsi, $f(e_i)$ est vecteur propre de g associé à la valeur propre $\lambda = 1$.
Or la définition de g permet d'affirmer que le sous espace propre de g associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}(e_i)$.
Donc il existe α_i tel que $f(e_i) = \alpha_i e_i$

b: *D'après ce qui précède, la matrice A est diagonale et $A = diag(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

Prenons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

$AM = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ *et* $MA = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $AM = MA$, on a donc $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_n = \alpha_1$.

c: *On a donc* $A = diag(\alpha_1, \alpha_1 \ldots, \alpha_1) = \alpha_1 I$.

Corrigé exercice 12

Entraînement

1) $g \circ f$ *est une application linéaire de* $\mathbf{R}^3$ *dans* $\mathbf{R}^3$.
g étant linéaire de $\mathbf{R}^2$ *dans* $\mathbf{R}^3$, $\dim(Im(g)) \leqslant 2$. *Or* $Im(g \circ f) = \{g(f(u)) \ / \ u \in \mathbf{R}^3\} \subset Im(g)$
Donc $\dim Im(g \circ f) \leqslant 2$. *C'est le résultat attendu.*
On peut donc en déduire que $g \circ f$ *n'est pas bijectif et, donc, que* $\lambda = 0$ *est valeur propre de* $g \circ f$.

2) *On suppose que* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *AB est la matrice de* $f \circ g$ *dans la base canonique de* $\mathbf{R}^3$.

a: *Soit* $X \in \mathbf{R}^2$ *tel que* $BX = 0$, *alors* $ABX = 0$ *donc* $X = 0$ *car AB est inversible.*
Donc, si X non nul, BX n'est pas nul.

b: *Si* λ *est valeur propre de AB,* $\exists X$ *non nul tel que* $ABX = \lambda X$.
Donc $BABX = \lambda BX$ *soit encore* $(BA)(BX) = \lambda(BX)$.
Comme BX n'est pas nul, BX est vecteur propre de BA associé à λ. *C'est le résultat attendu.*

c: $\lambda = 1$ *est valeur propre de AB associé au vecteur propre* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\lambda = -1$ *est valeur propre de AB associé au vecteur propre* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Donc $\lambda = 1$ *et* $\lambda = -1$ *sont des valeurs propres de BA. On sait aussi que* 0 *est valeur propre de BA donc BA matrice de* $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, *admet trois valeurs propres distinctes. BA est donc diagonalisable.*

Corrigé exercice 13

Entraînement

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $(n > 1)$. *On cherche les matrices M de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ *telles que* $AM - MA = A$

1) *Soit* $f : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{cases}$
f *est immédiatement un endomorphisme de* $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. f *n'est pas bijectif car* $\ker(f)$ *contient A et I.*
Si l'ensemble de solutions contient une matrice M_0, *il contient aussi* $M_0 + M$ *pour toute matrice M de* $\ker(f)$. *Donc si l'équation proposée admet au moins une solution, elle en admet une infinité.*

2) *Soit M une solution de l'équation.*

a: *Notons* (H_p) *la propriété :* $A^p M - MA^p = pA^p$.
On montre (H_p) *par récurrence sur* $p \in \mathbf{N}$.
• *C'est immédiatement vrai pour* $p = 0$.

• *Supposons* (H_p) *vraie pour* $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} A^{p+1}M - MA^{p+1} & = & A(A^P M) - MA^{p+1} \\ & = & A(pA^P + MA^p) - MA^{p+1} \\ & = & PA^{p+1} + AMA^P - MA^{p+1} \\ & = & pA^{p+1} + (MA + A)A^p - MA^{p+1} \\ & = & pA^{p+1} + MA^{p+1} + A^{p+1} - MA^{p+1} \\ & = & (p+1)A^{p+1} \end{array}$$

Donc (H_{p+1}) *est vrai... ce qui achève la récurrence.*

b: *On considère l'endomorphisme* ϕ *de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *défini par* $\phi(N) = NM - MN$.
On a $\phi(A) = AM - MA = A$ *donc* A *est vecteur propre de* ϕ *associé à la valeur propre* $\lambda_1 = 1$.
D'après ce qui précède $\phi(A^p) = pA^p$ *donc, si* $A^p \neq 0$, A^p *est vecteur propre associé à la valeur propre* p.
Or, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de valeur propre, donc il existe un entier k *tel que* $A^{k-1} \neq 0$ *et* $A^k = 0$.

3) *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^{n-1} \neq 0$ *et* $A^n = 0$ *et* u *l'endomorphisme canoniquement associé à* A.

a: *Supposons que* $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ *ne soit pas une base de* $\mathbb{R}^n$, *ce ne serait pas une famille libre et on aurait :*

$$x = \alpha_1 u(x) + \alpha_2 u^2(x) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x)$$

En composant par u^{n-1} , *on aurait* $u^{n-1}(x) = \alpha_1 u^n(x) + \ldots \alpha_{n-1} u^{2n-2}(x) = 0_E$.
C'est impossible. Donc $(x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ *et une base de* $\mathbb{R}^n$.

b: *Immédiatement* $\boxed{\text{La matrice de } u \text{ dans cette base est } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Corrigé exercice 14 *Entraînement*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *symétrique, dont tous les termes sont des 1 et des 0 et telle que :*

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & k & 1 & \ldots & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & \ldots & & 1 & k \end{pmatrix} \qquad \text{avec } k \geqslant 2.$$

1) *Commençons par regarder comment est organisée la matrice* A^2.
Supposons $A = (a_{i,j})$. *Alors* $A^2 = (b_{i,j})$ *avec* $b_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p} a_{p,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p} a_{j,p}$ *(car A*

est symétrique).

En particulier, $b_{i,i} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p}^2$.

Or $b_{i,i} = k \geqslant 2$ *donc, d'après l'hypothèse faite sur* A *(ses termes ne sont que des* 0 *et des* 1*), chaque ligne possède exactement* k *fois* 1 *et* $n-k$ *fois* 0.

Donc le vecteur $U = (1,1,\dots,1)$ *est vecteur propre de* A *associé à la valeur propre* $\lambda = k$.

2) *On a* $AU = kU$ *donc* $A^U = kAU = k^2U$. *Un calcul direct de* A^2U *donne* $A^2U = (n-1+k)U$

Donc $k^2 = n-1+k$. *On en déduit que* $n-1 = k(k-1)$ *qui est nécessairement un nombre pair..*

3) *On peut remarquer que* $A^2 = J + (k-1)I$ *où* J *est la matrice de* $\mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$ *ne comportant que des* 1.

J est connue : elle est symétrique, donc diagonalisable, admet 0 *comme valeur propre d'ordre* $n-1$ *et* n *comme valeur propre d'ordre* n. *Dans une base propre,* A^2 *sera semblable à une matrice diagonale comportant* 0 *sur* $n-1$ *termes de la diagonale et* n *sur un terme.*

Donc A^2 *est diagonalisable, admet* $n+k-1$ *(or* $n+k-1 = k^2$*) comme valeur propre d'ordre* 1 *et* $k-1$ *comme valeur propre d'ordre* $n-1$.

A est diagonalisable, car symétrique.

$\boxed{A \text{ admet des valeurs propres prise dans } \{-\sqrt{k-1}, \sqrt{k-1}, -k, k\}}$

Corrigé exercice 15

HEC 2006 oral voie E

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) *Cherchons les valeurs propres et sous espaces propres de la matrice A.*

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ *On fait* $L_2 \leftrightarrow L_1$ *, puis* $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$

$A - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

• *Pour* $\lambda = 1$, *le système* (S) $\quad (A-\lambda I)X = 0$ *devient* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

Si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, *on passe* y *en paramètre. On obtient* $x = y$, $z = 0$, $y \in \boldsymbol{R}$.

Donc le sous espace propre $E_{(\lambda=1)}$ *est* $Vect(U_1)$ *avec* $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

• *Pour* $\lambda = -1$, (S) *devient* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$.

On passe y en paramètre. Le sous espace propre $E_{(\lambda=-1)}$ *est* $Vect(U_2)$ *avec* $U_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il n'y a pas d'autres valeurs propres.

Donc $Spec(A) = \{-1, 1\}$ *et la somme des dimensions des sous espaces propres est* 2.

Ainsi, A n'est pas diagonalisable, et A est inversible, car 0 *n'est pas valeur propre.*

2) *On calcule facilement* A^2 *et* A^3 : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On vérifie facilement, par récurrence, que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A^{2p} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2p \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad A^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2p+1 \\ 1 & 0 & 2p+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est donc impossible d'avoir $A^{2p+1} = A^{2q}$.

3) **a:** *Si* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, *pour* $n \in \mathbb{N}^*$, M^n *est nécessairement une matrice à coefficients dans N. Il est donc impossible d'avoir* $M^n = A$.

b: *Si* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *M est symétrique, donc diagonalisable. Dans une base propre, M serait semblable à une matrice* M' *diagonale.*

Dans cette base propre, si M existe, on aurait $M'^n = A'$ *avec* A' *semblable à A et* M'^n *diagonale.*

Comme A n'est pas diagonalisable, il est donc impossible d'avoir $M^n = A$.

Corrigé exercice 16

HEC 2006 oral voie E

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ *dont la matrice dans la base canonique s'écrit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1) *Pas de problème pour cette question de cours.*

2) *Changeons l'ordre des questions et commençons par la détermination de* Imf.

En regardant les colonnes de la matrice A, on constate immédiatement que :

$$\boxed{Imf = Vect(u) \text{ avec } u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \dim(Imf) = 1}$$

3) *La formule du rang permet d'affirmer que* $\boxed{\dim(\ker(f)) = 2}$

Toujours en regardant la matrice A, en notant $\mathscr{C} = (i, j, k)$ *la base canonique de* $E = \mathbb{R}^3$, *on constate que* $f(j) = 0_E$ *et* $f(i) = -f(k)$ *donc* $j \in \ker(f)$ *et* $i + k \in \ker(f)$.

Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, forment une famille libre de $\ker(f)$ *et donc une base de ker*(f) *que l'on sait être de dimension* 2.
$\boxed{\ker(f) \textit{ est le plan vectoriel de base } (j, i+k)}$

4) *On sait déjà que* f *est diagonalisable car* A *est symétrique. On a déjà une valeur propre* $\lambda = 0$ *et le sous espace propre associé* $E_{(\lambda=0)} = \ker(f)$ *de dimension 2. Les 2/3 de la réduction sont déjà assurés. Par curiosité (en fait une intuition appuyée par pas mal de pratiques), on détermine* $f(u)$ *et on constate que* $f(u) = -2u$. *Donc* $\lambda = -2$ *est valeur propre.* $1 \leqslant \dim(E_{(\lambda=-2)} \leqslant 3-2$. *Donc* $E(\lambda = -2) =$*Im*f.

5) *Tout le travail précédent permet de conclure que* f *est diagonalisable.*

$$\boxed{\mathscr{B}' = (j, i+k, u) \textit{ est une base propre et } A' = mat_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

6) $A'^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} = (-2)^{n-1}A'$, *donc* $f^n = (-2)^{n-1}f$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad A^n = (-2)^{n-1}A}$

7) *On se place dans la base propre de* f :

$$\begin{aligned}
(A-aI)^2 = I &\iff (A'-aI)^2 = I \\
&\iff \begin{pmatrix} (-a)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-2-a)^2 \end{pmatrix} = I \\
&\iff a^2 = 1 \quad \textit{et} \quad (a+2)^2 = 1 \\
&\iff a = 1 \quad \textit{car } a = -1 \textit{ est impossible}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textit{L'ensemble des solutions est donc } \mathscr{S} = \{1\}}$

Corrigé exercice 17

HEC 2007 oral voie E

On donne les fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}$:
$f : x \longmapsto 1$
$g : x \longmapsto x$
$h : x \longmapsto x\ln|x|$ *pour* $x \neq 0$ *et* $h(0) = 0$
On pose $E = Vect(f, g, h)$.

1) *Il suffit de montrer que* (f, g, h) *est une famille libre de* E.
Soit a, b et c trois réels.

$$\begin{aligned}
af + bg + ch = 0_E &\iff \forall x \in \mathbf{R}^* \quad a + bx + cx\ln|x| = 0 \textit{ et } a + 0 + 0 = 0 \\
&\implies a = 0 \textit{ et } b = 0 \textit{ (obtenu en prenant } x = 1) \textit{ et } cx\ln|x| = 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^* \\
&\implies a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0
\end{aligned}$$

(f, g, h) *est libre, donc forme bien une base de* E.

2) $Z(au+bv)=(g.(au+bv))'=a(g.u)'+b(g.v)'=aZ(u)+bZ(v)$
Donc Z est linéaire.
$Z(f)=g'=1=f$
$Z(g)=(g^2)'=2gg'=2g$
$Z(h)=(gh)'=(x^2\ln|x|)'=2x\ln|x|+x^2.\dfrac{1}{x}$
Donc $Z(h)=2x\ln|x|+x=g+2h$ *; Donc* $Z(E)\subset E$ *et* Z *est bien un endomorphisme de* E.

On a immédiatement $\boxed{M=mat_{\mathscr{B}}(Z)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}}$

3) *M est immédiatement inversible. Pivotons pour trouver rapidement* M^{-1} *:*
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
On fait $L_3\leftarrow\dfrac{1}{2}L_3$ *puis* $L_2\leftarrow\dfrac{1}{2}L_2-L_3$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-1/4\\0&0&1/2\end{pmatrix}.$$
$$\boxed{M^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-1/4\\0&0&1/2\end{pmatrix}}$$

4) *Résoudre l'équation* $Z(u)=a+bg+h$ *revient à résoudre le système*
$$(S)\ MX=\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}$$
$$(S)\iff X=M^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b/2-1/4\\1/2\end{pmatrix}.$$

5) *En prenant* $a=b=0$ *dans la question précédente, on obtient* $(gu)'=h$. *Le vecteur u obtenu est* $\begin{pmatrix}0\\-1/4\\1/2\end{pmatrix}$.
On prend gu et on obtient une primitive de h.
En clair, c'est la fonction $\quad x\mapsto-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x^2\ln|x|$

Corrigé exercice 18

HEC 2007 oral voie E

1) *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles, a et b deux réels.* $F((a(u_n)+b(v_n)))=(w_n)$ *avec*
$$\begin{aligned}w_{n+1}&=(au_{n+1}+bv_{n+1})-(au_n+bv_n)\\&=a(u_{n+1}-u_n)+b(v_{n+1}-v_n\\&=t_n\end{aligned}$$

avec $(t_n) = aF((un)) + bF((v_n))$*. Donc* F *est bien linéaire.*

2) $F((u_n)) = u_{n+1} - u_n$

• *Si* (u_n) *est une suite arithmétique de raison r,* $u_{n+1} = u_n + r$ *donc* $\boxed{F((u_n)) = r, \text{ constante}}$

• *Si* (u_n) *est une suite géométrique de raison q,* $u_{n+1} = qu_n$ *donc* $u_{n+1} - u_n = (q-1)u_n$

$\boxed{F((u_n)) \text{ est une suite géométrique de raison } q-1}$

• *Si* (u_n) *est une suite arithmético géométrique,* $u_{n+1} = au_n + b$ *donc* $u_{n+1} - u_n = (a-1)u_n + b$

$v_{n+1} = (a-1)(au_n + b) + b = a(a-1)u_n + b(a-1+1) = a(a-1)u_n + ab = av_n$

$\boxed{F((u_n)) \text{ est une suite géométrique de raison } a}$

3) *La série* $\sum v_n$ *a pour somme partielle de rang n,* $S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$

Donc $\boxed{\text{La série } \sum v_n \text{ converge si et seulement si la suite } (u_n) \text{ converge}}$

4) *Pour trouver* $\ker f$*, on doit chercher les suites* (u_n) *telles que* $u_{n+1} - u_n = 0$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.

$\boxed{\ker f \text{ est l'ensemble des suites constantes}}$

Soit (v_n) *une suite réelle donnée.* $F((u_n)) = (v_n)$ *si et seulement si* $u_n = S_{n-1} + u_0$ *pour* $n \in \mathbf{N}^*$.

La suite définie par u_0 *quelconque et* $u_n = S_{n-1} + u_0$ *pour* $n \in \mathbf{N}^*$ *est un antécédent de la suite* (v_n)*. Donc* $\boxed{Im(F) = E}$

5) *Soit* $(u_n) \in S$*.Posons* $(v_n) = F((u_n))$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n &= (u_{n+3} - u_{n+2}) - 5(u_{n+2} - u_{n+1}) + 6(u_{n+1} - u_n) \\ &= u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n \\ &= (5u_{n+2} - 6u_{n+1} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n \\ &= -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soit G le restriction de F à S.

D'après la question 4), $\ker G$ *est l'ensemble des suites constantes de S, c'est à dire la suite nulle.*

On sait que S est de dimension 2 *donc* $\ker G = \{0_E\}$*. Et G est bien un automorphisme de S.*

6)

$$\begin{aligned} F((u_n)) = \lambda(u_n) &\iff \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} - u_n = \lambda u_n \\ &\iff \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = (\lambda+1)u_n \end{aligned}$$

Donc, pour tout réel $\lambda \in \mathbf{R}$*,* λ *est valeur propre de F et le sous espace propre associé est l'ensemble des suites géométriques de raison* $1+\lambda$.

Corrigé exercice 19

HEC 2007 oral voie E

1) *Pas de problème pour la question de cours.*

2) *Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.*
$\exists r(e_i) \in \mathbf{N}^*$ *tel que* $u^{r(e_i)} = 0_E$. *On considère* $p = \max(r(e_i) \ / \ i \in [\![1,n]\!]\}$.
On a alors $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad u^p(e_i) = 0_E$ *donc* $\forall x \in E \quad u^p(x) = 0_E$ *donc* u^p *est l'application nulle. Supposons que* $p = r(e_k)$. $u^{p-1}(e_k) \neq 0_E$ *(sinon, on aurait* $p < r(e_k)$*) donc* u^{p-1} *n'est pas l'application nulle.*

3) u^r *est l'application nulle. Donc* $p(x) = x^r$ *est un polynôme annulateur de u. Si* λ *est valeur propre de u,* $\lambda^r = 0$ *donc* $\lambda = 0$. *Soit* $x \in E$ *tel que* $u^{r-1}(x) \neq 0_E$.
$u(u^{r-1}(x)) = 0_E$ *donc* $u^{r-1}(x)$ *est un vecteur propre de u associé à la valeur propre* 0. *Donc* 0 *est bien valeur propre* $\boxed{0 \textit{ est la seule valeur propre de } u}$.

Si u était diagonalisable, u serait semblable à l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas. Donc $\boxed{u \textit{ n'est pas diagonalisable}}$

4) *On pose :* $\quad v = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{u^k}{k!}$.
Posons $w = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \frac{u^k}{k!}$
On pose $a_k = \dfrac{1}{k!}$ *et* $b_k = \dfrac{(-1)^k}{k!}$. *On compose v et w. Par opérations algébriques, on obtient* $v \circ w = \displaystyle\sum_{k=0}^{2r-1} c_k u^k$ *avec, pour* $k > 0$ *:*

$$\begin{aligned}
c_k &= \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \times \frac{-1)^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \frac{k!}{i!\ (k-i)!} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \\
&= \frac{1}{k!} (1-1)^k = 0
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $c_0 = 1$. *Donc* $v \circ w = id_E$.
On peut conclure $\boxed{v \textit{ est un automorphisme et } v^{-1} = w}$

5) *Soit x un vecteur de E :*

$$\begin{aligned}
x \in \ker(u) &\iff u(x) = 0_E \\
&\implies v(x) = id(x) \\
&\implies x \in \ker(v - id_E)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\ker u \subset \ker(v - id_e)}$

6) $\ker(u) \neq \{0_E\}$ *donc* $(\ker -v - id_E) \neq \{0_E\}$ *donc* $\lambda = 1$ *est valeur propre de v.*

$$v(x) = \lambda x \iff \sum_{k=0}^{r-1} \frac{u^k(x)}{k!} = \lambda x$$
$$\iff \sum_{k=1}^{r-1} \frac{u^k(x)}{k!} = (\lambda - 1)x \quad (1)$$

Or $\exists x \in \boldsymbol{N}^*$ *tel que* $u^{r(x)} = 0_E$ *et* $u^{r(x)-1} \neq 0_E$.

On compose (1) par $u^{r(x)-1}$: $\quad u^{r(x)-1}\left[\sum_{k=1}^{r-1} \frac{u^k(x)}{k!}\right] = (\lambda - 1)u^{r(x)-1}(x)$.

Or $u^{r(x)-1}\left[\sum_{k=1}^{r-1} \frac{u^k(x)}{k!}\right] = \sum_{k=1}^{r-1} \frac{u^{r(x)-1+k}(x)}{k!} = 0_E$

Donc $(\lambda - 1)u^{r(x)-1}(x) = 0_E$ *et, comme* $u^{r(x)-1} \neq 0_E$ *on a donc* $\lambda = 1$.

On peut conclure : $\boxed{\lambda = 1 \text{ est donc la seule valeur propre de } v}$

Corrigé exercice 20

HEC 2007 oral voie E

Question de cours : *Décidément, cette question revient souvent. Il est facile d'y répondre.*

1) *M est symétrique, donc f est diagonalisable.*

2) *Résolvons le système* (S_1) $(M + 2I)X = 0$

$$(S_1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, *on passe y, z et t en paramètres.*

$$X = \begin{pmatrix} y+z-t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = yU_1 + zU_2 + tU_3 \text{ avec } U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } U_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour $i \in [\![1,3]\!]$, *on note* u_i *les vecteurs de* $\boldsymbol{R}^4$ *ayant pour composantes* U_i *dans la base canonique.* (u_1, u_2, u_3) *est une famille génératrice de* E_{-2}. *On vérifie que c'est une famille libre.*

$yu_1 + zu_2 + tu_3 = 0_{\boldsymbol{R}^4}$ *donne immédiatement* $y = 0, z = 0, t = 0$. *Donc* (u_1, u_2, u_3) *est une base de* E_{-2}. $\boxed{\dim(E_{-2}) = 3}$.

3) $f((1,-1,-1,1))$ *a pour composantes, dans la base canonique de* R^4 :

$$\begin{pmatrix} -1 & - & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc 2 *est valeur propre.* $\dim(E_2) \geqslant 1)$. *On sait d'après le cours que la somme des dimensions des sous espaces propres est inférieure à 4, donc* 2 *est valeur propre et* $E_2 = Vect(u_4)$ *avec* $u_4 = (1,-1,-1,1)$

4) *Prenons* $\mathscr{B} = (u_1,u_2,u_3,u_4)$. *Dans ce cas,* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On montre facilement que P *est inversible, ce qui prouve que* $\mathscr{B}$ *est une base (propre). Le cours permettait déjà de deviner ce résultat. Il nous permet aussi de donner la matrice* M' *de* f *dans la base* $\mathscr{B}$: $M' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a donc $M'^2 = 4I$.

5) *On aura donc* $M'^{2n} = 2^{2n}I$ *et* $M'^{2n+1} = 2^{2n}M'$ *donc*

$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \quad M^{2n} = 2^{2n}I = 4^nI \text{ et } M^{2n+1} = 2^{2n}M = 4^nM}$

6) *En notant* $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}$, *on peut donc écrire* $U_{n+1} = \dfrac{1}{4}M\,U_n$.

Par une récurrence immédiate, on a $U_n = \dfrac{1}{4^n}M^nU_0$.

Donc $U_{2n} = \dfrac{1}{4^{2n}}.4^nIU_0 = \dfrac{1}{4^n}U_0$.

De même, $U_{2n+1} = \dfrac{1}{4^{2n}}.4^nMU_0 = \dfrac{1}{4^n}MU_0$

Dans les deux cas, les suites tendent vers 0.

Corrigé exercice 21

HEC 2008 oral voie E

1) *Question de cours : pas de problème.*

1) f *est continue sur* $\mathbf{R}$, *donc admet une primitive* F *sur* $\mathbf{R}$, *qui est donc* C^1 *sur* $\mathbf{R}$.
En fait $\Phi(f)$ *est une primitive de* f, *et est donc* C^1 *sur* $\mathbf{R}$ *et* $\forall x \in \mathbf{R} \quad g'(x) = f(x)$

2) $\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \displaystyle\int_x^{2x} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)\, dt = \lambda_1 \int_x^{2x} f_1(t)\, dt + \lambda_2 \int_x^{2x} f_2(t)\, dt$

Donc $\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1\Phi(f_1) + \lambda_2(\Phi(f_2)$.
Φ *est linéaire et* $\forall f \in C^0 \quad \Phi(f) \in C^0$ *donc* Φ *est un endomorphisme de* C^0.

3) *L'application* $v : x \mapsto |x|$ *est continue sur* $\mathbf{R}$ *non dérivable sur* $\mathbf{R}$ *(deux demi tangentes en* 0*).*
Φ *n'est pas surjective car* v, *qui est dans* C^0 *ne peut pas avoir d'antécédent.*
Cherchons $\ker(\Phi)$.
Si g *est la fonction nulle alors,* $\forall x \in \mathbf{R}$ $g'(x) = 0$ *donc* f *est aussi la fonction nulle sur* $\mathbf{R}$.
Donc $\ker(\Phi) = \{0_{C^0}\}$ *et ainsi,* Φ *est injective.*

4) *On commence par remarque que f est nécessairement dérivable sur $\boldsymbol{R}$ car $f = \frac{1}{\lambda}\Phi(f)$ (en utilisant la question 2)).*
Soit $h : x \mapsto f(x)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$.
$h'(x) = -\frac{1}{\lambda}f(x)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + f'(x)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$
Comme on a $\lambda f(x) = \int_0^x f(t)\ dt$, en dérivant, on a : $\lambda f'(x) = f(x)$.
En reportant, cela donne $h'(x) = 0$ donc h est constante.
Comme $f(0) = \frac{1}{\lambda}\int_0^0 f(t)\ dt = 0$, on a donc $h(0) = 0$, et h est nécessairement la fonction nulle, et, en conséquence, f aussi. ***c.q.f.d.***
Donc $\lambda \neq 0$ ne peut pas être valeur propre. On a déjà vu que 0 n'était pas valeur propre, car Φ est injective, donc $\boxed{\Phi \text{ n'admet pas de valeur propre}}$

5) *Posons (H_n) F_n est de classe C^{n+1} sur $\boldsymbol{R}$ et $\forall k \in [\![0,N]\!]$ $F^k(0) = 0$*
- *(H_0) est vrai.*
- *supposons (H_{n-1}) vrai pour $n \geqslant 1$, alors F_n est de classe C^{n+1} (primitive de F_{n-1} de classe C^n) et $F_n' = F_{n-1}$, donc $F_n'(0) = F_{n-1}(0)$. C'est $\int_0^0 F_{n-2}(t)\ dt = 0$ pour $n \geqslant 2$ et c'est $\int_0^0 f(t)\ dt = 0$ pour $n = 2$*

Donc $F'(n)(0) = 0$. Ensuite $F_n^k = F_{n-1}^{k-1}(0) = 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.
Après, il faut avoir l'intuition de la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{F_n^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ F_n^{n+1}(t)\ dt$$

Cette formule n'est pas explicitement au programme mais sous jacente dans la mise en place de la formule de Taylor. Elle se démontre très facilement par récurrence.
D'après ce qui précède, $F_n^{(k)}(0) = 0$ et $F_n^{(n+1)} = F_{n-1}^{(n)} = \ldots = F_0' = f$ et on obtient donc le résultat attendu.

Corrigé exercice 22

HEC 2008 oral voie E

Pour tout réel a, on note $A(a)$ la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) **Question de cours :** *$A \in \mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$ est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$ tel que $P^{-1}AP$ donne une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$ diagonale.*
Dans ce cas, ${}^tD = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\ {}^tA\ {}^tP^{-1} = {}^tP\ {}^tA\ {}^tP^{-1}$, ce qui permet d'affirmer que ${}^tA$ est diagonalisable.

2) **a:** *$A(a)$ est symétrique, donc diagonalisable.*

b: *Résolvons le système* (S) $(A(a)-aI)X=0$

$$(S) \sim \begin{pmatrix} 2-a & 1 & a & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ a & 1 & 2-a & | & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 2-a & 1 & a & | & 0 \\ a & 1 & 2-a & | & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2-(2-a)L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1-a & 2(1-a) & | & 0 \end{pmatrix}$$

• *Si* $a \neq 1$, $(S) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = a$ *est valeur propre et* $E_{(\lambda=a)} = Vect(u)$ *avec* $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• *Si* $a=1$, $(S) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ *est valeur propre et* $E_{(\lambda=a)} = Vect(v,w)$ *avec* $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c: *Soit* $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$A(a)U_1 = (3+a)U_1$ *et* $A(a)U_2 = (2-a)U_2$
Donc $3+a$ *et* $2-a$ *sont des valeurs propres.*

d: *Si* $a=1$, $2-a=1=a$ *et* $3+a=4$. *La situation est maîtrisée.*
$A'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P^{-1}A(a)P \quad$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $a \neq 1$, *on vérifie facilement que , en posant* $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (U_3, U_2, U_1) *est une base (propre).* $A'(a) = P^{-1}A(a)P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 3+a \end{pmatrix}$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

On peut remarquer que, pour $a = -\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$ *est une valeur propre double.*

3) **a:** *On peut écrire :* $\quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A(0)\, X_n$

b: *On obtient facilement par récurrence :* $\quad X_n = A(0)^n X_0$.

$A'(0)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

On peut calculer $A(0)^n = P\,A'(0)^n P^{-1}$. *Avec un peu de courage et d'endurance, on obtient*

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad A(0)^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1}+3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1}-2^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1}-2^{n-1} & 3^{n-1} & 2^{n-1}+3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc $x_n = x_0(2^{n-1}+3^{n-1}) + y_0 3^{n-1} + z_0(3^{n-1}-2^{n-1})$

$x_n = 2^{n-1}(x_0 - z_0) + 3^{n-1}(x_0 + y_0 + z_0)$

De même :

$y_n = 3^{n-1}(x_0 + y_0 + z_0)$

$z_n = 2^{n-1}(z_0 - x_0)$

Il en résulte que les suites (x_n), (y_n) *et* (z_n) *restent bornées si et seulement si* $x_0 = z_0$ *et* $x_0 + y_0 + z_0 = 0$

La condition est donc $\boxed{x_0 = z_0,\ y_0 = -2z_0, \text{ avec } z_0 \in \mathbf{R}}$

Dans ce cas, les trois suites sont nulles dès le rang 1.

4) **a:** *Si B et B' sont deux matrices semblables de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, alors elles représentent le même endomorphisme f dans deux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.*

$C^2 = B$ signifie que, si h est l'endomorphisme de matrice C dans la base $\mathscr{B}_1$, $h^2 = f$.

Si on se place dans la base $\mathscr{B}_2$, on aura alors $C'^2 = B'$ avec C' la matrice de h dans $\mathscr{B}_2$.

b: *Si B et C sont deux matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $C^2 = B$, alors $BC = C^2 \times C = C^3$ et $CB = C \times C^2 = C^3$. On a bien $BC = CB$.*

c: *Soit* $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$

$MD = \begin{pmatrix} 3a & 6b & -c \\ 3a' & 6b' & -c' \\ 3a'' & 6b'' & -c'' \end{pmatrix} \quad$ *et* $\quad DM = \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 6a' & 6b' & 6c' \\ -a'' & -b'' & -c'' \end{pmatrix}$

$MD = DM$ si et seulement si $3a' = 6a'$, $3b = 6b$, $3c = -c$, $3a'' = -a''$, $6b'' = -b''$, $6c' = -c'$

La condition est donc $a' = a'' = b = b'' = c = c' = 0$

Donc $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$

$\boxed{MD = DM \text{ si et seulement si } M \text{ est diagonale}}$

d: *Supposons qu'il existe une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = A(3)$, alors il existerait une matrice M' telle que* $M'^2 = A'(3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

M' est nécessairement diagonale, d'après ce qui précède. Si $M' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$*,*
*on aurait $\gamma^2 = -1$, ce qui est impossible. La réponse est donc **non**.*

Corrigé exercice 23

HEC 2009 oral voie E

1) Question de cours : *voir cours (surtout, il faut dire que deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme)*

2) *A est triangulaire (bien orientée) : $Sp(A) = \{1\}$.*
Si A est diagonalisable, A est semblable à I donc $A = I$.
Donc $\boxed{A \text{ diagonalisable} \Longleftrightarrow a = b = c = 0}$

3) *A est inversible (3 pivots non nuls).* $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $N^3 = 0_3$, c'est à dire $(A - I)^3 = 0$ ou encore : $A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$
Ainsi $A(A^2 - 3A + 3I) = I$ et donc $A^{-1} = A^2 - 3A + 3I$
Or $A = N + I$ donc
$A^{-1} = (N^2 + 2N + I) - 3(N + I) + 3I = N^2 - N + I = M + I$ $\boxed{A^{-1} = M + I}$

4) $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Donc, l'hypothèse N est de rang 2 se traduit par $a \neq 0$ et $b \neq 0$

a: $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Comme $a \neq 0$ et $c \neq 0$, $N^2 \neq 0$.*
On peut traduire cela par : $\exists x \in \boldsymbol{R}^3$ *tel que $u^2(x) \neq 0$*
Supposons $\alpha u^2(x) + \beta u(x) + \gamma x = 0$ (1), alors, en composant par u, on obtient, en utilisant le fait que $u^3(x) = 0$:
$\beta u^2(x) + \gamma u(x) = 0$ (2) *On recompose par u une deuxième fois : $\gamma u^2(x) = 0$ (3)*
De (3), on tire $\gamma = 0$ car $u^2(x) \neq 0$. En reportant dans (2), on tire $\beta = 0$ puis, en reportant dans (1), on a $\alpha = 0$.
Donc $(u^2(x), u(x), x)$ est une famille libre de 3 vecteurs dans $\boldsymbol{R}^3$ qui est de dimension 3. Donc $\mathscr{B}$ est une base.
Recherchons la matrice N' de u dans cette base : en première colonne, on met les composantes de $u(u^2(x))$. Or $u(u^2(x) = u^3(x) = 0$
En deuxième colonne, on met les composantes dans $\mathscr{B}$ de $u(u(x))$. C'est $u^2(x)$ qui a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pareil pour la troisième colonne. Au final, on obtient : $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***c.q.f.d.***

b: *Soit M' la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$.*

Comme $v = u^2 - u$, on a $M' = N'^2 - N' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

M' est une matrice du même type que N avec $a = -1$, $c = -1$ et $b = 1$.
Cette dernière matrice est donc semblable à N' d'après la question 4)a.
On résume : N est semblable à N'. M est semblable à M'quiestsemblableN'.
Par transitivité, N est semblable à M.

c: *$N = A - I$ et $M = A^{-1} - I$, d'après 3).*
$N = Q^{-1}MQ$
$A - I = Q^{-1}(A^{-1} - I)Q = Q^{-1}A^{-1}Q - I$ *donc* $A = Q^{-1}A^{-1}Q$.
Cela prouve bien que A et A^{-1} sont semblables.

Corrigé exercice 24

HEC 2009 oral voie BL

1) Question de cours : *La définition ne pose pas de problèmes. Les propriétés sont assez nombreuses, il ne faut pas oublier :*
- *Si $AB = I$ alors ...*
- *Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = ..$*

2) *E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\boldsymbol{R})$ car la matrice nulle n'est pas dans E.*

3) *Point par point ...*

- *E n'est pas stable par la multiplication par un scalaire, car*
$$-M(x) = \begin{pmatrix} -1+x & -x & 0 \\ x & -1+x & 0 \\ x & x & -1+2x \end{pmatrix} \notin E$$
- *E n'est pas stable pour l'addition car*
$$M(x) + M(y) = \begin{pmatrix} 2-x-y & -x-y & 0 \\ -x-y & 2-x-y & 0 \\ -x-y & x+y & 2-2x-2y \end{pmatrix} \notin E.$$
- *E est stable pour la multiplication des matrices, en effet :*

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) &= \begin{pmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 1-x & 0 \\ -x & x & 1-2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-x & -x & 0 \\ -x & 1-x & 0 \\ -x & x & 1-2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-x-y+2xy & -x-y+2xy & 0 \\ -x-y+2xy & 1-x-y+2xy & 0 \\ -x-y+2xy & x+y-2xy & 1-2x-2y+4xy \end{pmatrix} \\ &= M(x+y-2xy) \in E \end{aligned}$$

4) *D'après ce qui précède*

$$\begin{aligned} M(x) \times M(y) = I &\iff M(x+y-2xy) = I \\ &\iff x+y-2xy = 0 \\ &\iff y = -\frac{-x}{1-2x} \text{ si } x \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, si $x \neq \frac{1}{2}$, $M(x)$ *est inversible et* $[M(x)]^{-1} = M\left(-\frac{x}{1-2x}\right) \in E$

Par ailleurs, si $x = \frac{1}{2}$, $M\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas inversible. En conclusion* $\boxed{M(x) \text{ inversible} \iff x \neq \frac{1}{2} \quad \text{et dans ce cas} \quad M(x)^{-1} = M\left(-\frac{x}{1-2x}\right) \in E}$

5) *Pour* $x = 0$, $M(0) = I$ *est diagonale. Regardons maintenant le cas* $x \neq 0$.

On voit tout de suite que $M(x) - I = \begin{pmatrix} -x & -x & 0 \\ -x & -x & 0 \\ -x & x & -x \end{pmatrix}$ *qui est une matrice de rang* 1.

Donc 1 *est valeur propre de* $M(x)$ *et le sous espace propre sera de dimension* 2.

On voit aussi, en regardant la troisième colonne de $M(x)$*, que* $1-2x$ *est valeur propre de* $M(x)$.

$M(x) - (1-2x)I = \begin{pmatrix} x & -x & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *qui est une matrice de rang 2.*

Donc $1-2x$ *est valeur propre de* $M(x)$ *et le sous espace propre est de dimension 2.*
La somme des dimensions des sous espaces propres donnant 3, on peut affirmer que $M(x)$ *est diagonalisable. Ainsi* $\boxed{\forall x \in \mathbf{R} \quad M(x) \text{ est diagonalisable}}$.

6) $[M(1)]^2 = M(1+1-2) = M(0) = I$ *du coup,*
$\boxed{[M(1)]^n = I \text{ si } n \text{ est pair} \quad \text{et} \quad [M(1)]^n = M \text{ si } n \text{ est impair}}$

Corrigé exercice 25

HEC 2011 oral voie E

1) *Question de cours : pas de problème.*

2) **a:** $u(X^k)$*, pour* $k \in [\![0,n]\!]$*, est la* $k+1$*-ième colonne de* M*. On regarde donc l'énoncé :*

$$u(X^k) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ k \\ 0 \\ n+1-k-1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ k \\ 0 \\ n-k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{u(X^0) = nX,\ u(X^n) = nX^{n-1}}$

$\boxed{\text{et pour } k \in [\![1, n-1]\!] \qquad u(X^k) = kX^{k-1} + (n-k)X^{k+1}}$

On peut remarquer que la formule générale marche pour $k = 0$ *et pour* $k = n$.

b: *Si* $p \in \boldsymbol{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *donc :*

$$\begin{aligned} u(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left[kX^{k-1} + n - kX^{k+1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} + nX \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - X^2 \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} \\ &= P' + nXP - X^2 \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{u(P) = nXP + (1 - X^2)P'}$

3) *Pour* $k \in [\![0, n]\!]$, *on pose* $P_k(X) = (X-1)^k (X+1)^{n-k}$.

a: $P'_k = k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k} + (n-k)(X-1)^k(X+1)^{k+1}$
$(1 - X^2)P'_k = (1 - X)(1 + X)P'_k = -(X-1)(X+1)P'_k$
Donc $P'k = -k(X-1)^k(X+1)^{n-k+1} - (n-k)(X-1)^{k+1}(X+1)^{n-k}$
$nXP_k = NX(X-1)^k(X+1)^k$
Donc :

$$\begin{aligned} nXP_k + (1 - X^2)P'_k &= nX(X-1)^k(X+1)^{n-k} - k(X-1)^k(X+1)^{n-k+1} \\ &\quad -(n-k)(X-1)^{k+1}(X+1)^{n-k} \\ &= (X-1)^k(X+1)^{n-k}\left[NX - k(X+1) - (n-k)(X-1)\right] \\ &= (X-1)^k(X+1)^{n-k}\left[nX - kX - k - nX + kX + n - k\right] \\ &= (n-2k)(X-1)^k(X+1)^{n-k} \\ &= (n-2k)P_k \end{aligned}$$

$\boxed{P_k \text{ est vecteur propre de u, associé à la valeur propre } n - 2k}$

b: *On a* $n+1$ *valeurs propres distinctes en dimension* $n+1$, *donc u est diagonalisable et* $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *est une base propre de* $\boldsymbol{R}_n[X]$.

c: *Tous les sous espaces propres sont de dimension* 1. $E_{(\lambda = n-2k)} = Vect(P_k)$

4) *Dans cette question, on suppose que* $n = 3$.

a: *On utilise les résultats précédents :* $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Pour déterminer la matrice de passage, regardons précisément les vecteurs propres :
$P_0(X) = (X-1)^0(X+1)^3 = (X+1)^3 = 1 + 3X + 3X^2 + X^3$
$P_1(X) = (X-1)^1(X+1)^2 = (X^2-1)(X+1) = -1 - X + X^2 + X^3$
$P_2(X) = (X-1)^2(X+1) = (X-1)(X^2-1) = 1 - X - X^2 + X^3$
$P_3(X) = (X-1)^3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$

Donc $\boxed{\text{Matrice de passage } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

b: *C'est classique. On montre facilement que les matrices commutant avec D sont les matrices diagonales.*

c: *S'il existe un endomorphisme v de $\mathbf{R}_3[X]$ tel que $v\circ v = u$, alors $u\circ v = v^3 = v\circ u$. On a donc $u\circ v = v\circ u$. D'après ce qui précède, la matrice de v dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est diagonale.*

Soit A cette matrice. $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$.

On a $v\circ v = u$ donc $A^2 = D$ donc $\begin{cases} \alpha_1^2 = 3 \\ \alpha_2^2 = 1 \\ \alpha_3^2 = -1 \\ \alpha_4^2 = -3 \end{cases}$ *C'est évidemment impossible.*

$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } v \text{ de } \mathbf{R}_3[X] \text{ tel que } v\circ v = u}$

Corrigé exercice 26

HEC 2015 oral voie E

1) Question de cours : *pas de problème, mais attention de ne pas confondre condition nécessaire et suffisante et condition suffisante.*

2) a: *Soit x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ et λ un réel.*

$$\begin{aligned} f(\lambda x + y) &= (\lambda x + y) - \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i - y_i)\right) v \\ &= \lambda\left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v\right) + \left(y - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) v\right) \\ &= \lambda f(x) + f(y) \end{aligned}$$

De plus, $\forall x \in \mathbf{R}^n \quad f(x) \in \mathbf{R}^n$ donc f est bien un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$.

b: *Calculons $(f\circ f)(x)$ pour $x \in \mathbf{R}^n$.*

$$\begin{aligned} (f\circ f)(x) &= f\left[x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v\right] \\ &= x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v - \sum_{k=1}^{n}\left[x_k - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v_k\right] v \\ &= x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) v + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_k\right)\right)}_{S} v \end{aligned}$$

Or $S = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)}_{=2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i.$

Donc $(f\circ f)(x) = x - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v = x$

On a donc $\boxed{f\circ f = id_{\mathbb{R}^n},\ f \text{ est bijectif et } f^{-1} = f}$

c: $P(x) = x^2 - 1$ *est un polynôme annulateur de* f. *On sait que les valeurs propres de* f *sont nécessairement solution de* $P(x) = 0$ *donc* $\boxed{Spec(f) \subset \{-1, 1\}}$

3) **a:** $f(x) - id(x) = f(x) - x = -\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v$.

Donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre et } E_{(\lambda=1)} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}}$

C'est un hyper plan vectoriel qui est donc de dimension $n-1$.
Par ailleurs, on remarque que $f(v) = v - 2v = -v$ *donc* v *est un vecteur propre de* f *associé à la valeur propre* $\lambda = -1$. *Comme la somme des dimensions des sous espaces propres ne peut pas dépasser* n *:*
$\boxed{-1 \text{ est valeur propre et } E_{(\lambda=-1)} = Vect(v)}$

b: *La somme des dimensions des sous espaces propres est* n *donc* $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

4) **a:** $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad f(e_i) = e_i - v$ *donc* $\boxed{M = \begin{pmatrix} 1-v_1 & -v_1 & \dots & -v_1 \\ -v_2 & 1-v_2 & \dots & -v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -v_n & -v_n & \dots & 1-v_n \end{pmatrix}}$

On peut remarquer que : $\boxed{M = I - V}$

b: *On sait que* M *est semblable à la matrice* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Or, on vient de voir que $V = I - M$. *Donc* V *est semblable à* $I - M'$ *c'est à dire à* D ***c.q.f.d.***

Corrigé exercice 27

HEC 2015 oral voie E

1) **Question de cours :** *pas de problème.*

2) *Soit* f *l'endomorphisme ayant* A *comme matrice dans la base canonique* $\mathscr{C}$ *de* $\mathbb{R}^n$.

$P(A)$ *est la matrice dans* $\mathscr{C}$ *de l'endomorphisme* $P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$.

Q *est la matrice de passage de* $\mathscr{C}$ *à une nouvelle base* $\mathscr{B}$.

La matrice dans $\mathscr{B}$ *de* $P(f)$ *est* $\sum_{k=0}^{p} a_k A'^k = P(A')$ *où* A' *est la matrice de* f *dans* $\mathscr{B}$.

$A' = Q^{-1}AQ$.

On a donc $\boxed{P(Q^{-1}\,A\,Q) = Q^{-1}\,P(A)\,Q}$

3) **a:** *Commençons par vérifier que φ est linéaire.*

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q) &= ((\lambda P+Q)(x_1),(\lambda P+Q)(x_2),\dots,(\lambda P+Q)(x_n))\\ &= \lambda((P(x_1),P(x_2),\dots,P(x_n))+(Q(x_1),Q(x_2),\dots,Q(x_n))\end{aligned}$$

Donc $\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$. φ est bien linéaire.
Comme $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{R}^n$ sont de même dimension n, pour montrer que φ est bijective, on peut donc montrer que son noyau est réduit au vecteur nul.
Soit $P\in\ker(\varphi)$. On a donc $P(x_1)=P(x_2)=\dots=P(x_n)=0$.
Donc P est un polynôme de degré $n-1$ maximum, admettant n racines distinctes. Donc P est le polynôme nul. ***c.q.f.d.***

b: *On cherche donc P tel que $P(\lambda_i)=\dfrac{1}{\lambda_i}$ (on sait que $\lambda_i\neq 0$ par hypothèse).*
On prend donc $P=\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\dots,\dfrac{1}{\lambda_n}\right)$. C'est la solution unique (du fait de la bijectivité de φ).
Les réels λ_i sont distincts, donc T est diagonalisable. $T=Q^{-1}DQ$ avec $Q=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$.
On a alors $T\times P(T)=Q^{-1}DQP(Q^{-1}DQ)=Q^{-1}DQQ^{-1}P(D)Q=Q^{-1}DP(D)Q$
Or $P(D)=\begin{pmatrix}P(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&P(\lambda_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$
Donc $DP(D)=I_n$ et donc $TP(T)=I_n$. Autrement dit $\boxed{P(T)\text{ est l'inverse de }T}$

4) *Il suffit d'appliquer la méthode précédente.*
On commence par déterminer un polynôme P de $R_2[X]$ tel que $P(1)=1$, $P(2)=\dfrac{1}{2}$ et $P(3)=\dfrac{1}{3}$

Si $P(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2$ on a donc $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma &=1\\ \alpha+2\beta+4\gamma &=\dfrac{1}{2}\\ \alpha+3\beta+9\gamma &=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

On trouve sans difficulté : $\alpha=\dfrac{11}{6}$, $\beta=-1$ et $\gamma=\dfrac{1}{6}$ donc $\boxed{P(X)=\dfrac{11}{6}-X+\dfrac{1}{6}X^2}$

3.2 Analyse

Corrigé exercice 28

Entraînement

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$.

1) $f(x) = -\ln\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -\ln\left(\dfrac{1-x}{x}\right)$.

Un tableau de signe donne facilement $\mathscr{D}_f =]0,1[$.

Soit $h \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ *:*

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}+h\right) &= -\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+h}-1\right) = -\ln\left(\frac{2}{2h+1}-1\right)\\
&= -\ln\left(\frac{1-2h}{1+2h}\right)\\
f\left(\frac{1}{2}-h\right) &= -\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-h}-1\right) = -\ln\left(\frac{2}{1-2h}-1\right)\\
&= -\ln\left(\frac{1+2h}{1-2h}\right)
\end{aligned}$$

On a donc : $\quad f\left(\dfrac{1}{2}+h\right) = -f\left(\dfrac{1}{2}-h\right)$

Cela prouve bien que le point de coordonnées $(1/2, 0)$ *est centre de symétrie.*

2) f *est immédiatement de classe* C^∞ *sur* $]0,1[$ *comme composée de fonctions* C^∞.

$\forall x \in]0,1[\quad f'(x) = -\dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-1} = \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1}{x(1-x)}$

Donc $\forall x \in]0,1[\quad f'(x) > 0$.

On a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ *f est donc strictement croissante de* $I =]0,1[$ *dans* $J = \mathbf{R}$. *f réalise donc une bijection de* $]0,1[$ *dans* $\mathbf{R}$.

Soit g la bijection réciproque.

f est dérivable sur $]0,1[$ *et ne s'annule pas. Le cours dit que g est dérivable sur* $\mathbf{R}$ *et que, si* $f(x) = y$, $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Or $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ *donc* $g'(0) = \dfrac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{4} \qquad \boxed{g'(0) = \dfrac{1}{4}}$

Soit $y \in \mathbf{R}$ *et* $x \in]0,1[$ *:*

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\iff -\ln\left(\frac{1}{x}-1\right) = y\\
&\iff \frac{1}{x}-1 = e^{-y}\\
&\iff x = \frac{1}{1+e^{-y}}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall y \in \mathbf{R} \qquad g(y) = \dfrac{1}{1+e^{-y}}}$

3) *Posons* $k(x) = h(x) - x$

$k'(x) = \dfrac{1}{f'(y)} - 1 = y(1-y) - 1 = -y^2 + y - 1$

$\Delta = 1 - 4 < 0$ *donc* $-y^2 - y - 1 < 0$. *k est strictement décroissante sur* $\mathbf{R}$.

k est C^∞ *sur* $\mathbf{R}$ *et* $k'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - 1 = -\dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

On a immédiatement $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$. *k est continue et strictement décroissante sur* $\mathbf{R}$. *Donc k réalise une bijection de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$. 0 *admet donc un antécédent unique* $a \in \mathbf{R}$. *C'est le résultat attendu.*

4) *Cherchons d'abord à encadrer a.*

$k(0) = \dfrac{1}{2}$ *donc* $a > 0$.

$k(1) = \dfrac{1}{1+e^{-1}} - 1 = -\dfrac{e^{-1}}{1+e^{-1}} < 0$ *donc* $a < 1$.

On a donc $a \in]0,1[$. *L'énoncé nous incite à utiliser l'inégalité des accroissements finis.*

On va montrer que $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ *sur* $]0,1[$.

$h'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ *donc* $|h'(x)| = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$$\begin{aligned} |h'(x)| \leqslant \frac{1}{3} &\iff 3e^{-x} \leqslant 1 + 2e^{-x} + (e^{-x})^2 \\ &\iff X^2 - X + 1 \geqslant 0 \qquad \textit{en posant } X = e^{-x} \end{aligned}$$

$\Delta = -3$ *donc* $X^2 - X + 1 \geqslant 0$ *pour tout X. On a bien* $|h'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$.

On démontre facilement, par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad u_n \in]0,1[$.

On utilise l'inégalité des accroissements finis sur $]0,1[$ *:*

$$\forall (x,x') \in]0,1[^2 \qquad |h(x) - h(x')| \leqslant \frac{1}{3}|x - x'|$$

En prenant $x = u_n$ *et* $x' = a$ *nous obtenons :*

Pour tout n on a : $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{3}|u_n - a|$.

Puis, par une récurrence facile $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |u_0 - a|$ *donc* $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Par le théorème d'encadrement, on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - a| = 0$

$\boxed{\textit{La suite } (u_n) \textit{ converge vers } a}$

L'algorithme est classique. On calcule u_n *en prenant n vérifiant* $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant \varepsilon$.

En passant par les ln, cela donne $n \geqslant -\dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(3)}$.

D'où le script Scilab suivant :

```
function y=h(x)
    y=1/(1+exp(-x))
endfunction

eps=0.001
n=1+floor(-log(eps)/log(3))
u=1/2
for k=1:n
    u=h(u)
end
disp([n,u])
```

L'exécution affiche : `6.    0.659025`

On peut faire une rapide vérification graphique en ajoutant :

```
x=linspace(-1,1,200)
fplot2d(x,h)
plot(x,x)
```

Corrigé exercice 29

Entraînement

Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}\, dx$.

1) *Posons $f_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$. f_n est continue et positive sur $\mathbf{R}^+$.*
$f_n(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, donc, par le critère de domination des intégrales de fonctions positives $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx$ converge. Comme $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$ est une intégrale "propre", on peut donc confirmer l'existence de I_n.

2) *Classique, c'est presque du cours.*
Soit A un réel strictement positif. Posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n(A) = \displaystyle\int f_n(x)\, dx$
Soit $n \geqslant 2$, calculons $I_n(A)$ par une intégration par parties en prenant $u(x) = x^{n-1}$ et $v'(x) = xe^{-x^2/2}$, avec $v(x) = -e^{-x^2/2}$.
u et v sont C^1 sur $[0,A]$, on peut donc utiliser la formule d'intégration par parties :
$I_n((A) = \left[-x^{n-1}e^{-x^2/2}\right]_0^A + \displaystyle\int_0^A -(n-1)x^{n-2}e^{x^2/2}\, dx = -A^{n-1}e^{-A^2/2} + (n-1)I_{n-A}(A)$
On a vu précédemment que la limite de $I_n(A)$ existe et vaut I_n.
Donc, en faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient $\quad \forall n \geqslant 2 \qquad I_n = (n-1)I_{n-2}$.
On connaît φ la densité (usuelle) de la loi normale centrée réduite.
$I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi}\varphi(x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$
$I_1(A) = \displaystyle\int_0^A xe^{-x^2/2}\, xd = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^A = -e^{-A^2/2} + 1$. *Donc* $I_1 = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} I_1(A) = 1$
Ainsi $I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} = (2n-1)\times(2n-3)\ldots 3\times 1\times I_0 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)I_0$

De même, $I_{2n+1}=(2n)I_{2n-1}=(2n)\times 2(n-2)\times\ldots 4\times 2\times I_1$

Donc $\boxed{\forall n\in\mathbf{N}\qquad I_{2n}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\qquad \text{et}\qquad I_{2n+1}=2^n.n!}$

3) **a:** *Ce travail ressemble comme deux gouttes d'eau à celui fait dans la question 2). On donne la voie à suivre.*
On pose $J_n=\int_0^{+\infty}x^n e^{-nx^2/2}\,dx$ *et* $J_n(A)=\int_0^{+\infty}x^n e^{-nx^2/2}\,dx$.
On commence par justifier l'existence de J_n *pour tout* $n\in\mathbf{N}$.
Puis, on calcule $J_{n+1}(A)$ *en faisant une intégration par parties où l'on prend* $u(x)=x^n$ *et* $v'(x)=xe^{-nx^2/2}$.
On obtient $J_{n+1}(A)=\left[-\frac{x^n}{n}e^{-nx^2/2}\right]_0^A+\int_0^A x^{n-1}e^{-nx^2/2}\,dx$
En passant à la limite, quand A tend vers $+\infty$, *on obtient* $J_{n+1}=J_{n-1}$

b: *On effectue le changement de variable affine* $x=u\sqrt{n}$ *dans les deux intégrales* I_n *et* I_{n+1}.
Donc $x^2=nu^2$, $x^n=n^{n/2}u^n$ *et* $dx=n^{1/2}\,du$.
$I_n=n^{n/2}\int_0^{+\infty}u^n e^{-nu^2/2}n^{1/2}\,du=n^{(n+1)/2}\int_0^{+\infty}u^n e^{-nu^2}\,du$
$I_{n+1}=\int_0^{+\infty}\left(n^{1/2}\right)^{n+1}u^{n+1}e^{-nu^2/2}n^{1/2}\,du=n^{(n+2)/2}\int_0^{+\infty}u^{n+1}e^{-nu^2/2}\,du.$
Calculons séparément les deux termes de l'égalité demandée.

$$\begin{aligned}A=n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1}-n^{-\frac{n+1}{2}}I_n &= n^{-\frac{n+2}{2}}n^{\frac{n+2}{2}}\int_0^{+\infty}u^{n+1}e^{-nu^2/2}\,du-n^{-\frac{n+1}{2}}n^{\frac{n+1}{2}}\int_0^{+\infty}u^n e^{-nu^2}\,du\\ &= \int_0^{+\infty}u^{n+1}e^{-nu^2/2}\,du-\int_0^{+\infty}u^n e^{-nu^2/2}\,du\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}B=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^n e^{-nx^2/2}\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{n+1}e^{-nx^2/2}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-nx^2/2}\,dx\\ &\quad -\int_0^{+\infty}x^n e^{-nx^2/2}dx\\ &= \int_0^{+\infty}x^{n+1}e^{-nx^2/2}dx-\int_0^{+\infty}x^n e^{-nx^2/2}\,dx\\ &\quad \text{d'après ce qui précède}\\ &= A\end{aligned}$$

On a bien l'égalité demandée.

c: *On étudie* f *sur* $\mathbf{R}^{+*}$ *où elle est clairement* C^∞
$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que $\quad \forall x \in \mathbf{R}^{+*} \quad x+\dfrac{1}{x}-2 \geqslant 0$

Il en résulte que $\quad 0\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-nx^2/2}\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\,dx \geqslant 0$

c'est à dire $\quad n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} \geqslant n^{-\frac{n+1}{2}} I_n$

En multipliant par n^n*, on obtient* $\quad I_{n+1} \geqslant \sqrt{n} I_n \geqslant 0.$

C'est bien la double inégalité demandée.

4) *On peut commencer par remarquer que l'égalité donnant* I_{2n} *à la première question peut s'écrire*

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Donc $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = 4^{-n}\binom{2n}{n}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

Donc $\quad \sqrt{n\pi}4^{-n}\binom{2n}{n} = \sqrt{2n}\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$

D'après la question précédente $\quad \sqrt{2n}\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant 1$

On a donc $\sqrt{\pi n}\, 4^{-n}\binom{2n}{n} \leqslant 1$

On peut aussi écrire, grâce à la question précédente $\quad I_{2n} \geqslant \sqrt{2n-1} I_{2n-1}.$

Mais $I_{2n+1} = 2nI_{2n-1}$ *donc* $\quad 2nI_{2n} \geqslant \sqrt{2n-1} I_{2n+1}.$

On multiplie par $\dfrac{1}{\sqrt{2n}} \quad \sqrt{2n} I_{2n} \geqslant \sqrt{\dfrac{2n-1}{2n}} I_{2n+1}.$

Posons $x = \dfrac{2n-1}{2n} = 1-\dfrac{1}{2n}.$

On sait que $\forall x \in]0,1[\quad \sqrt{x} \geqslant x$ *donc* $\quad \dfrac{\sqrt{2n}I_{2n}}{I_{2n+1}} \geqslant \sqrt{\dfrac{2n-1}{2n}} \geqslant 1-\dfrac{1}{2n}$

On a donc $1-\dfrac{1}{2n} \leqslant \sqrt{\pi n}4^{-n}\binom{2n}{n}.$

On a bien la double inégalité.

On a donc, par le théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}} = 1.$

On peut donc conclure $\quad \boxed{\text{Quand } n \text{ tend vers } +\infty \quad \binom{2n}{n} \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}}$

Corrigé exercice 30

Entraînement

1) *Cela donne le trapèze ayant pour sommet* $O = (0,0)$*,* $A = (2,0)$*,* $C = (1,1)$ *et* $D = (0,1)$.

2) f *est de classe* C^2 *sur* E*, donc, si* f *admet un extremum dans* E*, c'est nécessairement un extremum local. Il est nécessairement atteint en un point critique. Cherchons donc les points critiques de* f.
$\partial_1(f)(x,y) = 3x^2 + 1$. *Cette dérivée partielle ne peut pas s'annuler, il n'y a donc pas d'extremum local et donc pas d'extremum dans* E.

3) f *est continue sur* E' *ensemble fermé et borné de* $\mathbf{R}^2$*, donc admet un maximum et un minimum. D'après la question 1), ils sont atteints nécessairement sur les bords de* E'.
• *Sur le segment* $[O,A]$ *:* $y = 0$*,* $x \in [0,2]$*.* $f(x,y) = h_1(y) = x^3 + x$*.*
$h_1'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

y	0		2
h_1	0	$\nearrow$	10

• *Sur le segment* $[A,B]$ *:* $x = -y + 2$*,* $y \in [0,1]$*.* $f(x,y) = h_2(y) = (2-y)^3 + y^3 - 2y^2 + 2 - y + 7y$
$h_2(x) = (8 - 12y + 6y^2 - y^3) + y^3 - 2y^2 + 6y + 2 = 4y^2 + 6 + 10 = 2(2y^2 - 3y + 5)$.
$h_2'(y) = 2(4y - 3)$

y	0		$\frac{3}{4}$		1
h_2	10	$\searrow$	$\frac{31}{4}$	$\nearrow$	8

• *Sur le segment* $[B,C]$ *:* $y = 1$*,* $x \in [0,1]$*.* $f(x,y) = h_3(x) = x^3 + 1 - 2 + x + 7 = x^3 + x + 6$.
$h_3'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

x	0		1
h_3	6	$\nearrow$	8

• *Sur le segment* $[O,C]$ *:* $x = 0$*,* $y \in [0,1]$*.* $f(x,y) = h_1(y) = y^3 - 3y^2 + 7y$*.*
$h_1'(y) = 3y^2 - 6y + 7 > 0$

y	0		1
h_1	0	$\nearrow$	6

Reste à faire un bilan. Le maximum de f est 10 atteint au point $A=(0,2)$ et le minimum de f est 0, atteint au point $(0,0)$. On a donc $\boxed{\forall (x,y)\in E' \quad 0\leqslant f(x,y)\leqslant 10}$

Corrigé exercice 31

Entraînement

Question préliminaire : *g_α est C^∞ sur $\boldsymbol{R}$. $\forall x\in \boldsymbol{R}$, $g'_\alpha(x)=2x-\alpha$.*

• *Si* $\alpha\leqslant 0$

x	0		1
$g'_\alpha(x)$		$+$	
g_α	0	$\nearrow$	$1-\alpha$

• *Si* $\alpha\geqslant 2$

x	0		1
$g'_\alpha(x)$		$-$	
g_α	0	$\searrow$	$1-\alpha$

• *Si* $\alpha\in[0,2]$

x	0		$\frac{\alpha}{2}$		1
$g'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	
g_α	0	$\searrow$	$-\frac{\alpha^2}{4}$	$\nearrow$	$1-\alpha$

1) *$u\mapsto |u|$ est continue sur $\boldsymbol{R}$, donc par composition h est continue sur $\boldsymbol{R}$. Donc h admet un maximum sur le segment $[0,1]$.* ***c.q.f.d.***

2) • *Si* $\alpha \leqslant 0$, *en regardant le tableau de variations de* g_α, $f(\alpha) = 1-\alpha \geqslant 1$.
• *Si* $\alpha \geqslant 2$, $f(\alpha) = |1-\alpha| = \alpha - 1 \geqslant 1$.
• *Si* $\alpha \in [1,2]$, $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{4} \geqslant \dfrac{1}{4}$.
On a bien tous les résultats demandés.

3) *Soit* $\alpha \in]0,1[$, $1-\alpha \geqslant 0$ *donc, on a bien :* $\quad f(\alpha) = \max\left(\dfrac{\alpha^2}{4}, 1-\alpha\right)$.

Étudions la position relative de $\dfrac{\alpha^2}{4}$ *et* $1-\alpha$. *Pour cela, on étudie le signe de* $\varphi(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{4} - (1-\alpha)$.
$\varphi'(\alpha) = \dfrac{\alpha}{2} + 1 \geqslant 0$.

α	0		α_0		1
$\varphi'(\alpha)$			$+$		
$\varphi(\alpha)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$

donc, si $\alpha \leqslant \alpha_0$, $f(\alpha = 1-\alpha)$, *et si* $\alpha \geqslant \alpha_0$, $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{4}$.

α	0		α_0		1
f'		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$f(\alpha_0)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$

α_0 *est racine de l'équation* $\quad \alpha^2 + 4\alpha - 4 = 0$
$\Delta = 16 + 16 = 32 \quad$ *donc* $\quad \alpha_0 = -2 + 2\sqrt{2} \quad$ *et* $f(\alpha_0) = 1 - \alpha_0 = 3 - 2\sqrt{2}$.
Donc $\quad \boxed{\min\limits_{\alpha \in]0,1[} = 3 - 2\sqrt{2}}$

4) • *Si* $\alpha \geqslant 1$, $f(\alpha) = \max\left(\dfrac{\alpha^2}{4}, 1-\alpha\right)$, *donc* $\min\limits_{\alpha \geqslant 1}(f(\alpha)) \geqslant \dfrac{1}{4} > 3 - 2\sqrt{2}$.
• *Si* $\alpha \leqslant 0$, $f(\alpha) = 1 - \alpha$ *et donc* $\min\limits_{\alpha \leqslant 0} f(\alpha) = 1 > 3 - 2\sqrt{2}$.
• *Si* $\alpha \in]0,1[$, $\min\limits_{\alpha \in]0,1,[} f(\alpha) = 3 - 2\sqrt{2}$.

Donc $\quad \boxed{\min\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} f(\alpha) = 3 - 2\sqrt{2}}$

Corrigé exercice 32

Entraînement

1) *Posons* $h(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}$. *La fonction* h *est continue et positive sur* $\mathbf{R}^{+*}$ *et, au voisinage de* $+\infty$, $f(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. *Comme* $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ *converge, par la règle de domination des intégrales des fonctions positives, l'intégrale* $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ *converge si* $x \in \mathbf{R}^{+*}$.
Par ailleurs, si $x \in \mathbf{R}^-$, *comme* $h(t) \sim \dfrac{1}{t}$ *au voisinage de* 0 *et que* $\displaystyle\int_0^{-x} \frac{1}{t}\,dt$ *diverge, l'intégrale* $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ *diverge. D'où l'équivalence proposée.*

2) *Posons* $A = f(1)$.
$f(x) - f(1) = \displaystyle\int_x^1 h(t)\,dt$. *Donc* $f(x) = A - \displaystyle\int_1^x h(t)\,dt$.
Comme h *est continue (même* C^∞*) sur* $\mathbf{R}^{+*}$, *la fonction* $H(t) = \displaystyle\int_1^x h(t)\,dt$ *est la primitive de* h *qui s'annule en* 1. H *est donc* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^{+*}$ *et* $H'(t) = h(t)$.
Donc f *est* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^{+*}$ *et* $\boxed{\forall t \in \mathbf{R}^{+*} \quad f't) = -h(t) = -\dfrac{e^{-t}}{t}}$

Donc $f'(t) < 0$ *et* $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbf{R}^{+*}}$

3) *On a vu que* $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\,dt - \int_1^x h(t)\,dt$
Or, par définition de la convergence des intégrales,
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x h(t)\,dt = \int_1^{+\infty} h(t)\,dt = f(1)$ *donc* $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

4) *Posons* $I(A) = \displaystyle\int_x^A h(t)\,dt$ *pour* $A \geqslant x$.
Posons ensuite $u(t) = \dfrac{1}{t}$ *et choisissons* v *pour avoir* $v'(t) = e^{-t}$. *On prend donc* $v(t) = -e^{-t}$ *et on a* $u'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$
u *et* v *sont* C^1 *sur l'intervalle* $[x,A]$. *On peut donc intégrer par parties.*
$I(A) = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_x^A - \displaystyle\int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$
Quand on fait tendre A *vers* $+\infty$, *on obtient :* $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$
Pour $t \in]x,+\infty[$, *on a* $0 \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ *donc* $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t^2} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x^2}$.
Or $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2}\,dt = \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{e^{-x}}{x^2}.$
Donc $-\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \geqslant -\frac{e^{-x}}{x^2}.$
On a donc $f(x) \geqslant \dfrac{e^{-x}}{x} - \dfrac{e^{-x}}{x^2}$ *ou encore* $\dfrac{1}{x}e^{-x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \leqslant f(x).$
L'autre inégalité s'obtient facilement, car $0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x}$ *et, en intégrant,*

$\displaystyle\int_x^{+\infty} h(t)\,dt \leqslant \frac{e^{-x}}{x}$.

On a donc bien la double inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \frac{1}{x}e^{-x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}e^{-x}$$

On peut donc écrire $\qquad 1-\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 1.$

Par le théorème d'encadrement $\qquad \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

Donc $\qquad \boxed{\text{Au voisinage de } +\infty \quad f(x) \sim \dfrac{e^{-x}}{x}}$

5) *Posons* $k(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$*. La fonction* k *est continue sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et peut se prolonger par continuité en* 0 *en posant* $k(0) = 1$*. L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 k(t)\,dt$ *est donc une intégrale "propre". Cela justifie l'existence de* $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$*.*
On a

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \\ &= -\ln(x)+C \quad \text{avec} \quad C = f(1) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \end{aligned}$$

Donc $f(x) = -\ln(x) - g(x) + C$
Quand x *tend vers* 0*,* $g(x)$ *a une limite finie* ℓ*. Donc* $\qquad \boxed{\text{Au voisinage de } 0 \quad f(x) \sim -\ln(x)}$

Corrigé exercice 33

Entraînement

1) *Pour* $k > 2$*,* $\ln(k) > 1$*, donc* $\dfrac{\ln(k)}{k} > \dfrac{1}{k}$*.*
La série $\sum \dfrac{1}{k}$ *diverge, donc par le critère de comparaison des séries à termes positifs,*

$\boxed{\text{la série } \sum \dfrac{\ln(k)}{k} \text{ diverge}}$

2) *Soit* $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$*.*
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$*.* f *est* C^∞ *sur* $\mathcal{D}_f$*.*
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$*. D'où le tableau de variations :*

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

3) *C'est la méthode classique de comparaison d'une intégrale et de la série associée.* *Soit $n \in \mathbf{N}$ $\quad n > 3$, soit $k \in [\![3, n-1]\!]$, f est décroissante sur le segment $[k, k+1]$.* *Sur ce segment,* $\qquad f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k)$.
En intégrant (les bornes dans le bon sens) :
$\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)\, dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\, dx$ *donc*

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\, dx \leqslant f(k)$$

On somme pour k variant de 3 à $n-1$ et on utilise la relation de Chasles :
$\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_3^n f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=3}^{n-1} f(k)$ *ou encore*
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) - 0 - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(3)}{3} \leqslant \int_3^n f(t)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) - 0 - \frac{\ln(2)}{2}$. *On a bien :*
$\displaystyle\forall n > 3,\ \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\ln(2)}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}$
Or $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln(t)}{t}\, dt = \frac{1}{2}\Big[(\ln(t))^2\Big]_3^n = \frac{(\ln(n))^2 - (\ln(3))^2}{2}$.
Si on pose $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, *on montre facilement, avec l'encadrement précédent, que*
$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\frac{1}{2}(\ln(n))^2} = 1$

Donc $\qquad \boxed{\textit{Quand } n \textit{ tend vers } +\infty \qquad S_n \sim \frac{1}{2}(\ln(n))^2}$

4) **a:** *C'est parti pour la question difficile :*

$$\begin{aligned}
(\ln(n))^2 - (\ln(n-1))^2 &= [\ln(n) - \ln(n-1)]\ [\ln(n) + \ln(n-1)] \\
&= \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\ \ln(n(n-1)) \\
&= -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\ \ln\left[n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2\ln(n) + \left[\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\right) \\
&= -2\ln(n)\left[\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] - \left[\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^2
\end{aligned}$$

On utilise maintenant un DL_2 de $\ln(1-x)$ au voisinage de 0 :
$\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *:*

$$\begin{aligned}(\ln(n))^2 - (\ln(n-1))^2 &= -2\ln(n)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{2\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)\end{aligned}$$

C'est le résultat attendu.

b: *On pose* $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{2}[\ln^2(n) - \ln^2(n-1)]$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left[(\ln(k))^2 - (\ln(k-1))^2\right] \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}(\ln(n))^2 \quad \textit{par télescopage} \\ &= S_n - S_1 - \frac{1}{2}(\ln(n))^2\end{aligned}$$

c.q.f.d.

c: *On sait que* $S_1 = 0$ *donc* $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k + \frac{1}{2}(\ln(n))^2$

Or, quand $n \to +\infty$, $-u_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n^2}$, *donc* $-u_n = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

La série de terme général u_n *converge donc. Posons* $c = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$.

On a donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k = c + \varepsilon(n)$ *et donc* $S_n = c + \varepsilon(n) + \dfrac{(\ln(n))^2}{n}$.
C'est le résultat attendu.

Corrigé exercice 34

HEC 1999 oral voie E

Pour tout réel a strictement positif et tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}(1-e^{-t})^n \, dt$$

1) *Au voisinage de* $+\infty$, $e^{-at}(1-e^{-t})^n \sim e^{-at}$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$ *converge.*
Par le critère de l'équivalent des intégrales des fonctions positives, l'intégrale impropre définissant $I_n(a)$ *converge.*

2) **a:** $I_n(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1-e^{-t})^n \, dt$.

Posons, pour $A > 0$, $J_n(A) = \displaystyle\int_0^{A} e^{-t}(1-e^{-t})^n \, dt$.

Directement, $J_n(A) = \left[\frac{1}{n+1}(1-e^{-t})^{n+1}\right]_0^A = \frac{1}{n+1}(1-e^{-A})^{n+1}$

$\lim\limits_{A\to+\infty} J_n(A) = \frac{1}{n+1}$. *On a bien* $I_n(1) = \frac{1}{n+1}$.

b: *Pour tout réel a vérifiant* $a \geqslant 1$, *on a pour* $t \geqslant 0$, $at \geqslant t$ *donc* $e^{-at} \leqslant e^{-t}$.
Il en résulte que $0 \leqslant I_n(a) \leqslant I_n(1)$. *Comme* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(1) = 0$, *par le théorème d'encadrement,* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$.

3) **a:** *Partons de* $J_n(A) - J_{n+1}(A)$.

$$\begin{aligned} J_n(A) - J_{n+1}(A) &= \int_0^A \left[e^{-at}(1-e^{-t})^n - e^{-at}(1-e^{-t})^{n+1}\right] dt \\ &= \int_0^A e^{-at}(1-e^{-t})^n \left[1-(1-e^{-t})\right] dt \\ &= \int_0^A e^{-at}(1-e^{-t})^n e^{-t}\, dt \end{aligned}$$

On choisit u telle que $u'(t) = e^{-t}(1-e^{-t})^n$.
On prend donc, par exemple, $u(t) = \frac{1}{n+1}(1-e^{-t})^{n+1}$.
On choisit $v(t) = e^{-at}$ *d'où* $v'(t) = -ae^{-at}$
u et v sont C^1 *sur le segment* $[0,A]$, *on peut donc intégrer par parties :*
$J_n(A) - J_{n+1}(A) = \left[\frac{1}{n+1}e^{-at}(1-e^{-t})^{n+1}\right]_0^A + \frac{a}{n+1}\int_0^A e^{-at}(1-e^{-t})^{n+1}\, dt$.
En passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, *on obtient :*
$I_n(a) - I_{n+1}(a) = 0 + \frac{a}{n+1} I_{n+1}(a)$.
D'où le résultat :

$$\forall a > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad (n+1)(I_n(a) - I_{n+1}(a)) = aI_{n+1}(a)$$

b: $(n+1)I_n(a) = aI_{n+1}(a) + (n+1)I_{n+1}(a)$.
On a donc $\boxed{I_{n+1}(a) = \frac{n+1}{n+1+a}\, I_n(a)}$

4) *Pour tout réel a vérifiant* $a > 1$ *et tout entier naturel n, on pose :* $S_n(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} I_k(a)$.

a: *On peut procéder par récurrence. Posons* (H_n) $S_n(a) = \frac{1}{a-1} - \frac{n+1}{a-1} I_n(a)$.
• *Initialisation : pour* $n = 0$,
$S_0(a) = I_0(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} ae^{-at}\, dt = \frac{1}{a}$
(en utilisant la densité de la loi exponentielle de paramètre a, ou en calculant directement).
Or $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a-1} \times \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a(a-1)} = \frac{1}{a}$.
Donc (H_0) *est vérifié.*

• *Hérédité. Supposons (H_n) vérifié.*

$$\begin{array}{rrcl} & S_{n+1}(a) & = & S_n(a)+I_{n+1}(a)=\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{n+1}{a-1}I_n(a)+I_{n+1}(a) \\ \text{or} & I_n(a) & = & \dfrac{n+1+a}{n+1}\,I_{n+1}(a) \qquad \text{donc} \\ & S_{n+1}(a) & = & \dfrac{1}{a-1}-\dfrac{n+1+a}{a-1}\,I_{n+1}(a)+\dfrac{a-1}{a-1}I_{n+1}(a) \\ & & = & \dfrac{1}{a-1}-\dfrac{n+1+a-a+1}{a-1}I_{n+1}(a) \\ & & = & \dfrac{1}{a-1}-\dfrac{n+2}{a-1}I_{n+1}(a) \end{array}$$

Donc (H_{n+1}) est vérifié, ce qui achève la récurrence.

b: *Comme tous les termes de la somme $S_n(a)$ sont positifs, la suites la suite de terme général $S_n(a)$ est croissante.*
Elle est majorée par $\dfrac{1}{a-1}$ d'après la question précédente, donc la suite est bien convergente.

c: *Voilà un script Scilab qui utilise les relations de récurrence établies :*

```
function y=S(n,a)
I=1/a;s=1/a
for k=1:n
     I=k/(k+a)*I
     s=s+I
end
y=s
endfunction

a=2
n=4
disp(S(n,a))
```

L'ordinateur affiche $0,83333$.

Corrigé exercice 35

HEC 2000 oral voie E

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n=\int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^n}\,dt$$

1) **a:** *Pour $t\in[0,1]$* $\quad \dfrac{1}{1+t^4}\in[0,1]$ *donc* $\quad \left(\dfrac{1}{1+t^4}\right)^n \geqslant \left(\dfrac{1}{1+t^4}\right)^{n+1}$
donc, en intégrant sur $[0,1]$, $\quad u_n \geqslant u_{n+1}$.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$

b: *De façon évidente, $u_n \geqslant 0$. La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc convergente.*

2) **a:** *Soit a un réel de $]0,1[$.*

On a $\quad u_n = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{(1+t^4)^n}\,dt + \int_a^1 \frac{1}{(1+t^4)^n}\,dt$

Sur $[0,a]$, on remarque que $\dfrac{1}{(1+t^4)^n} \leqslant 1$ *donc* $\int_0^a \dfrac{1}{(1+t^4)^n}\,dt \leqslant \int_0^a 1\,dt = a$

Sur $[a,1]$, on remarque que $(1+t^4)^n \geqslant (1+a^4)^n$ donc $\dfrac{1}{(1+t^4)^n} \leqslant \dfrac{1}{(1+a^4)^n}$.

En intégrant sur $[a,1]$, on obtient

$$\int_a^1 \frac{1}{(1+t^4)^n}\,dt \leqslant \int_a^1 \frac{1}{(1+a^4)^n}\,dt = (1-a)\times\frac{1}{(1+a^4)^n} \leqslant \frac{1}{(1+a^4)^n}$$

Donc $u_n \leqslant a + \dfrac{1}{(1+a^4)^n}$. *C'est l'inégalité recherchée.*

b: *En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, dans l'inégalité précédente, on obtient $\ell \leqslant a+0$.*
On a bien : $\ell \leqslant a$.

c: *On vient de prouver que :* $\quad \forall a \in [0,1] \quad \ell \leqslant a.$
On a donc $\quad \boxed{\ell = 0}$

3) **a:** *Posons* $u(t) = \dfrac{1}{(1+t^4)^n} = (1+t^4)^{-n}$. $\quad u'(t) = -4nt^3(1+t^4)^{-n-1} = \dfrac{-4nt^3}{(1+t^4)^{n+1}}$

Prenons $v'(t) = 1$ avec le choix $v(t) = t$

u et v sont C^1 sur $[0,1]$, on peut donc faire une intégration par parties sur $u_n = \displaystyle\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt$. *On obtient :*

$$u_n = \left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^1 + 4n\int_0^1\int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt = \frac{1}{2^n} + 4n\int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt$$

c.q.f.d.

b: *On peut remarquer que :*

$$\int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt = \int_0^1 \frac{1+t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt = u_n - u_{n+1}$$

Ainsi : $\quad u_n = \dfrac{1}{2^n} - 4n(u_n - u_{n+1})$.

On a donc : $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4n}\left(\dfrac{1}{2^n} - u_n\right) = \dfrac{1}{n2^{n+2}} - \dfrac{u_n}{4n}$.

C'et bien l'égalité recherchée.

c: $\dfrac{u_n}{n} = \dfrac{1}{n2^{n+2}} - (u_{n+1} - u_n)$

La série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ converge (série “télescopée”).

La série de terme général $v_n = \dfrac{1}{n2^{n+1}}$ *converge car* $v_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *terme général d'une série géométrique convergente.*

Donc, comme la somme de deux séries convergentes converge, la série de terme général $\dfrac{u_n}{n}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ *est bien convergente.*

4) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^4)^n}\, dt.$

Sur $[0,1]$, $t^4 \leqslant t$ *donc* $\dfrac{1}{1+t^4} \geqslant \dfrac{1}{1+t}$ *et* $\quad \dfrac{1}{(1+t^4)^n} \geqslant \dfrac{1}{(1+t)^n}$

Donc, en intégrant sur $[0,1]$ $\quad u_n \geqslant v_n$ *avec* $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\, dt.$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\, dt = \int_1^2 \frac{1}{u^n}\, du$ $\quad$ *en utilisant le changement de variable* $u = 1+t$

$v_n = \left[\dfrac{u^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right).$

Quand n tend vers $+\infty$, $v_n \sim \dfrac{1}{n}$ *terme général d'une série divergente.* $u_n \geqslant v_n$ *et* $\sum v_n$ *diverge, donc* $\quad \boxed{\sum un \text{ diverge}}$

Corrigé exercice 36

HEC 2001 oral voie E

Pour tout réel x de $]-1,+\infty[$, *on pose* $f(x) = \ln(1+x)$.

1) **a:** *f est* C^∞ *sur* $I =]-1,+\infty[$.

Pour $n = 0$, *on a* $f^{(0)} = f$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \quad f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \quad f^3(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \quad f^(4)(x) = \dfrac{-6}{(1+x)^4}\cdots$

On démontre facilement, par récurrence que $\quad \boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{(1+x)^n}}$

b: *Notons, pour* $n \in \mathbf{N}$, (H_n) *la propriété :*

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

Montrons (H_n) *par récurrence sur* $n \in \mathbf{N}$.

• *Initialisation : pour* $n = 0$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = 0 + \int_0^1 f'(t)\; dt = f(1) - f(0) = \ln(2)$

donc (H_0) *est vraie.*

• *Hérédité. Supposons* (H_n) *vraie pour* $n \geqslant 1$.

On va développer l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\; dt.$

Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t)$, *donc* $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$.

Prenons $v'(t) = (1-t)^n$ *donc* $v(t) = -\dfrac{1}{n+1}\,(1-t)^{n+1}$

u et v sont C^1 sur le segment $[0,1]$, on peut donc intégrer par parties.

$$\begin{aligned} J &= \left[-\frac{1}{n+1}\,(1-t)^{n+1}f^{n+1}(t)\right]_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1(1-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt\\ &= \frac{1}{n+1}f^{n+1}(0)+\frac{1}{n+1}\int_0^1(1-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt\\ &= \frac{1}{n+1}\,(-1)^n\,n!+\frac{1}{n+1}\int_0^1(1-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\,dt \end{aligned}$$

Donc $\quad \dfrac{1}{n!}\,J=\dfrac{(-1)^n}{n+1}+\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-t)^{n+1}\;f^{(n+2)}(t)\,dt.$

En reportant dans (H_n), on obtient : $\ln(2)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}\int_0^1(1-t)^{n+1}\;f^{(n+2)}(t)\,dt$

Donc (H_{n+1}) est vraie et l'hérédité est assurée. Ce qui finit la récurrence.

Remarque : du temps où la formule de Taylor avec reste intégrale était au programme de ece2, elle aurait pu être utilisé pour cette question.

c: *Posons* $R_n=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1(1-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt$ *et* $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$\begin{aligned} |\ln(2)-S_n| &= \frac{1}{n!}\left|\int_0^1(1-t)^n\;f^{(n+1)}(t)\,dt\right|\\ &\leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1(1-t)^n|f^{(n+1)}(t)|\,dt \quad \textit{inégalité triangulaire sur l'intégrale}\\ \textit{Or}\quad |f^{(n+1)}(t)| &= \frac{n!}{(1+t)^n}\leqslant n! \qquad \textit{donc}\\ |\ln(2)-S_n| &\leqslant \int_0^1(1-t)^n\,dt=\left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1\\ &\leqslant \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

On a donc $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}|\ln(2)-S_n|=0.$

Donc la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et sa somme vaut $\ln(2)$.

2) *Pour tout entier naturel n non nul, on pose* $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *et* $u_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$

a: *On sait que la suite harmonique diverge et que sa somme partielle H_n est croissante. Donc* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}H_n=+\infty.$

b: *On sait que, pour $k\in\mathbb{N}^*$* $\quad \dfrac{1}{k+1}\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,dt\leqslant\frac{1}{k}$

En sommant, pour k variant de $n+1$ à 2,, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_{n+1}^{2n} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Soit encore $\quad u_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n$

En réorganisant tout cela : $\quad \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n+1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) = \ln(2)$. *Donc par le théorème d'encadrement* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}$

3) *Pour tout entier naturel n, on pose* $v_n = \displaystyle\sum_{k=n^2+1}^{n^2+2n} \frac{1}{k}$.

a: *En utilisant le changement d'indice* $k = n^2 + i \quad v_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{n^2+i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$

Or $n \leqslant n + \dfrac{i}{n} \leqslant n+2$ *donc* $\quad \dfrac{1}{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n+\frac{i}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}$ *et en sommant :*

$\dfrac{2n}{n+2} \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \leqslant 2$ *et par le théorème d'encadrement* $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$.

Donc $v_n \sim \dfrac{2}{n}$ *et ainsi* $\quad \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

b: *D'après l'équivalent trouvé précédemment, la série de terme général* v_n *diverge.*

Corrigé exercice 37

HEC 2002 oral voie E

1) **a:** *On sait que, pour u voisin de* 0, $\ln(1+u) = u - \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$.

Donc $\quad \boxed{\text{au voisinage de } 0 \qquad \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}$

b: *D'après ce qui précède* $\quad \boxed{\text{Au voisinage de } 0 \qquad \ln(1+x^2) \sim x^2}$

Au voisinage de $+\infty$, $\ln(1+x^2) = \ln\left[x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right] = \ln(x^2) + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Donc $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(x^2)} = 1 + \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x^2)}}_{\to 0}$

Donc $\quad \boxed{\text{Au voisinage de } +\infty \qquad \ln(1+x^2) \sim \ln(x^2)}$

2) *Soit f la fonction définie sur l'intervalle* $I =]0, +\infty[$ *par*

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}$$

a: *f est continue sur I donc admet une primitive sur I.*
Posons $H(x) = \ln x + b\ln(1+x^2)$.
$H'(x) = \frac{a}{x} + \frac{2bx}{1+x^2} = \frac{(a+2b)x^2+a}{x(1+x^2)}$

Il suffit donc que a et b vérifient $\begin{cases} a+2b &= 0 \\ a &= 1 \end{cases}$

Donc $\boxed{\text{Avec } a = 1 \text{ et } b = -\frac{1}{2}\text{, on a la relation proposée}}$

b: *Au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim \frac{1}{t^3}$ et f est continue et positive sur $[x, +\infty[$.*
Donc $\int_x^{+\infty} f(t)\ dt$ converge par la règle de l'équivalent des intégrales des fonctions positives. Soit $A \in \mathbf{R}$ avec $0 < x \leqslant A$:

$$\begin{aligned}
\int_x^A f(t)\ dt &= \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_x^A \\
&= \ln(A) - \frac{1}{2}\ln(1+A^2) - \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \\
&= \ln\left(\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}\right) + \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Or $\lim_{A\to+\infty} \ln\left(\frac{A}{\sqrt{1+A^2}}\right) = 0$ *car* $\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} = 1.$

Donc $\lim_{A\to+\infty} \int_x^A f(t)\ dt = \frac{1}{2}\ \ln\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ ***c.q.f.d.***

c: *F est continue sur $\mathbf{R}^{+*}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} F(t)\ dt$ est donc impropre pour les deux bornes. F est positive sur $\mathbf{R}^{+*}$.*
• Au voisinage de $+\infty$, $F(t) \sim \frac{1}{2t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} F(t)\ dt$ converge.
• Au voisinage de 0 $F(t) \sim \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t^2}\right) = -\ln(t)$
On "sait" que $\int_0^1 \ln(t)\ dt$ converge et vaut -1, donc $\int_0^1 F(t)\ dt$ converge.
Donc, $\int_0^{+\infty} F(t)\ dt$ converge.
Soit a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.
On pose $I(a,b) = \int_a^b \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\ dt$.
On va procéder à une intégration par parties.

Prenons $u(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ et donc $u'(t) = \frac{-\frac{2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}} = -\frac{2}{t(1+t^2)}$.

Prenons $v'(t) = \frac{1}{2}$ donc $v(t) = \frac{1}{2}\ t$.
u et v sont C^1 sur le segment $[a,b]$, on peut donc procéder à l'intégration par

parties.

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \left[\frac{t}{2}\ \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{b}{2}\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - \frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) - \int_a^b \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{aligned}$$

On sait que, si $b \to +\infty$, $\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) \sim \frac{1}{b^2}$ *donc* $\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{b}{2}\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) = 0.$

On sait que, si $a \to 0$, $\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) \sim \ln\left(\frac{1}{a^2}\right) = -2\ln(a)$

donc $\frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) \sim -a\ln(a)$ *et* $\lim\limits_{a\to 0} \frac{a}{2}\ln\left(1+\frac{1}{a^2}\right) = 0$

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ *converge.*

On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$

Les connaisseurs pourront vérifier que cette intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$, *mais ce n'est pas au programme de la voie eco.*

Corrigé exercice 38

HEC 2005 oral voie E

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, *on pose*

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)}\,dx$$

- $\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad I_n \geqslant 0.$
- *Étudions le sens de variation de la suite* $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \left[\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{x}{k}\right)} - \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)}\right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-\left(1+\frac{x}{n+1}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{x}{k}\right)}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{-\frac{x}{n+1}}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{x}{k}\right)}\,dx \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Si on développe le produit $\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{x}{k}\right)$*, on obtient* $1+x\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\ldots$.
Tous les termes de cette somme sont positifs si $x\in[0,1]$*, donc* $\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{x}{k}\right)\geqslant 1+x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$
et donc, si on arrive à justifier que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant \ln(n)$ *(ce qui est assez classique) on aura* $\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{x}{k}\right)\geqslant 1+x\ln(n)$ *et donc :*

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{x}{k}\right)}\leqslant\frac{1}{1+x\ln(n)}$$

et donc, en intégrant :

$$\forall n\in\boldsymbol{N}^{*}\qquad I_n\leqslant\int_0^1\frac{dx}{1+x\ln(n)}$$

Montrons rapidement que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqslant\ln(n)$.
Pour cela posons $f(t)=\frac{1}{t}$.
Sur le segment $[k,k+1]$ $\quad f(k+1)\leqslant f(t)\leqslant f(k)$.
Donc $\int_{t=k}^{t=k+1}f(k+1)\,dt\leqslant\int_{t=k}^{t=k+1}f(t)\,dt\leqslant\int_{t=k}^{t=k+1}f(k)\,dt$.
Donc $f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(t)\,dt\leqslant f(k)$.
En sommant : $\quad\sum_{k=1}^{n}f(k+1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(t)=\int_1^{n+1}f(t)\,dt\leqslant\sum_{k=1}^{n}f(k)$.
Si on note S_n *la somme* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *:* $\quad S_{n+1}-1\leqslant\ln(n+1)\leqslant S_n$
Donc $S_n\geqslant\ln(n+1)\geqslant\ln(n)$ ***c.q.f.d.***

Posons $J_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x\ln(n)}\,dx$. *$J_n$ se calcule facilement.*

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{\ln(n)}\Big[\ln(1+x\ln(n))\Big]_0^1 \\
&= \frac{\ln(1+\ln(n))}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln\left(\ln(n)\times\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)\right)}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln(\ln(n))+\overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(n)}\right)}_{\to 0}}{\ln(n)} \\
&\sim \frac{\ln(\ln(n)}{\ln(n)}
\end{aligned}$$

On obtient un équivalent de la forme $\frac{\ln(x)}{x}$ *avec* $x = \ln(n)$ *tendant vers* $+\infty$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$
Comme $0 \leqslant I_n \leqslant J_n$, *par le théorème d'encadrement* $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

Corrigé exercice 39

HEC 2005 oral voie E

Soit $a \in \mathbf{R}^{+*}$. *On se propose de déterminer les fonctions f trois fois dérivables sur un intervalle* $[0,2a]$ *à valeurs réelles et telles que*

$$\forall x \in [0,2a] \qquad (E) \quad \frac{f(x)}{2} = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(a-\frac{x}{2}\right)$$

f'' est dérivable donc continue sur le segment $[0,2a]$.
Il existe donc $c \in [0,2a]$ *tel que* $f''(c) = \max_{t\in[0,2a]} f''(t)$.
Partons maintenant de la relation (E) *vérifiée par* f.
On dérive une première fois : $\frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(a-\frac{x}{2}\right) \qquad (1)$
puis une deuxième fois : $\frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{4}f''\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}f''\left(a-\frac{x}{2}\right) \qquad (2)$
puis une troisième fois : $\frac{f'''(x)}{2} = \frac{1}{8}f'''\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{8}f'''\left(a-\frac{x}{2}\right) \qquad (3).$

L'égalité (2) *appliquée avec* $x = c$ *donne :* $\quad f''(c) = \frac{1}{2}f''\left(\frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2}f''\left(a-\frac{c}{2}\right).$
Donc $f''(c)$ est le milieu du segment d'extrémité $f''\left(\frac{c}{2}\right)$ *et* $f''\left(a-\frac{c}{2}\right)$.
Comme $f''(c)$ est la plus grande des valeurs de $f''(x)$ sur le segment, il en résulte que :
$f''(c) = f''\left(\frac{c}{2}\right) = f''\left(a-\frac{c}{2}\right).$

Ce qui suit est vraiment compliqué en voie E.
Par une récurrence immédiate, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f''(c) = f''\left(\frac{c}{2^n}\right) = f''\left(a - \frac{c}{2^n}\right)$.
Donc, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$*, et en utilisant la continuité de* f'' *:*
$f''(c) = f''(0) = f''(a)$.

On recommence, mais en considérant le min *sur l'intervalle* $[0,2a]$.
On obtient, de la même façon, un minimum de f'' *atteint en un* $d \in [0,2a]$*, vérifiant*
$f''(d) = f''(0) = f''(a)$.
En conséquence, on a un minimum qui vaut le maximum et $\qquad f''(x) = \alpha$ *(constante) sur* $[0,2a]$.
Donc $f'(x) = \alpha x + \beta$ *et* $f(x) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \beta x + \gamma$
Donc f est un trinôme du type $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
On aura donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(a - \frac{x}{2}\right) &= a_2\frac{x^2}{4} + a_1\frac{x}{2} + a_0 + a_2\left(a^2 - ax + \frac{x^2}{4}\right) + a_1a - a_1\frac{x}{2} + a_0 \\ &= a_2\,\frac{x^2}{2} - a_2ax + (a_2a^2 + a_1a + 2a_0) \end{aligned}$$

La relation (E) *donne donc* $\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}a_1 & = -a_2a \\ & \\ \frac{1}{2}a_0 & = 2a_0 + a_2a^2 + a_1a \end{array}\right.$

Donc $a_1 = -2a_2a$ *et* $a_0 = \frac{2}{3}a_2a^2 \qquad$ *avec* $a_2 \in \mathbb{R}$.

Autrement dit $\boxed{f(x) = k\left(x^2 - 2ax + \frac{2}{3}a^2\right) = k\left[(x-a)^2 - \frac{1}{3}a^2\right] \quad (k \in \mathbb{R})}$

Par voir si tout cela est cohérent, on peut faire une petite vérification (avec $k = 1$*).*

Corrigé exercice 40

Entraînement

1) *Soit* $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$. *f est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$ *:*
$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x-1)^2}$
Posons $h(x) = -1 + (1-x)e^x$
$h'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x \leqslant 0$
h est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, $h(0) = 0$ *donc h est négative sur* $\mathbb{R}^+$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f'(x) < 0$.
Donc f est décroissante (strictement) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On a immédiatement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Ainsi f est une bijection décroissante de $I = \mathbb{R}^{+*}$ *dans* $]0,1[$. *f est donc bien bornée (par* 0 *et* 1*).*

2) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad \sum\limits_{k=0}^{n} e^{-kx} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(e^{-x}\right)^k = \frac{1-(e^{-x})^n}{1-e^{-x}} = \frac{1-e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$

Donc

$$\begin{aligned} xe^{-x}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} &= \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{xe^{-(n+2)x}}{1-e^{-x}} \\ &= \frac{xe^{-x}}{e^{-x}(e^x-1)} - \frac{xe^{-(n+2)x}}{e^{-x}(e^x-1)} \\ &= \frac{x}{e^x-1} - \frac{xe^{-(n+1)x}}{e^x-1} \end{aligned}$$

C'est l'égalité attendue.

3) *On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0)=1$. L'intégrale J est donc impropre pour la borne $+\infty$ uniquement.*

Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x}$ donc $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Comme $\displaystyle\int_1^{=\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge, par la régle de domination des intégrales des fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ ne pose pas de problème, J converge.

$I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-(n+1)x}dx.$

Comme $0 < f(x) < 1$, $f(x)e^{-(n+1)x} < e^{-(n+1)x}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}\,dx$ est immédiatement convergente, par la règle de majoration, I_n converge.

4) *On a vu que $|f(x)| < 1$ donc $|f(x)e^{-(n+1)x}| \leqslant e^{-(n+1)x}$*

Par un calcul direct, ou en utilisant la loi exponentielle de paramètre $n+1$, on montre facilement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)x}\,dx = \frac{1}{n+1}$.

Donc $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. On a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

On utilise maintenant l'égalité établie en 2)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} \left[f(x) - xe^{-x}\sum_{k=0}^{n} e^{-kx} \right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}\,dx}_{L_k} \end{aligned}$$

Pour déterminer L_k, on peut utiliser la loi exponentielle de paramètre $k+1$. $(k+1)L_k$ représente l'espérance de cette loi, et le cours nous dit qu'elle vaut $\dfrac{1}{k+1}$.

Donc $L_k = \dfrac{1}{(k+1)^2}$ et $I_n = J - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $\displaystyle 0 = J - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = J - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}$

Avec le résultat admis $\boxed{J = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi^6}{6}}$

Corrigé exercice 41

Entraînement

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^n}\, du$

1) *Cherchons le signe de* $I_{n+1} - I_n$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+u^{n+1}} - \frac{1}{1+u^n} \right) dy \\
&= \int_0^1 \frac{1+u^n-1-u^{n+1}}{(1+u^n)(1+u^{n+1})}\, du \\
&= \int_0^1 \underbrace{\frac{u^n(1-u)}{(1+u^n)(1+u^{n+1})}}_{\geqslant 0}\, du \\
&\geqslant 0 \quad \textit{(positivité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(I_n) \text{ est croissante}}$

Par ailleurs, pour $n \geqslant 0$ *et* $u \in [0,1]$, $1 \leqslant 1+u^n \leqslant 2$ *donc* $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+u^n} \leqslant 1$, *donc en intégrant*
$\dfrac{1}{2} \leqslant I_n \leqslant 1$.
Donc, la suite I_n *est croissante, majorée par* 1 *donc convergente.*

$$\begin{aligned}
1 - I_n &= \int_0^1 1\, du - \int_0^1 \frac{1}{1+u^n}\, du \\
&= \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^n}\, du \\
&\leqslant \int_0^1 u^n\, du = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Donc $0 \leqslant 1 - I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. *Par le théorème d'encadrement* $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 1}$

2) *On reprend l'expression de* $1 - I_n$ *de la question précédente. On obtient :*

$$\begin{aligned}
n(1-I_n) &= \int_0^1 \frac{nu^n}{1+u^n}\, du \\
&= \int_0^1 \frac{nu^{n-1}}{1+u^n} \times u\, du
\end{aligned}$$

On prend $f'u) = \dfrac{nu^{n-1}}{1+u^n}$ *et* $g(u) = u$ *et, donc* $f(u) = \ln(1+u^n)$ *et* $g'(u) = 1$
f *et* g *sont* C^1 *sur* $[0,1]$. *La formule d'intégration par parties donne :*

$$\begin{aligned}
n(1-I_n) &= \Big[u\ln(1+u^n)\Big]_0^1 - \int_0^1 \ln(1+u^n)\, du \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+u^n)\, du
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité classique $\ln(1+x) \leqslant x$ *pour* $x \in \mathbb{R}^+$ *(qu'il faut savoir justifier).*
$\ln(1+u^n) \leqslant u_n$ *et, en intégrant sur* $[0,1]$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln(1+u^n)\,du \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+u^n)\,du = 0$ *et ainsi :* $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n(1-I_n) = \ln(2)}$
Ensuite, en utilisant l'encadrement (i) $\quad \ln(2) - \dfrac{1}{n+1} \leqslant n(1-I_n) \leqslant \ln(2)$,
il est facile de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{1-\frac{\ln(2)}{n}} = 1$. *En effet :*

$$\begin{aligned}
(i) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \leqslant 1 - I_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n} \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 - \frac{\ln(2)}{n} \leqslant I_n \leqslant 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&\Longleftrightarrow \quad 1 \leqslant \frac{I_n}{1-\frac{\ln(2)}{n}} \leqslant 1 - \underbrace{\frac{1}{n(n+1)\times\left(1-\frac{\ln(2)}{n}\right)}}_{\to 0}
\end{aligned}$$

On peut donc conclure $\quad \boxed{\text{Quand } n \text{ tend vers } +\infty \quad I_n \sim 1 - \frac{\ln(2)}{n}}$

Corrigé exercice 42

Entraînement

Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1) *Posons* $h(x) = e^{x^2}$. *h est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$. *F est donc la primitive de h sur* $\mathbb{R}$ *qui s'annule en* 0.
$F' = h$ *et h est une fonction strictement positive sur* $\mathbb{R}$. *Donc F est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *strictement croissante, donc réalise une bijection de R dans l'intervalle* $J = F(\mathbb{R})$.
Or h est paire, donc par un raisonnement classique (changement de variable $u = -t$ *dans l'intégrale définissant* $F(-x)$*), on montre que F est impaire.*
On a $e^{t^2} \geqslant 1$ *sur* $\mathbb{R}^+$, *donc, en intégrant sur* $[0,x]$, *pour* $x \in \mathbb{R}^+$, *on a* $F(x) \geqslant x$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.
En utilisant la parité, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$. *Ainsi* $J = \mathbb{R}$. *On a donc le résultat attendu.*

2) *Par définition de F, on a* $\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = F(f(x)) - F(x)$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad F(f(x)) - F(x) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad F(f(x)) = 1 + F(x) \\
&\Longleftrightarrow \quad f(x) = F^{-1}(1+F(x))
\end{aligned}$$

Cette relation donne l'unique application f solution : $\boxed{\forall x \in \mathbf{R} \qquad f(x) = F^{-1}(1+F(x))}$

3) *Cela se corse ...*
F est dérivable et $F'(x) = e^{x^2}$. F' ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$. Donc F^{-1} est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R} \qquad (F^{-1})'(x) = \dfrac{1}{F'(F^{-1}(x))}$.
Donc f est aussi dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(x) \times (F^{-1})'(1+F(x)) \\ &= e^{x^2} \times \frac{1}{F'(F^{-1}(1+F(x)))} \\ &= e^{x^2} \times \frac{1}{e^{(f(x))^2}} \\ &= e^{x^2-(f(x))^2} \end{aligned}$$

On a $F(x) \leqslant 1+F(x)$ donc, en composant par F^{-1} croissante :
$x \leqslant F^{-1}(1+F(x)) \qquad$ ou encore $x \leqslant f(x)$.
On a évidemment $e^{t^2} \geqslant t$ donc, comme les bornes sont dans le bon sens :
$\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt \geqslant \int_x^{f(x)} t\,dt$. On a donc $\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt \geqslant \frac{1}{2}(f(x)^2 - x^2)$
d'où $\qquad \dfrac{1}{2}(f(x)-x)(f(x)+x) \leqslant 1$.
Il en résulte que $\qquad 0 \leqslant f(x) - x \leqslant \dfrac{2}{f(x)+x}$
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{f(x)+x} = 0$ donc, par le théorème d'encadrement

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0$$

Cela signifie bien que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Corrigé exercice 43

Entraînement

1) *Comme x est assez petit, on peut utiliser un DL_2 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0.*
$\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.
Donc $x - \ln(1+x) = \dfrac{1}{2}x^2 + o(x^2) = x^2\left[\dfrac{1}{2} + o(1)\right]$
Or, quand x est assez petit, $0 \leqslant \dfrac{1}{2} + o(1) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant x^2\left[\dfrac{1}{2}+o(1)\right] \leqslant x^2$.
On a donc bien $\qquad 0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant x^2$

2) *On va utiliser la méthode classique de comparaison d'une somme et d'une intégrale. Pour $k \in \mathbf{N}$ et $t \in [k, k+1]$, on a $\qquad \sqrt{k} \leqslant \sqrt{t} \leqslant \sqrt{k+1}$.*
On intègre sur $[k, k+1]$: $\qquad \displaystyle\int_k^{k+1} \sqrt{k}\,dt \int_k^{k+1} \sqrt{t}\,dt \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{k+1}\,dt$

Donc $\quad \sqrt{k} \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{t}\, dt \leqslant \sqrt{k+1}.$

On somme, pour k variant de 1 *à n :* $\quad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \sqrt{t}\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1}$

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ *et on utilise la relation de Chasles. On obtient*

$S_n \leqslant \int_1^{n+1} \sqrt{t}\, dt \leqslant S_{n+1} - 1$ *ou encore* $\quad S_n \leqslant \frac{2}{3}\left[t^{3/2}\right]_1^{n+1} \leqslant S_{n+1} - 1$

On a donc $\quad \frac{2}{3}\left[(n+1)^{3/2} - 1\right] + 1 \leqslant S_n \leqslant \frac{2}{3}\left(n^{3/2} - 1\right).$

On divise par $n^{3/2}$ *:* $\quad \dfrac{\frac{2}{3}\left[(n+1)^{3/2} - 1\right] + 1}{\frac{2}{3}n^{3/2}} \leqslant \dfrac{S_n}{\frac{2}{3}\, n^{3/2}} \leqslant \dfrac{\frac{2}{3}\left(n^{3/2} - 1\right)}{\frac{2}{3}n^{3/2}}.$

On montre facilement que les deux termes à droite et à gauche de la double inégalité tendent vers 1.

Donc $\quad \boxed{\text{Quand } n \text{ tend vers } +\infty \qquad S_n \sim \frac{2}{3}n^{3/2}}$

3) *Posons* $\quad u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \sqrt{\frac{k}{n^3}}\right).$

$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \sqrt{\frac{k}{n^2}}\right)$

On a vu, en question 1), que $\quad \forall x \in \boldsymbol{R}^+ \qquad x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$

Donc $\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{\frac{k}{n^3}} - \frac{k}{n^3}\right] \leqslant \ln(u_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}$

Ou encore $\quad \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} - \frac{n(n+1)}{2n^3} \leqslant \ln(u_n) \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

Or, la question 2) donne : $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} = \frac{2}{3}.$

De plus $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2n^3} = 0 \qquad$ *donc, par le théorème d'encadrement*

$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \frac{2}{3}.$

En conclusion $\quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{2/3}}$

Corrigé exercice 44 *Entraînement*

On considère la fonction f définie sur $\boldsymbol{R}^+$ *par :*

$$f(x) = x\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt \text{ si } x \neq 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0$$

1) *Posons* $h(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$. *h est* C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$. *Au voisinage de* 0, $h(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$, *et on sait que*

$\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ *converge pour tout* $x \in \mathbf{R}^{+*}$. *Donc* $\displaystyle\int_0^c h(t)\,dt$ *converge, par le critère de l'équivalent pour les intégrales des fonctions positives.*

Posons $A = \displaystyle\int_0^1 h(t)\,dt$ *et* $H(x) = \displaystyle\int_1^x h(t)\,dt$.

Pour $x \in \mathbf{R}^{+*}$ $\quad (1) \quad f(x) = x\left(\displaystyle\int_0^1 h(t)\,dt + \int_1^x h(t)\,dt\right) = x(A + H(x))$.

On sait que H *est* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^{+*}$ *comme primitive d'une fonction* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^{+*}$. *Donc* f *est* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^{+*}$.

• *Étudions le continuité en* 0.

Si $x \in]0,1]$ $\quad 0 \leqslant \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt \leqslant \int_0^1 h(t)\,dt$.

On a donc $\quad \forall x \in]0,1] \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant x\,A$.

Donc, par le théorème d'encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$. *Donc* f *est continue en* 0.

• *Étudions la dérivabilité en* 0.

Posons $\tau(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$\tau(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$. *On a* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^x h(t)\,dt = 0$ *donc*f *est dérivable en* 0 *et* $f'0) = 0$.

• *Étudions la continuité de* f' *en* 0.

En reprenant l'expression (1)

$\forall x \in \mathbf{R}^* \quad f'(x) = (A + H(x)) + xH'(x) = A + H(x) + h(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt + xh(x)$

Or $xh(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ *donc* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} xh(x) = 0$.

Donc $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 = f'(0)$.

f' *est continue en* 0 *et donc sur* $\mathbf{R}^+$ *donc* f *est bien* C^1 *sur* $\mathbf{R}^+$.

2) *On a déjà montré que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ *est convergente. Posons* $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$, *pour* $\varepsilon > 0$.

On utilise le changement de variable $t = \dfrac{u^2}{2}$

On a donc $u = \sqrt{2t}$ *et* $dt = u\,du$.

La formule de changement de variable donne :

$I(\varepsilon) = \displaystyle\int_{u=\sqrt{2\varepsilon}}^{u=\sqrt{2x}} \frac{e^{-u^2/2}}{u/\sqrt{2}}\,u\,du = \int_{\sqrt{2\varepsilon}}^{\sqrt{2x}} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2}}\,du.$

On fait tendre ε *vers* 0^+, *on obtient* $\displaystyle\int_0^x h(t)\,dt = \sqrt{\pi}\int_0^{\sqrt{2x}} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du$

On a donc, en notant Φ *la fonction de répartition de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *:*

$$f(x) = x\sqrt{\pi}\left[\Phi(\sqrt{2x}) - \Phi(0)\right]$$

3) *On sait que* $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$ *et que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$.

On peut donc conclure $\quad \boxed{\textit{Quand } x \textit{ est voisin de } +\infty \qquad f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}x}$

Corrigé exercice 45

Entraînement

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 \ln x}{x^2-1}$.

1) *Par produit et quotient de fonctions usuelles* C^∞ *sur* $]0,1[$, f *est immédiatement* C^∞ *sur cet intervalle.*

• *Limite en* 0 *: on sait d'après le cours que :* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln(x) = 0$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. *On peut donc prolonger* f *en* 0 *en posant* $\boxed{f(0)=0}$.

• *Limite en* 1 *: posons* $u = 1-x$ *donc* $x = 1-u$.

$f(x) = \dfrac{(1-u)^2\ \ln(-1-u)}{(1-u)^2-1})\dfrac{(1-u)^2\ln(1-u)}{u^2-2u}$

On utilise les équivalents usuels quand u est voisin de 0 *:* $(1-u)^2 \sim 1$, $\ln(1-u) \sim -u$ *et* $u^2-2u \sim -2u$.

Donc, par produit et quotient d'équivalents, $f(x) \sim \dfrac{1}{2}$ *et* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

On peut prolonger f *en* 1 *en posant* $\boxed{f(1) = \dfrac{1}{2}}$

2) *On commence par remarquer que toutes les intégrales utilisées ci dessous existent d'après la question précédente et du fait que* $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\, dx$ *est faussement impropre en* 0. *Puis :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 x^{2k}\ln(x)\, dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n}(x^2)^k\right)\ln(x)\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2}\ln(x)\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2\ln(x)}{1-x^2}\, dx - \int_0^1 x^{2n}\,\frac{x^2\ln(x)}{1-x^2}\, dx \\
&= \int_0^1 f(x)\, dx - \int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx
\end{aligned}$$

C'est bien la relation attendue.

3) f *est continue sur le segment* $[0,1]$ *donc :*

$$\exists M \in \boldsymbol{R}^{+*} \qquad \forall x \in [0,1] \qquad |f(x)| \leqslant M$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx\right| &\leqslant \int_0^1 x^{2n}|f(x)|\, dx \quad \textit{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant M\int_0^1 x^{2n}\, dx \\
&\leqslant M \times \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

Donc, par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\displaystyle\int_0^1 x^{2n} f(x)\, dx\right| = 0$.

On a le résultat attendu.

4) *Ainsi, la somme partielle* $\sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{2k} \ln(x)\, dx$ *admet* $\int_0^1 f(x)\, dx$ *comme limite.*

Autrement dit $\boxed{\text{la série } \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 x^{2k} \ln(x)\, dx \text{ converge et vaut } \int_0^1 f(x)\, dx}$

Corrigé exercice 46

HEC 2006 oral voie E

1) *Pour la question de cours, ne pas confondre propriétés et définitions... question délicate donc.*
Montrons que f_0^2 *est convexe. Posons* $h = f_0^2$. f_0 *est* C^2 *de* $\boldsymbol{R}^+$ *dans* $\boldsymbol{R}$*, donc h aussi.*
$h'(x) = 2f_0'(x)\ f_0(x)$.
$h''(x) = 2\left(f_0''(x)\ f_0(x) + f_0'(x)^2\right) = 2\left((1+x^4)f_0(x)^2 + f_0'(x)^2\right) \geqslant 0$
Donc h est bien convexe.

2) f_0 *est convexe, donc* f_0' *est croissante. Or* $f_0'(0) = 1$ *donc* $f_0'(x) \geqslant 1$ *pour tout* $x \in \boldsymbol{R}^+$.
Donc f_0 *est croissante sur* $\boldsymbol{R}^+$.
Comme $f_0(0) = 1$*, on a donc :* $\forall x \in \boldsymbol{R}^+ \quad f_0(x) \geqslant 1$.

3) f_0 *est convexe, donc au dessus de ses tangentes.*
La tangente en 0 *est* $(T) \quad y = t+1$
Donc $\forall t \in \boldsymbol{R}^+ \qquad f_0(t) \geqslant t+1 \geqslant t \qquad$ *donc* $\qquad f_0^2(t) \geqslant t^2$.
On a donc $\forall t \geqslant 1 \qquad \dfrac{1}{f_0^2(t)} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ *converge, donc, par le critère de majoration des intégrales des fonctions positives* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)}\, dt$ *converge.*
Par ailleurs, la fonction $\dfrac{1}{f_0^2}$ *est continue et strictement positive sur* $[0,1]$*, donc l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f_0^2(t)}\, dt$ *est "propre".*
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)}\, dt$ *converge.*

4) *Attention, on monte en gamme sur cette question.*
Posons $g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)}\, dt$ *pour tout* $x \in \boldsymbol{R}^+$.
On a donc $f_1(x) = f_0(x) \times g(x)$
$g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)}\, dt - \int_0^x \frac{1}{f_0^2(t)}\, dt = C - k(x)$
en posant $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{f_0^2(t)}\, dt$ *et* $k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{f_0^2(t)}\, dt$.
C est une constante, k une fonction de classe C^2 *sur* $\boldsymbol{R}^+$*, comme primitive d'une fonction de classe* C^2.
$f_1'(x) = f_0'(x) \times g(x) + f_0(x) \times g'(x)$.
Or $g'(x) = \dfrac{1}{f_0^2(x)}$*, donc* $f_1'(x) = f_0'(x) \times g(x) + \dfrac{1}{f_0(x)}$.

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= f_0''(x)\times g(x)+f_0'(x)\times\frac{1}{f_0^2(x)}-\frac{f_0'(x)}{f_0^2(x)} \\ &= f_0''(x)\times g(x) \\ &= (1+x^4)f_0(x)\times h(x) \\ &= (1+x^4)f_1(x) \end{aligned}$$

Donc $f_1 \in E$.

f_1 *est continue sur* $\mathbf{R}^+$. *Pour montrer que* f_1 *est bornée, il suffit donc de montrer que* f_1 *admet une limite finie quand* $x \to +\infty$.
f_0 *est croissante, donc* $\quad \forall t \in [x,+\infty[\quad f_0(x) \leqslant f_0(t)$
donc $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f_0(x)}{f_0^2(t)}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{f_0(t)}{f_0^2(t)}\,dt$
donc $\displaystyle 0 \leqslant f_1(x) \leqslant \int_x^{+\infty}\frac{1}{f_0(t)}\,dt \quad (i).$
Or on a vu que $f_0'(t) \geqslant t$ *donc* $\displaystyle\quad \int_0^x f_0'(t)\,dt \geqslant \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}t^2.$
Il en résulte que $f_0(x)-f_0(0) \geqslant \dfrac{1}{2}\,t^2$ *ou encore que* $f_0(x) \geqslant \dfrac{1}{2}t^2+f_0(1) \geqslant \dfrac{1}{2}t^2.$

Donc $\dfrac{1}{f_0(t)} \leqslant \dfrac{2}{t^2}$. *En conséquence,* $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{f_0(t)}\,dt$ *converge pour tout* $x \in \mathbf{R}^+$.
$\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{f_0(t)}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{f_0(t)}\,dt - \int_0^{x}\frac{1}{f_0(t)}\,dt.$
Du fait de la convergence de l'intégrale, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{1}{f_0(t)}\,dt = 0$
En utilisant l'encadrement (i), *on a donc* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.$
Donc f_1 *est bien bornée.*

Corrigé exercice 47 *HEC 2006 oral voie E*

Soit $a>0$ *et* f *définie sur* $(\mathbf{R}^{+*})^2$ *par* $f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{a}{xy}$.
Sans problème, f *est de classe* C^2 *sur l'ouvert* $(\mathbf{R}^{+*})^2$ *de* $\mathbf{R}^2$.
Cherchons les éventuels points critiques de f.
$\partial_1(f)(x,y) = 2x+\dfrac{a}{y}\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x-\dfrac{a}{x^2y}$
$\partial_2(f)(x,y) = 2y-\dfrac{a}{xy^2}$

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ point critique} &\iff 2x-\frac{a}{x^2y}=0 \quad \text{et} \quad 2y-\frac{a}{xy^2} \\ &\iff 2x^3y=a \quad \text{et} \quad 2y^3x=a \quad (1) \end{aligned}$$

Or $(1) \Longrightarrow 2xy(x^2-y^2)=0$ *donc* $x=y$ *car* $(x,y)\in(\mathbf{R}^{+*})^2$.
En reportant dans (1), *on obtient* $x^4=\dfrac{a}{2}$ *donc* $x=\left(\dfrac{a}{2}\right)^{1/4}$.

On a donc un seul point critique : $\qquad M_0 = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}, \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}\right).$

Déterminons les dérivées partielles d'ordre 2.

$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 2 - \frac{a}{y}(-2x^{-3}) = 2\left(1 + \frac{a}{x^3 y}\right).$

$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -\frac{a}{x^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{a}{x^2 y^2}.$

$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2 - \frac{a}{x}(-2y^{-3}) = 2\left(1 + \frac{a}{x y^3}\right).$

Au point critique $M_0 = (x_0, y_0)$, $x_0 = \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}$, $y_0 = x_0$ *donc*

$\partial^2_{1,1}(f)(x_0,y_0) = 2\left(1 + \frac{a}{x_0^4}\right) = 2\left(1 + a \times \frac{2}{a}\right) = 6.$

$\partial^2_{1,2}(f)(x_0,y_0) = \frac{a}{x_0^4} = 2.$

$\partial^2_{2,2}(f)(x_0,y_0) = 2\left(1 + \frac{a}{y_0^4}\right) = 2\left(1 + a \times \frac{2}{a}\right) = 6.$

La matrice hessienne de f en M_0 est : $\qquad H_0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$

H est symétrique donc diagonalisable.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } H &\iff \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible} \\
&\iff (6-\lambda)^2 - 2^2 = 0 \\
&\iff (6-\lambda-2)(6-\lambda+2) = 0 \\
&\iff \lambda = 4 \text{ ou } \lambda = 8
\end{aligned}$$

Donc H_0 admet deux valeurs propres positives. f admet donc un minimum local en M_0.

La valeur de ce minimum est $m = f(x_0,y_0) = f(x_0,x_0) = 2x_0^2 + \frac{a}{x_0}^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2} + \frac{a}{\left(\frac{a}{2}\right)^{1/2}}$

$m = 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2a}.$

On peut conclure : f admet un extremum local unique sur $(\boldsymbol{R}^{+*})^2$.

$\boxed{f \text{ atteint son minimum au point } M_0 = \left(\left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}, \left(\frac{a}{2}\right)^{1/4}\right). \text{ La valeur du minimum est } m = 2\sqrt{2a}}$

Corrigé exercice 48 *HEC 2006 oral voie E*

1) *g_n est le produit d'un polynôme avec $x \mapsto e^{-x}$, donc g_n est C^∞ dur* $\boldsymbol{R}$*. Pour tout*

$x \in \boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{kx^{k-1}}{k!}\right) e^{-x} + (-e^{-x}) \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right) \\ &= e^{-x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \\ &= -e^{x}\, \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \boldsymbol{R}^+ \qquad g_n'(x) = -e^{x}\, \frac{x^n}{n!}}$$

2) *L'équation (E) revient à résoudre $g_n(x) = \dfrac{1}{2}$.*
D'après ce qui précède, g_n est strictement décroissante sur $\boldsymbol{R}^+$, continue, donc réalise une bijection de $I = \boldsymbol{R}^+$ dans $J = f(I) =]0,1]$ car $g_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = 0$. Donc $\dfrac{1}{2}$, élément de J, admet un antécédent unique $a_n \in \boldsymbol{R}^+$.

3) *Voici un algorithme complet répondant à la question. A noter que pour lancer la dichotomie, on doit commencer par encadre a_n, ce qui se fait avec un algorithme ici. On a ajouté un script permettant de visualiser la suite (a_k).*

```
function y=g(n,x)
    s=1;u=1
    for k=1:n
        u=u*x/k
        s=s+u
    end
    y=s*exp(-x)
endfunction
function y=alpha(n)
b=1
while g(n,b)>1/2
    b=b+1
end
a=0
while b-a>10^(-2)
    c=(a+b)/2
    if (g(n,a)-1/2)*(g(n,c)-1/2)<0 then b=c else a=c end
end
y=a
endfunction
disp(alpha(2))
n=input('n=')
x=1:n
for k=1:n
    y(k)=alpha(k)
```

```
end
plot2d(x,y,style=-1)
```

4) $gn+1(x) = g_n(x) + \dfrac{x^{n+1}}{(+1)!}e^{-x}$, *donc* $g_{n+1}(a_n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{a_n^{n+1}}{(n+1)!} > \dfrac{1}{2}$.
Ainsi $g_{n+1}(a_n) > g_{n+1}(a_{n+1})$, *donc, comme* g_{n+1} *est strictement décroissante,* $a_n < a_{n+1}$. $\boxed{\textit{La suite de terme général } a_n \textit{ est croissante}}$

Corrigé exercice 49

HEC 2008 oral voie E

1) Question de cours : *pas de problème. Un* DL_2 *d'une fonction h au voisinage de* 0 *est une expression du type*

$$h(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$$

Si h est de classe C^2 *au voisinage de* 0*, le* DL_2 *est donné par*

$$h(x) = h(0) + xh'(0) + \frac{x^2}{2}h''(0) + o(x^2)$$

(formule de Taylor Young)

Soit f *la fonction définie par* $f(x) = e^{-x^2}$ *et* F *la primitive de* f *sur* $\mathbf{R}$ *vérifiant* $F(0) = 0$.

2) *F est C^∞ sur* $\mathbf{R}$ *comme primitive de f, qui est elle-même C^∞ sur* $\mathbf{R}$.
$F'(x) = f(x) > 0$. *Donc F est strictement croissante. En écrivant la définition de F sous la forme*

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

On montre facilement que F est impaire (on fait le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $F(-x)$).
Pour les limites et la courbe, on peut se ramener à la fonction Φ, fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du$$

On voudrait que $t^2 = \dfrac{1}{2}u^2$*, on utilise donc le changement de variable (affine)* $t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u$.

$\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2\pi}\int_0^{x/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u2/2}\,du = \sqrt{\pi} \times \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

En particulier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sqrt{\pi}\lim_{x\to+\infty}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\pi}$.

La courbe de f a donc la même physionomie que celle de Φ, variant de $-\sqrt{\pi}$ *à* $+\sqrt{\pi}$.

3) **a:** *Pour tout x réel, la fonction* $t \mapsto e^{-(xt)^2}$ *est continue sur le segment* $[0,1]$ *donc l'intégrale* $\int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt$ *existe bien (intégrale "propre").*

b: *On va se ramener à la fonction* F.

Partons de : $G(x) = \int_0^1 e^{-(xt)^2}\,dt$ *et utilisons le changement de variable* $u(t) = xt$.

On a donc $du = x\,dt$.

$t = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ *et* $t = 1 \Longleftrightarrow u = x$

Pour $x \neq 0$, $G(x) = \int_{u=0}^{u=x} e^{-u^2}\frac{1}{x}\,du = \frac{1}{x}F(x)$.

Pour $x = 0$, $G(x) = \int_0^1 dt = 1$

Donc, pour $x \in \boldsymbol{R}^*$ $G(x) = \frac{1}{x}F(x)$.

Donc G est C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}^*$ *et* $G'(x) = \frac{xF'(x) - F(x)}{x^2} = \frac{xe^{-x^2} - F(x)}{x^2}$.

On a donc $G'(x) = \frac{K(x)}{x^2}$ *avec* $K(x) = xe^{-x^2} - F(x)$.

$K'(x) = -2x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} - e^{-x^2} = -2x^2e^{-x^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$K'(x)$		$-$	
K	$\searrow$	0	$\searrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$G'(x)$	$+$	$\Vert$	$-$
G	$\nearrow$	1	$\searrow$

c: *G est* C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}^*$.

Examinons la continuité de G en 0.

$G(x) = \frac{F(x)}{x} = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$.

Donc $\lim_{x \to 0} G(x) = F'(0) = 1 = G(0)$.

Donc *G est continue en* 0.

On a vu que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \sqrt{\pi}$ *donc* $\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0$.

d: *G étant C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, il faut regarder la dérivabilité en* 0.
Formons le taux d'accroissement en 0 *:*
$\tau = \dfrac{G(x)-G(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{F(x)}{x}-1}{x} = \dfrac{F(x)-x}{x^2}$.
On utilise la formule de Taylor à l'ordre 2 :

$$F(x) = F(0)+xF'(0)+\frac{x^2}{2}F''(0)+o(x^2) = x+o(x^2)$$

Ainsi $\tau = o(1)$. Il en résulte que $\boxed{G \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } G'(0)=0}$

Reprenons l'expression de $G'(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^*$.
$G'(x) = \dfrac{xe^{-x^2}-F(x)}{x^2} = \dfrac{x(x-x^2+o(x^2))-(x+o(x^2)}{x^2} = \dfrac{o(x^2)}{x^2} = o(1)$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} G'(x) = 0 = G'(0)$ donc G' est continue en 0. Ainsi G est C^1 sur $\mathbb{R}$.

4) **a:** $\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad xG'(x)+G(x) = \dfrac{xe^{-x^2}-F(x)}{x} + \dfrac{F(x)}{x} = e^{-x^2} = f(x)$.
Puis pour $x=0$, $0.G'(0)+G(0) = 1 = f(0)$.
$xG'(x)+G(x) = f(x)$ est donc vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$ ***c.q.f.d.***

b: *Soit G_1 une fonction vérifiant (E). On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} xG'(x)+G(x) & = f(x) \\ xG_1'(x)+G_1(x) & = f(x) \end{cases}$$

Par différence, on obtient $x(G(x)-G_1'(x))+G(x)-G_1(x) = 0$,
ou encore $xH'(x)+H(x) = 0$
• *Si $x>0$, on pose $K(x) = xH(x)$. $K'(x) = xH'(x)+H(x) = 0$ donc $K(x) = C$ constante, sur $\mathbb{R}^{+*}$*
Donc $H(x) = \dfrac{C}{x}$.
• *Si $x<0$, on obtient de même $H(x) = \dfrac{D}{x}$.*
Or H est continue sur $\mathbb{R}$, donc nécessairement $C=D=0$. Donc H est la fonction nulle, et on a bien $G = G_1$.
G est bien l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

Corrigé exercice 50

HEC 2009 oral voie E

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1) **Question de cours :** *Pas de problème. Ne pas oublier de signaler que le cours ne donne aucun résultat quand le polynôme caractéristique a un discriminant strictement négatif.*

2) *Plusieurs possibilités pour effectuer le travail demandé. Voilà un script très classique :*

```
function y=u(n)
a=3;b=29/9
for k=2:n
    y=9-26/b+24/(a*b)
    a=b;b=y
end
endfunction
```

3) *Posons* $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.
Par définition de u_n*, on a*

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} &= 9 - \frac{26}{\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}} + \frac{24}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \times \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}} \\
&= 9 - 26\,\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} + 24\frac{a_n}{a_{n+2}}
\end{aligned}$$

Donc $a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n$.
$u_0 = 3 \iff \dfrac{a_1}{a_0} = 3$. *Comme* $a_0 = 3$, $a_1 = 9$.
$u_1 = \dfrac{29}{9} \iff \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{29}{9}$ *donc* $a_2 = 29$.

4) *On pose, pour* $n \in \mathbf{N}$ $\quad (H_n) \quad a_n = 2^n + 3^n + 4^n$.
Montrons (H_n) *par récurrence sur 3 générations.*
• *On vérifie facilement que* (H_n) *est vrai pour* $n = 0$, $n = 1$ *et* $n = 2$.
• *Supposons* (H_n), $(H_{n+1}$ *et* $H(n+2)$ *vrais.*

$$\begin{aligned}
a_{n+3} &= 9(2^{n+2} + 3^{n+2} + 4^{n+2}) - 26(2^{n+1} + 3^{n+1} + 4^{n+1}) + 24(2^n + 3^n + 4^n) \\
&= 2^n(36 - 52 + 24) + 3^n(81 - 78 + 24) + 4^n(144 - 104 + 24) \\
&= 2^n \times 8 + 3^n \times 27 + 4^n \times 64 \\
&= 2^n \times 2^3 + 3^n \times 3^3 + 4^n \times 4^3 \\
&= 2^{n+3} + 3^{n+3} + 4^{n+3}
\end{aligned}$$

Donc (H_{n+3}) *est vérifié.*
Ce qui termine la démonstration par récurrence.

5) *Commençons par déterminer un équivalent de* a_n.
$a_n = 4^n \left(1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{4^n} = 1$*, et donc* $\qquad a_n \sim 4^n$

Par quotient d'équivalents, on a donc $\qquad u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \sim \dfrac{4^{n+1}}{4^n}$

On peut conclure $\qquad \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4}$

On pourrait éventuellement vérifier la cohérence de ce résultat théorique avec les valeurs données de la fonction Scilab pour u_n *avec* $n = 50$, $n = 100$. *Et c'est bien le cas...*

Corrigé exercice 51

HEC 2010 oral voie BL

Soit H définie par : $$H(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}\,dt$$

1) *Question de cours : pas de problème. On peut citer l'absolue convergence, les critères de convergence pour les intégrales des fonctions positives.*

2) *Posons* $f(t)=\dfrac{e^{-t^2}}{2(1+t)}$.

f est continue sur $\mathbf{R}-\{-1\}$. Au voisinage de -1, $f(t)\sim\dfrac{e^{-1}}{1+t}$ et on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{a}\frac{1}{1+t}\,dt$ diverge. Donc, nécessairement, $x\in]-1,+\infty[$ car il est impossible que l'intervalle d'intégration contienne -1. Si $x\in]-1,+\infty[$, f est continue sur $]x,+\infty[$ et, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{f(t)}{\frac{1}{t^2}}\sim\dfrac{1}{2}\dfrac{e^{-t^2}}{t}$.

Grâce à la domination de la fonction exponentielle, on sait que $\displaystyle\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}=0$.

Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t^2}}{t}=0$ et, ainsi $f(t)=o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,dt$ converge. D'autre part, pour $x>-1$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ est une intégrale "propre", donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}f(t)\,dt$ converge.

On peut conclure $\boxed{\mathscr{D}_H=]-1,+\infty[}$

3) *On peut écrire : $\forall x\in]0,+\infty[\qquad H(x)=K-F(x)$*

en posant $k=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ et $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

f est C^∞ sur $]0,+\infty[$, donc F aussi, comme primitive de f.

$\forall x\in]0,+\infty[\quad H'(x)=-F'(x)=-f(x)<0$.

Ainsi $\boxed{H \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[}$ La limite de H en 0 est $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,dt=H(0)$ (d'ailleurs, sans problème, H est continue sur $]-1,+\infty[$).

On a vu que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$ converge et on a décidé d'appeler K sa valeur.

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}H(x)=0}$

4) *On sent tout de suite que cette question est beaucoup plus difficile.*

Posons $I(A)=\displaystyle\int_0^A H(t)\,dt$ pour $a\in\mathbf{R}^+$.

On pose $u(t)=H(t)$ et on choisit v pour que $v'(t)=1$.

On prend donc $v(t)=t$ et on a $u'(t)=H'(t)$.

u et v sont C^1 sur $[0,A]$, on peut donc intégrer par parties.

$$\begin{aligned}
I(A) &= \Big[t\,h(t)\Big]_0^A - \int_0^A t\,H'(t)\,dt \\
&= AH(A) - 0 - \int_0^A \frac{t}{2(t+1)}\,e^{-t^2}\,dt \\
&= AH(A) - \int_0^A \frac{(1+t)-1}{2(1+t)}\,e^{-t^2}\,dt \\
&= AH(A) - \int_0^A \frac{1}{2}\,e^{-t^2}\,dt + \int_0^A \frac{1}{2(1+t)}\,e^{-t^2}\,dt
\end{aligned}$$

On montre facilement, en utilisant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et le changement de variable $t = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$, que : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{2}\,e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Par ailleurs, on a directement :
$\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1}{2(1+t)}\,e^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = H(0).$
Reste à déterminer la limite de $AH(A)$ quand A tend vers $+\infty$.
$\displaystyle 0 \leqslant AH(A) = A\int_A^{+\infty}\frac{1}{2(1+t)}\,e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_A^{+\infty}\frac{t}{2(1+t)}\,e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_A^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$
car $\dfrac{t}{2(1+t)}$ croit de 0 à $\dfrac{1}{2}$ sur $\boldsymbol{R}^+$ donc reste inférieur à 1.
On sait que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 0$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I(A) = H(0) - \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} H(x)\,dx = H(0) - \frac{\sqrt{\pi}}{4}}$

5) *Soit (x_n) la suite définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = H(x_n)$.*

a: *Comme $H(x) \in \boldsymbol{R}^{+*}$ pour tout $x \in \boldsymbol{R}^{+*}$ et comme $x_0 \in \boldsymbol{R}^{+*}$, la démonstration par récurrence est immédiate.*

b: *Posons $G(x) = H(x) - x$ pour $x \in \boldsymbol{R}^{+*}$.*
$\displaystyle G'(x) = H'(x) - 1 = -\frac{e^{-x^2}}{2(1+x)} - 1 < 0$
Donc G est strictement décroissante sur $\boldsymbol{R}^{+*}$ et continue. G réalise donc une bijection de $I = \boldsymbol{R}^{+*}$ dans $J = G(\boldsymbol{R}^{+*})$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to0^+} G(x) = K > 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = -\infty$. Donc $J =]-\infty, K[$.
$0 \in J$ admet donc un antécédent unique $\alpha \in I = \boldsymbol{R}^{+*}$.
Or $G(x) = 0 \Longleftrightarrow H(x) = x$. On obtient donc la justification attendue.

c: $\displaystyle H'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2(1+x)}$*, donc* $\displaystyle |H'(x)| = \frac{e^{-x^2}}{2(1+x)} \leqslant \frac{1}{2(1+x)} \leqslant \frac{1}{2}$.
On applique l'inégalité des accroissements finis sur $I = \boldsymbol{R}^{+*}$ entre x_n et α :
$|H(x_n) - H(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x_n - \alpha|$ *donc* $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|x_n - \alpha|$.

d: *La suite est ultra-classique. On montre très facilement par récurrence que*

$$\forall n \in \boldsymbol{N} \qquad 0 \leqslant |x_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0 - \alpha|$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n |x_0-\alpha| = 0$ *donc, par le théorème d'encadrement,*
$\lim_{n\to+\infty}|x_n-\alpha| = 0$ *donc* $\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ converge vers } \alpha}$

Corrigé exercice 52

HEC 2011 oral voie E

On se donne deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 0 \quad et \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n\,\frac{1+\alpha.u_n}{1+\beta.u_n}$$

1) *Question de cours : pas de problème. Il s'agit d'énoncer correctement les théorèmes de convergence monotone :*
• *dans le cas croissant :* $CV \iff$ *majorée.* *Si DV, la suite tend vers* $+\infty$.
• *dans le cas décroissant :* $CV \iff$ *minorée.* *Si DV, la suite tend vers* $-\infty$.

2) *Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.*

a: $f(x) = x\,\dfrac{1+x}{1+2.x}$

$\mathscr{D}_f = \mathbf{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. *$f$ est de classe C^∞ sur $\mathscr{D}_f$ comme produit et quotient de fonctions usuelles C^∞.* $\forall x \in \mathscr{D}_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1+x}{1+2x} + x\times\frac{(1+2x)-2(1+x)}{(1+2x)^2} = \frac{1+x}{1+2x} - \frac{x}{(1+2x)^2} \\ &= \frac{(1+x)(1+2x)-x}{(1+2x)^2} = \frac{1+2x+2x^2}{(1+2x)^2} \end{aligned}$$

$1+2x+x^2 = (1+x)^2+x^2 > 0$. *Donc f est strictement croissante sur $\mathscr{D}_f$ et en particulier sur $\mathbf{R}^+$.*

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$0 \nearrow +\infty$

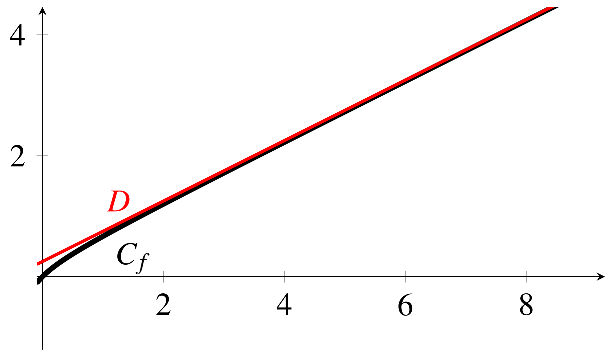
Au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \frac{1}{2}x$

$f(x) - \frac{1}{2}x = x\left(\frac{1+x}{1+2x} - \frac{1}{2}\right) = x\left(\frac{2(1+x)-(1+2x)}{2(1+2x)}\right) = \frac{x}{2(1+2x)}$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{x}{2(1+2x)}-\frac{1}{4}=\frac{2x-(1+2x)}{4(1+2x)}=-\underbrace{\frac{1}{4(1+2x)}}_{\to 0}<0$$

Donc, la droite (D) d'équation $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ est asymptote à la courbe C de f au voisinage de $+\infty$ et D est au dessus de C.



b: *On voit que 0 est un point fixe de f. Regardons si c'est le seul.*
$f(x)-x=x\left(\frac{1+x}{1+2x}-1\right)=-\frac{x^2}{1+2x}$.
Donc $f(x)=x\Longleftrightarrow x=0$. 0 est le seul point fixe.
On a : $\forall x\in\boldsymbol{R}^{+*}\qquad f(x)\in\boldsymbol{R}^{+*}$ et $f(x)<x$.
Donc $\forall n\in\boldsymbol{N}\qquad u_n\in\boldsymbol{R}^{+*}$ (par une récurrence immédiate) et $f(u_n)<u_n$ donc $u_{n+1}<u_n$
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc (u_n) converge vers une limite ℓ.
Comme f est continue sur $\boldsymbol{R}^+$, on sait que ℓ est un point fixe de f.
On peut donc conclure $\boxed{(u_n)\text{ converge vers } 0}$

3) *On utilise le même principe dans le cas général.*
$f(x)-x=x\left(\frac{1+\alpha x}{1+\beta x}-1\right)=\frac{(\alpha-\beta)x^2}{1+\beta x}<0.$
Pour les mêmes raisons 0 est le seul point fixe, et (u_n) converge vers 0.

4) *On calcule $v_{n+1}-v_n$.*

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\\ &= \frac{1+\beta u_n}{1+\alpha u_n}\times\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_n}\\ &= \frac{1}{u_n}\left(\frac{1+\beta u_n}{1+\alpha u_n}-1\right)\\ &= \frac{\beta-\alpha}{1+\alpha u_n}\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1}-v_n=\beta-\alpha$. *C'est le résultat attendu.*

5) *Posons $w_n=v_{n+1}-v_n$. On utilise la propriété $\mathscr{P}$ de l'énoncé.*
$V_n=\frac{1}{n}(w_0+w_1+\ldots+w_{n-1})=\frac{1}{n}(v_n-v_0)$ *converge vers $\beta-\alpha$.*

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{v_n}{n} = \beta - \alpha$.
Donc, quand n tend vers $+\infty$ $\quad v_n \sim n(\beta-\alpha)$.
Revenons à u_n. *On a donc* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\,u_n} = \beta - \alpha$ *ou encore* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n(\beta-\alpha)} = 1$.

On peut conclure $\boxed{\text{Quand } n \text{ tend vers } +\infty \quad u_n \sim \dfrac{1}{n(\beta-\alpha)}}$

Corrigé exercice 53

HEC 2011 oral voie BL

On considère la suite (u_n) *définie par la donnée de son premier terme* $u_0 \neq 1$ *et par la relation de récurrence :*

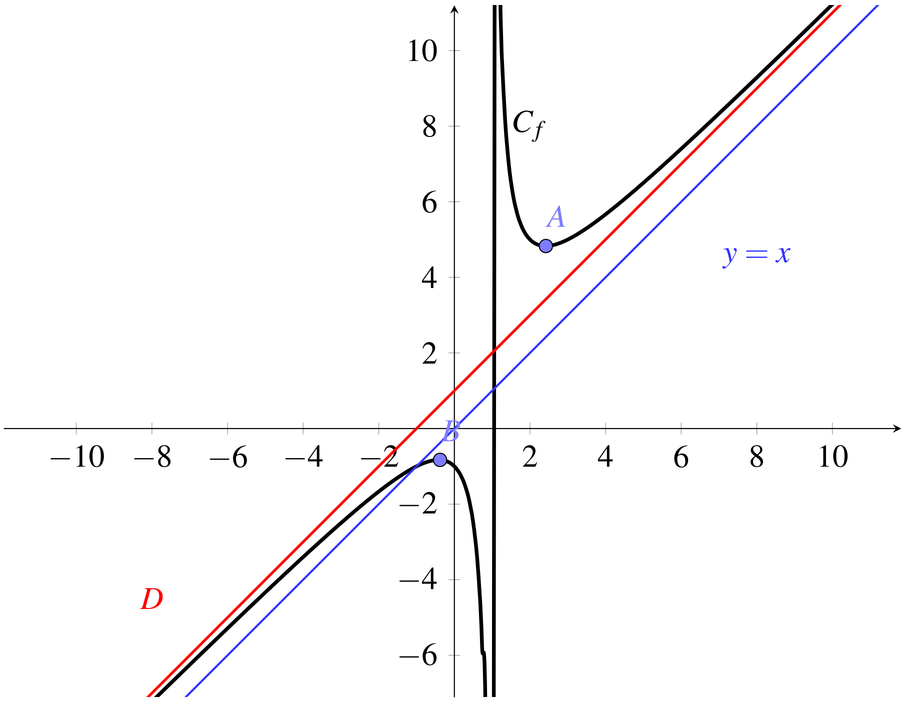
$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{u_n-1}$$

1) *Question de cours : voilà une question intéressante, presque philosophique. Est-ce un hasard qu'elle soit posée à des candidats de la voie BL ?*

2) $\mathscr{D}_f = \mathbf{R} - \{1\}$. f *est évidemment de classe* C^∞ *sur* $\mathscr{D}_f$.
$\forall x \in \mathscr{D}_f \qquad f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$
x^2-2x+1 *est un trinôme admettant deux racines* $x' = 1-\sqrt{2}$ *et* $x'' = 1+\sqrt{2}$.
On connaît le signe du trinôme donc celui de $f'(x)$. *On peut dresser le tableau de variations :*

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	M	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	m	↗	$+\infty$

avec $M = f(1-\sqrt{2})$ *et* $m = f(1-\sqrt{2})$.
$f(x) - x = \dfrac{x^2+1}{x-1} - x = \dfrac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$.
On remarque donc que -1 *est le seul point fixe de* f.
On remarque aussi que $f(x)-(x+1) = \dfrac{x+1}{x-1} - 1 = \dfrac{2}{x+1}$ *qui tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $\pm\infty$.
Donc $(D) \quad y = x+1$ *est asymptote à la courbe* C_f *au voisinage de* $\pm\infty$.
La courbe est au dessus de D *en* $+\infty$ *et en dessous en* $-\infty$. *On peut maintenant fournir l'allure de la courbe* C_f.



u_0 est définie, et si u_n est défini, u_{n+1} est défini, si $u_n \neq 1$.
Or $f(x) = 1 \iff \dfrac{x^2+1}{x-1} = 1 \iff x^2 - x + 2 = 0$ et $x \neq 1$.
Or $x^2 - x + 2 = 0$ n'admet pas de racine dans $\mathbf{R}$.
Ainsi $\qquad \forall x \in \mathscr{D}_f \qquad f(x) \neq 1$.
Il en résulte, par une récurrence évidente que $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \neq 1$.
Cela justifie la définition de la suite (u_n).

3) *On suppose dans cette question que $u_0 > 1$.*
Regardons la valeur de m, ordonnée du point A où f atteint son minimum sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} m = f(1+\sqrt{2}) &= \frac{(1+\sqrt{2})^2}{1+\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}+4}{2} \\ &= 2(1+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Donc $\qquad \forall x \in]1, +\infty[\qquad f(x) \geqslant 2(1+\sqrt{2}) > 1$
On a donc, par une récurrence immédiate $\qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \geqslant 2(1+\sqrt{2})$.

On a vu que $\forall x \in]1, +\infty[f(x) - x = \dfrac{x+1}{x-1} > 0 \qquad$ donc $f(x) > x$
Donc $f(u_n) >$ un ou encore $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est bien croissante.
Si la suite (u_n) était majorée, elle serait convergente vers un point fixe (car f est continue). Or -1 est le seul point fixe et $u_n > 0$.
Donc la suite (u_n) n'est pas majorée. En conséquence $\qquad \boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

4) *On regarde la valeur de* $M = f(1-\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} m = f(1-\sqrt{2}) &= \frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{4-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} \\ &= \frac{-4\sqrt{2}+4}{2} \\ &= 2(1-\sqrt{2}) < 0 \end{aligned}$$

On peut remarquer que $2(1-\sqrt{2}) \simeq -0,8$. *On a* $\forall x \in]-\infty, 1[\qquad f(x) < -1$.
Donc $\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad u_n < 0$ *seul* u_0 *peut être positif.*
$f(x)+1 = \dfrac{x^2+1}{x-1} + 1 = \dfrac{x^2+X}{x-1} = \dfrac{x(x+1)}{x-1}$ *du signe de* $x(x+1)$ *sur* $\mathbf{R}^-$.
On connaît donc les signes de $f(x)+1$ *et de* $f(x)-x$ *sur* $]-\infty, 0]$ *:*

x	$-\infty$		-1		0
$f(x)+1$		$-$	0	$+$	0
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	

On peut maintenant discuter.
• *Si* $u_0 = -1$, *la suite* (u_n) *est constante :* $\qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = -1$.
• *Si* $u_0 = 0$, *le suite est stationnaire à partir du rang 1 :* $\qquad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad u_n = -1$
• *Si* $u_0 \in]-\infty, -1[$.
On a donc facilement, par récurrence $\qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_n < -1$
Or si $x < -1$, $f(x) > x$ *donc* $u_{n+1} > u_n$. *La suite* (u_n) *est croissante, majorée par* -1 *donc convergente vers un point fixe donc vers* -1.
• *Si* $u_0 \in]-1, 0[$.
On a facilement par récurrence $\qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_n \in]-1, 0[$.
Or si $x \in]-1, 0[$, $f(x) < x$ *donc* $u_{n+1} < u_n$. *La suite* (u_n) *est décroissante, minorée par* -1 *donc convergente vers* -1.
• *Si* $u_0 \in]0, 1[$, *alors* $u_1 < -1$ *et* (u_n) *est croissante à partir du rang 1 majorée par* -1 *à partir du rang 1 donc convergente vers* -1.

Corrigé exercice 54

HEC 2011 oral voie BL

1) *Question de cours : pas de problèmes. Le cours est clair pour cette question, et il doit être parfaitement maîtrisé.*

Pour tout entier $n \geqslant 2$, *on considère la fonction* f_n *définie sur* $[0, 1]$, *à valeurs réelles, par :*

$$f_n(x) = (1-x^n)^{1/n}$$

On pose, pour $n \geqslant 2$, $u_n = 1 - \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$

2) **a:** *f_n est C^∞ sur $[0,1[$ et, pour tout $x \in [0,1[$:*

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{1}{n}(-nx^{n-1})(1-x^n)^{1/n-1} \\ &= -\frac{x^{n-1}}{(1-x^n)^{1-1/n}} < 0 \end{aligned}$$

Donc f_n est strictement décroissante de $[0,1]$ dans $f_n([0,1]) = [0,1]$.
Déterminons la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= -(n-1)x^{n-2}(1-x^n)^{(1/n-1)} + (-x^{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)(-nx^{n-1})(1-x)^{1/n-2} \\ &= (n-1)x^{n-2}\left[-(1-x^n)^{1/n-1} - x(1-x)^{1/n-2}\right] < 0 \end{aligned}$$

Donc f_n est bien concave sur $[0,1]$.

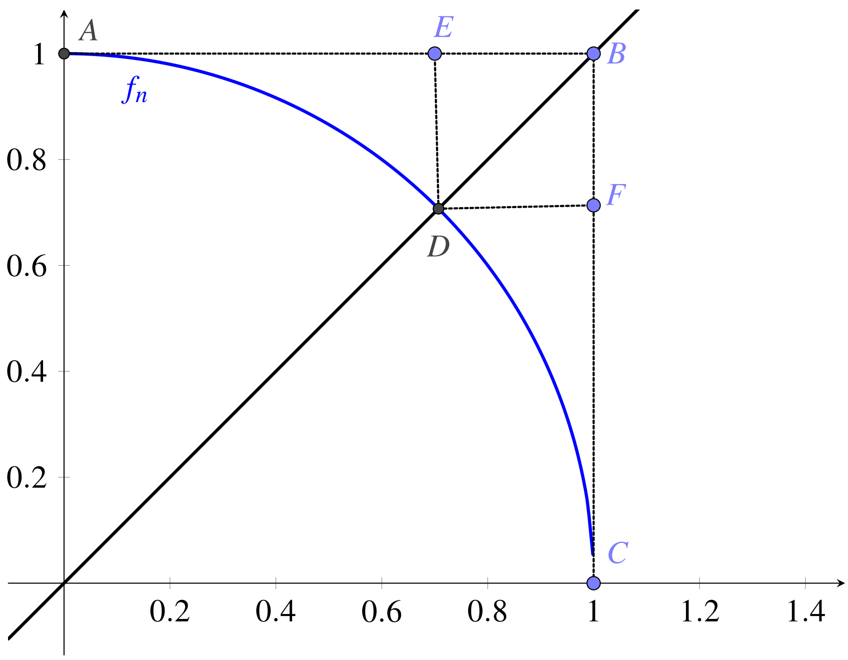
b: *Prenons un peu de recul pour cette question. On sait que f_n est strictement croissante et continue sur $[0,1]$, donc réalise une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Dire que la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé, est symétrique par rapport à la première bissectrice revient à dire que $C_{f_n} = C_{f_n^{-1}}$ ou encore que $f_n = f_n^{-1}$, ou ,mieux, que $f_n \circ f_n = id$.*
$\forall x \in [0,1] \qquad f_n(f_n(x)) = (1-y^n)^{1/n} \qquad$ *avec* $y = (1-x^n)^{1/n}$
donc $y^n = (1-x^n)$ et, ainsi, $(f_n \circ f_n)(x) = (1-(1-x^n))^{1/n} = x$ ***c.q.f.d.***

c: *x est un point fixe de f_n si et seulement si $f_n(x) = x$. Or :*

$$f_n(x) = x \Longleftrightarrow (1-x^n)^{1/n} = x \Longleftrightarrow 1-x^n = x^n \Longleftrightarrow x^n = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}.$$

C'est bien le résultat attendu.

3) *On pose, pour tout $n \geqslant 2$: $v_n = (1-x_n)^2$ et $w_n = \displaystyle\int_0^{x_n} (1-f_n(x))\,dx$.*
Appuyons nous sur la représentation graphique de f_n.



Dans ce graphique, D est le point de coordonnées (x_n, x_n).
w_n *est donc l'aire de la zone* (A, E, D).
Par symétrie, w_n *est aussi l'aire de la zone* (D, C, F).
v_n *est l'aire du carré* (D, E, B, F).
Donc $2w_n + v_n$ *est l'aire de la zone* (A, B, C) *au dessus de la courbe de* f_n,
c'est à dire $1 - \int_0^1 f_n(x)\, dx = u_n$.
On a donc $2w_n + v_n = u_n$ **c.q.f.d.**

4) a: $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = e^{1/n \ln(1/2)} = e^{-\ln(2)/n} = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Donc $1 - x_n = \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ *et* $(1 - x_n)^2 = \left(\frac{\ln(2)}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi $v_n \sim \left(\frac{\ln(2)}{n}\right)^2$, *terme général d'une série convergente. Donc, par le critère de l'équivalent pour les séries à termes positifs*

$\boxed{\text{la série de terme général } v_n \text{ est convergente}}$

b: *Calculons* $1 + \sum_{k=1}^{n-1} y^{k/n}$:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} y^{k/n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(y^{1/n}\right)^k \\ &= \frac{1 - \left(y^{1/n}\right)^n}{1 - y^{1/n}} \\ &= \frac{1 - y}{1 - y^{1/n}} \end{aligned}$$

On a donc bien $1 - y^{1/n} = \dfrac{1 - y}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} y^{k/n}}$.

c: *Attention, question technique et difficile. Il y a peut-être une solution plus simple que celle proposée ici.*
$w_n = \int_0^{x_n} (1 - f_n(x))\, dx$.
Posons $(f_n(x))^n = y$. *On aura donc* $y^{k/n} = (f_n(x))^k$.
On aura également $y^{1/n} = f_n(x)$ *donc* $f_n\left(y^{1/n}\right) = (f_n \circ f_n)(x) = x$.

Autrement dit, $x = \left[1 - \left(y^{1/n}\right)^n\right]^{1/n} = (1 - y)^{1/n}$ *ou encore* $1 - y = x^n$.

f_n *est décroissante sur* $[0, x_n]$, *donc* $f_n(x) \geqslant f_n(x_n) = x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$.

Donc $y^{k/n} = \left(y^{1/n}\right)^k \geqslant \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right]^k$.

$$1+\sum_{k=1}^{n-1} y^{k/n} \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right]^k = \frac{1-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right]^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}}$$

On a donc, d'après la question précédente :

$$1-y^{1/n} \leqslant \frac{1-y}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}}} = 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)\times x^n$$

Revenons à $w_n = \int_0^{x_n}(1-f_n(x))\ dx = \int_0^{x_n}\left(1-y^{1/n}\right)\ dx.$

On a donc $\quad w_n \leqslant \int_0^{x_n} 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)\times x^n\ dx$

$$w_n \leqslant 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)\times\int_0^{x_n} x^n\ dx = 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)\times\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{x_n}$$

$$w_n \leqslant 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)\times\frac{1}{n+1}\times x_n^{n+1} = 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)\times\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}.$$

Il reste à montrer que $\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} \leqslant \frac{2}{n+1}.$

On montre facilement que : $\quad \forall x>0 \quad e^{-x} \geqslant 1-x.$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} = e^{-1/n\ ln(2)} \geqslant 1-\frac{1}{n}\ln(2)$

Donc $\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\ln(2) \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1}$

Par ailleurs $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n} \leqslant 1 \leqslant 2$

Donc $w_n \leqslant \frac{2}{(n+1)^2}$

d: *D'après la question précédente, comme la série* $\sum\frac{1}{(n+1)^2}$ *converge, la série des* w_n *converge (critère de majoration des séries à termes positifs).*
On a vu que la série de terme général v_n *était convergente.*
Comme $u_n = 2w_n + v_n$*, par combinaison linéaire de séries convergentes*
$\boxed{\textit{la série de terme général } u_n \textit{ converge}}$

Corrigé exercice 55

HEC 2012 oral voie E

1) Question de cours : *pas de problème pour la définition.*
La série de terme général $(\ln(x))^n$ *est une série géométrique de raison* $q = (\ln(x))^n$.

Elle converge si et seulement si $|q| < 1$, *c'est à dire* $|\ln(x)| < 1$, *soit* $x \in \left]\frac{1}{e}, e\right[$. *Sa somme est alors* $S = \dfrac{1}{1-q}$, *c'est à dire* $S = \dfrac{1}{1-\ln(x)}$

2) **a:** *Pour* $n \geqslant 1$, f_n *est* C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$.

$f_n'(x) = \dfrac{n}{x}(\ln(x))^{n-1} - 1 \qquad f_n''(x) = \dfrac{n}{x} \times \dfrac{n-1}{x}(\ln(x))^{n-2} - \dfrac{n}{x^2}(\ln(x))^{n-1}$.

Donc, si $n = 1$, $f_1''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ *et, si* $n \geqslant 2$, $f_n''(x) = \dfrac{n(\ln(x))^{n-2}}{x^2}[-\ln(x) + n - 1]$.

b: $f_1'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1}{1-x}$. *D'où le tableau de variations :*

x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

D'où le résultat.

c: $f_2(1) = -1$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = +\infty$. f_2 *est continue sur* $]0,1[$. *Par application du théorème des valeurs intermédiaires sur* $]0,1[$, f_2 *admet un zéro dans* $]0,1[$.

3) *On suppose maintenant que* $n \geqslant 3$ *et on s'intéresse aux solutions de l'équation* $(E_n) \quad f_n(x) = 0$ *sur l'intervalle* $]1,+\infty[$.

a: *Commençons par le tableau de variations de* f_n' *:*

x	1		e^{n-1}		$+\infty$
$f_n''(x)$		$+$	0	$-$	
f_n'	-1	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	-1

avec

$$M_n = n\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} - 1$$

Il faut regarder le signe de M_n.

Pour $n \geqslant 4$, $n - 1 \geqslant e$, *donc* $n\left(\dfrac{n-1}{e}\right)^{n-1} > 1$ *donc* $M_n > 0$.

Attention au cas $n = 3$ *:*

$M_3 = 3\left(\dfrac{2}{e}\right)^2 - 1$. $M_2 > 0 \Longleftrightarrow \dfrac{2}{e} > \sqrt{\dfrac{1}{3}} \Longleftrightarrow e < 2\sqrt{3}$.

Or $\ln\left(2\sqrt{3}\right) = \ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(3) \geqslant \dfrac{3}{2}\ln(2) \geqslant 1$. *Donc, on a bien* $M_3 > 0$

Par application du théorème de la bijection, f_n' s'annule donc en un réel $\alpha_n \in]0,1[$ et un autre réel $\beta_n \in]1,+\infty[$. Donc :

x	1		α_n		β_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_n	-1	$\searrow$	$f(\alpha_n)$	$\nearrow$	$f(\beta_n)$	$\searrow$	$-\infty$

Pour conclure, il faut montrer que $f(\beta_n) > 0$.
Or $f(e^n) = n^n - e^n > 0$ et comme $f(\beta_n)$ est le maximum absolu de f_n, $f_n(\beta_n) > 0$.
On conclut par une double application du théorème de la bijection sur $]\alpha_n, \beta_n[$ et $]\beta_n, +\infty[$.

b: *En observant le tableau de variations, et sachant que $f_n(e^n) > 0$, on a nécessairement $v_n > e^n$. Donc* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$

c: *C'est plus compliqué. $u_n \in]\alpha_n, \beta_n[$.*
$(\ln(u_n))^n = u_n$, $(\ln(u_{n+1}))^{n+1} = u_{n+1}$ *donc*
*0*$f_n(u_{n+1}) = (\ln(u_{n+1}))^n - u_{n+1} = \ln(u_{n+1}\,[1 - \ln(u_{n+1})]$
Or $f_{n+1}(e) = 1 - e < 0$ donc $u_{n+1} > e$ et donc $f_n(u_{n+1}) < 0$.
Cela prouve que $u_{n+1} < u_n$.
La suite (u_n) est décroissante, minorée par e, donc elle converge.
Remarque : il faut aussi justifier que $e \in]\alpha_n, \beta_n[$.
Pour cela on regarde $f_n'(e) = \dfrac{n}{e} - 1 > 0$, ce qui justifie la remarque.

Recherchons la limite ℓ de u_n.
On peut déjà remarquer que $\ell \geqslant e$.
Supposons $\ell > e$, on aurait $(\ln(u_n)) > q = \ln(e) > 1$ et $(\ln(u_n))^n > q^n$
On aurait $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln(u_n))^n = +\infty$, ce qui contredit $(\ln(u_n))^n = u_n$
Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e}$

Corrigé exercice 56

HEC 2012 oral voie E

1) Question de cours : *Il faut commencer par dire et écrire la définition générale (en rapport avec les cordes), puis donner une caractéristique quand la fonction est de classe C^1 en rapport avec les tangentes, et enfin donner la caractéristique quand f est de classe C^2.*

2) a: *$g : t \mapsto \exp(t^2)$ est continue sur $[0,x]$ (si $x \in \mathbf{R}^+$) ou sur $[x,0]$ (si $x \in \mathbf{R}^-$) donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ existe. Autrement dit $\mathscr{D}_f = \mathbf{R}$.*

b: *f est la primitive de g qui s'annule en 0. g est elle même de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ donc f est C^∞ sur $\mathbf{R}$.*

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} \exp(t^2)\, dt$. On utilise le changement de variable $u = -t$.

$$f(-x) = \int_{u=0}^{u=x} \exp((-u)^2)(-\,du) = -\int_0^x \exp(u^2)\, du = -f(x)$$

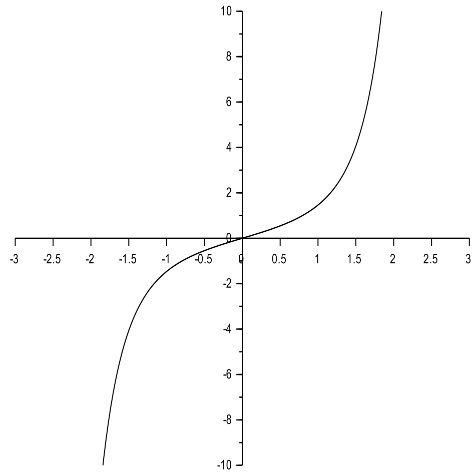
donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

$f'(x) = g(x) = \exp(x^2)$ et $f''(x) = 2x\exp(x^2)$ donc
f est concave sur $\mathbf{R}^-$ et convexe sur $\mathbf{R}^+$ (point d'inflexion en 0).

c: *f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. $\exp(t^2) \geqslant t^2$, donc sur $\mathbf{R}^+$,*

$$f(x) \geqslant \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (branche parabolique de direction l'axe des abscisses). On trace sur $\mathbf{R}^+$ et on complète par symétrie par rapport à 0.



3) **a:** *f est continue strictement croissante de $I = \mathbf{R}$ dans $J = \mathbf{R}$, donc réalise une bijection de $I = \mathbf{R}$ dans $J = \mathbf{R}$.*

$\dfrac{1}{n} \in J = \mathbf{R}$ admet donc un antécédent unique u_n.

On peut remarquer : $\boxed{u_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)}$

b: *f^{-1} varie dans le même sens que f donc est croissante. $n \mapsto \dfrac{1}{n}$ est décroissante, donc par composition , u_n est décroissante. Sans problème :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 0$$

(car f^{-1} est continue).

c: *D'après ce qui précède :* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

4) **a:** *La convexité de* exp *permet de justifier immédiatement que* $1+u \leqslant \exp(u)$ *car* $1+u$ *est la tangente en* 0.
Pour l'inégalité de gauche, une rapide étude de fonction marche bien.

b: *D'après la question 3) c,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *donc* $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0$ *tel que* $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant \varepsilon$.
En particulier, en prenant $\varepsilon = \sqrt{\ln(2)}$, $\exists n_0$ *tel que* $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in [0, \sqrt{\ln(2)}]$.
D'après la question précédente, si $t \in -\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)}]$, *on a* $1+t^2 \leqslant \exp(t^2) \leqslant 1+2t^2$ *donc*

$$\int_0^{u_n} (1+t^2)\, dt \leqslant \underbrace{\int_0^{u_n} \exp(t^2)\, dt}_{=\frac{1}{n}} \leqslant \int_0^{u_n} (1+2t^2)\, dt$$

c.q.f.d.

c: *Cela se corse...*
$1 \leqslant \exp(t^2)$ *donc* $\int_0^{u_n} 1\, dt \leqslant \int_0^{u_n} \exp(t^2)\, dt$ *donc* $u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
Donc $u_n^3 \leqslant \frac{1}{n^3}$ *et* $0 \leqslant nu_n^3 \leqslant \frac{1}{n^2}$, *donc, par encadrement :* $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^3 = 0$.
Voilà donc le premier résultat demandé.

Pour continuer, on intègre das l'inégalité du 4) b : $u_n + \frac{u_n^3}{3} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant u_n + \frac{2u_n^3}{3}$.

On multiplie par n : $nu_n + n\frac{u_n^3}{3} \leqslant 1 \leqslant nu_n + n\frac{2u_n^3}{3}$

On combine toute cela : $1 - \frac{2}{3}nu_n^3 \leqslant nu_n \leqslant 1 - \frac{1}{3}nu_n^3$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$ *et donc* $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$

Corrigé exercice 57

HEC 2017 oral voie E

Soit f *la fonction définie sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$ *par :* $\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$

1) **a:** **Question de cours :** *pas de problème. Si possible, restituer la définition suivante :*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists a > 0 \qquad |x - x_0| < a \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

b: f *est immédiatement continue (et même* C^∞*) sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$ *comme quotient de fonctions* C^∞ *et un numérateur non nul.*

Pour $x \neq 0$, $f(x) = x \times \dfrac{1}{\dfrac{e^x-1}{x}}$. *Or* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ *donc* $f(x) \sim x$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0}$

$f(0) = 0$ *est la seule solution pour prolonger* f *par continuité en* 0.

2) *Posons* $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt} dt$. *On peut écrire* $J_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \times n\, e^{-nt}\, dt$.

C'est $\dfrac{1}{n} \times E(X^2)$ *pour une variable* X *suivant une loi* $\mathscr{E}(n)$. *On sait que* $V(X) = \dfrac{1}{n^2}$

Donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \dfrac{1}{n^2} + \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{2}{n^2}$

On obtient bien le résultat annoncé.

3) **a:** *Du fait de la convexité de* $t \mapsto e^t$, *on a* $e^t \geqslant t+1$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Pour $t > 0$, *on a donc* $e^t - 1 \geqslant t$ *et donc* $\dfrac{1}{e^t-1} \leqslant \dfrac{1}{t}$. *D'où le résultat en multipliant par* t^2.

b: *Posons* $g_n(t) = f(t)e^{-nt}$. *D'après ce qui précède,* $g_n(t) \leqslant te^{-nt}$. *On sait que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\, dt$ *converge (et vaut* $\dfrac{1}{n^2}$*, en utilisant* $E(X)$*, avec le même principe que dans la question précédente). Or* g_n *est positive et continue sur* $\mathbb{R}^+$.

Par le critère de majoration des intégrales de fonctions positives : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\, dt$ *converge et est majorée par* $\dfrac{1}{n^2}$ ***c.q.f.d.***

c: *C'est immédiat en utilisant la majoration précédente :*

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt} dt \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Il suffit d'appliquer le théorème d'encadrement.

4) **a:** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kt} = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-t}\right)^k = e^{-t} \times \frac{1-(e^{-t})^n}{1-e^{-t}}$ *donc :*

$t^2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-kt} = t^2 \left(\frac{1-e^{-nt}}{e^t(1-e^{-t})}\right) = \frac{t^2}{e^t-1} - \frac{t^2}{e^t-1} \times e^{-nt} = f(t) - f(t)e^{-nt}$ ***c.q.f.d.***

b: *On intègre entre* 0 *et* $A > 0$ *:*

$\displaystyle\int_0^{A} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+A} t^2 e^{-kt}\, dt + \int_0^{A} f(t)e^{-nt}\, dt.$

En faisant tendre A vers $+\infty$, *on obtient :* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3} + \int_0^{+\infty} f(t)e^{-nt}\, dt.$

On fait tendre n vers $+\infty$ *et on obtient le résultat attendu.*

5) **a:** *En encadrant* $\dfrac{2}{t^3}$ *sur* $[k, k+1]$, *et en intégrant, on obtient :*

$\dfrac{2}{(k+1)^3} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{2}{t^3}\, dt \leqslant \frac{2}{k^3}$

On somme de $k = n$ *à* $k = N$ *:* $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{2}{(k+1)^3} \leqslant \int_n^{N+1} \frac{2}{t^3}\, dt$

En faisant tendre N vers $+\infty$, *et en changeant d'indice :* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{2}{t^3}\, dt$

On calcule l'intégrale : $\displaystyle\int_n^A \frac{2}{t^3}\,dt = \left[-\frac{1}{t^2}\right]_n^A = -\frac{1}{A^2} + \frac{1}{n^2}.$

En faisant tendre A vers $+\infty$*, on obtient bien :* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}.$

b: $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2}{k^3} \leqslant \frac{1}{n^2}$

Donc, en posant $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n^3}$*,* u_n *est une valeur approchée de l'intégrale à* $\dfrac{1}{n^2}$ *près.*

On choisit n tel que $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \varepsilon$*, ce qui revient à* $n^2 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ *ou encore* $n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

```
function I=approx(epsilon)
    I=0
    n=floor(1/sqrt(epsilon))+1
    for i=1:n
        I=I+  2 / i^3
    end
    disp(I,'intégrale = ')
endfunction
```

Pour $\varepsilon = 10^{-6}$*, on obtient* $I \simeq 2.4041128$

3.3 Probabilités

Corrigé exercice 58

Entraînement

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt.$

1) *Nommons h la fonction* $t \mapsto e^{-t^2}$*. h est* C^∞ *sur* $\mathbf{R}$ *admet donc une primitive H* C^∞ *sur* $\mathbf{R}$ *et* $f(x) = H(2x) - H(x)$.
f est donc C^∞ *sur* $\mathbf{R}$.
$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} h(t)\,dt.$
Utilisons le changement de variable $u = -t$.
$f(-x) = \displaystyle\int_{u=x}^{u=2x} e^{(-u)^2}\,(-du) = -\int_x^{2x} e^{-u^2}\,du = -f(x)$
Donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$

2) *La fonction h est strictement positive sur* $\mathbf{R}$.
• *Si* $x \geqslant 0$*, les bornes x et 2x sont dans le bon sens, donc, par positivité de l'intégrale,* $f(x) \geqslant 0$.
• *Si* $x < 0$*, les bornes x et 2x sont dans le sens contraire, donc* $f(x) \leqslant 0$.

3) *Si $t > 1$, $t^2 > t$, donc $-t^2 < -t$ et ainsi, $e^{-t^2} < e^{-t}$.*
Si $x > 0$, on intègre avec des bornes dans le bon sens :
$\displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2}\, dt \leqslant \int_x 2xe^{-t}\, dt = -\left[e^{-t}\right]_x^{2x}$. *Donc* $0 \leqslant f(x) \leqslant -e^{-2x} + e^{-x}$.
Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -e^{-2x} + e^{-x} = 0$ *donc, par le théorème d'encadrement :* $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

4) *On a vu que* $f(x) = H(2x) - H(x)$.
$\forall x \in \boldsymbol{R} \qquad f'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff 2e^{-4x^2} > e^{-x^2} \\ &\iff e^{-3x^2} > \frac{1}{2} \\ &\iff -3x^2 > -\ln(2) \\ &\iff x^2 < \frac{\ln(2)}{3} \\ &\iff x \in]-\alpha, +\alpha[\quad \textit{en posant } \alpha = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \end{aligned}$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

On sait déjà, comme f est impaire et de classe C^∞, que f présente un point d'inflexion en 0.
$\forall x \in \boldsymbol{R} \qquad f''(x) = -8xe^{-4x^2} + 2xe^{-x^2} = 2x\left(e^{-x^2} - 4e^{-4x^2}\right)$.

$$\begin{aligned} e^{-x^2} - 4e^{-4x^2} > 0 &\iff e^{-x^2} > 4e^{-4x^2} \\ &\iff e^{3x^2} > 4 \\ &\iff x^2 > \frac{2}{3}\ln(2) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \textit{ possède trois points d'inflexion en } x_0 = 0,\ x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\ln(2)} \textit{ et } x_2 = -x_1}$

5) *Si X est une V.A.R. suivant une loi normale centrée d'écart type σ, sa densité est*
$v(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$.
Posons $g(a) = P(a \leqslant X \leqslant 2a)$.
$g(a) = \displaystyle\int_a^{2a} v(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^{2a} e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt$
On change de variable en posant $x = \dfrac{t}{\sigma\sqrt{2}}$.

$$g(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \int_{x=\sigma a\sqrt{2}}^{x=2\sigma a\sqrt{2}} e^{-x^2} \times \sigma\sqrt{2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma a\sqrt{2}}^{2\sigma a\sqrt{2}} e^{-x^2}\, dx$$
$$g(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} f(\sqrt{2}\sigma a).$$

$$\begin{aligned} g(a) \textit{ maximal} &\iff f(\sqrt{2}\sigma a) \textit{ maximal} \\ &\iff \sqrt{2}\sigma a = \alpha \\ &\iff a = \frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(a \leqslant X \leqslant 2a) \textit{ est maximal pour } a = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\ln(2)}{6}}}$$

Corrigé exercice 59

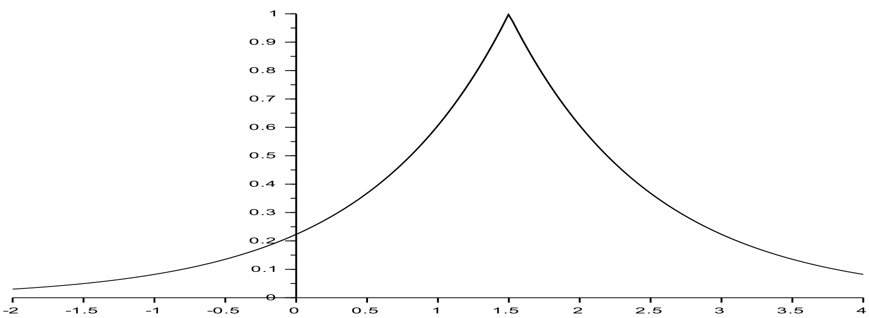
Entraînement

*Pour tout réel m, on note f_m la fonction définie sur **R** par :*

$$f_m(x) = e^{-|x-m|}$$

1) **a:** *On peut accélérer l'étude en posant $t = x - m$. On obtient $f(x) = e^{-|t|}$.*
La fonction $t \mapsto e^{-|t|}$ est paire donc f admet $x = m$ comme axe de symétrie.
*f est continue sur **R**, de casses C^∞ sur $\mathbf{R} - \{m\}$, n'est pas dérivable en $x_0 = m$ (point anguleux avec une demi-tangente de pente -1 à gauche et une demi-tangente de pente 1 à droite.*

b: *Tout a été dit précédemment. On peut directement représenter f_m (avec $m = \frac{3}{2}$ ici) :*



2) **a:** *On peut calculer directement l'intégrale, mais, là aussi on peut accélérer le calcul par changement de variable.*
On pose $u = t - m$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|}\, du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}\, du = 2.$
On utilise ici la parité de $u \mapsto e^{-u}$ et la loi exponentielle de paramètre 1.

b: *A condition d'avoir* $\int_{-\infty}^{+\infty} k.f_m(t)\ dt = 1$, $k.f_m$ *est une densité de probabilité.*

Donc $\boxed{k = \frac{1}{2}}$

c: *Toutes les intégrales intervenant pour les calculs sont du type* $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ dt$ *après changement de variable. Ces intégrales sont convergentes. Donc* X_m *admet des moments de tout ordre et, en particulier, une espérance et une variance.*
$E(X_m) = m$ *pour des raisons de symétrie.*
Posons $Y = |X - m|$. *Soit* G *la fonction de répartition de* Y.
$Y(\Omega) = \boldsymbol{R}^+$.
$G(x) = 0$ *si* $x \leqslant 0$.
Si $x \geqslant 0$,

$$G(x) = P(Y \leqslant x) = P(-x \leqslant X - m \leqslant x) = P(m - x < X < m + x) = \int_{m-x}^{m+x} \frac{1}{2}\, e^{-|t-m|}\ dt$$

On pose $u = t - m$. $G(x) = \int_{u=-x}^{u=x} \frac{1}{2}\, e^{-|u|}\ du = \int_0^x e^{-u}\ du = 1 - e^{-x}$.
On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$.
Donc $E\left[(X-m)^2\right] = E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 1 + 1 = 2$.
Or $V(X) = E((X-m)^2)$ *par définition (première). Donc* $\boxed{E(X) = m \text{ et } V(X) = 2}$.

Pour les moments d'ordre n, cela se complique un peu. Notons X pour X_m *pour simplifier les écritures.*

$$\begin{aligned}
E(X^n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \frac{1}{2} e^{-|t-m|}\ dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (u+m)^n e^{-|u|}\ du \\
&\qquad \text{en utilisant le changement de variable } u = t - m \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^{n-k} u^k e^{-|u|}\ du \\
&= \sum_{k=0}^{n} m^k \times \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} u^k e^{-u}\ du \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} m^{2k} E(Y^{2k}) \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} m^{2k} m^{2k} (2k)!
\end{aligned}$$

On vérifie pour $n = 1$: $E(X) = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{2k} m^{2k}(2k)! = \binom{1}{0} m^0 \times 0! = 1$
On vérifie pour $n = 2$: $E(X^2) = \binom{2}{0} m^0 0! + \binom{2}{2} m^2 (2!) = 1 + 2 = 3$.
Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 3 - 1 = 2$.
Cela semble fonctionner.

d: $X(\Omega) = \boldsymbol{R}$.

$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} e^{|t-m|}\, dt = \int_{-\infty}^{x-m} \frac{1}{2} e^{-|u|}\, du$ *(en utilisant* $u = t - m$*)*

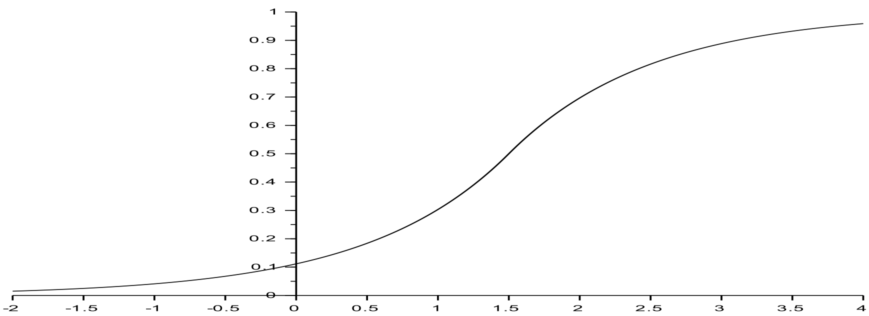
• *si* $x \leqslant m$, $x - m \leqslant 0$ *donc* $F_X(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x-m} e^{u}\, du$ *(car* u *négatif et, donc,* $|u| = -u$*)*

$F_X(x) = \frac{1}{2} e^{x-m}$.

• *si* $x \geqslant m$, $x - m \geqslant 0$ *donc* $F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{0}^{x-m} e^{-u}\, du = \frac{1}{2}(1 - e^{m-x} + 1)$

Donc $F_X(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{m-x}$.

La courbe représentative de F_m*, pour* $m = \frac{3}{2}$ *a cette allure :*



3) **a:** *La probabilité demandée est* $P(X < 20)$ *avec* $m = 20$*, soit* $F_X(20)$.

Donc $\boxed{P(X < 20) = P(X > 20) = \frac{1}{2}}$

b: *On cherche* $P(18 < X < 20)$.

D'après ce qui précède :

$P(18 < X < 22) = F(22) - F(18) = 1 - \frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{-2} = 1 - e^{-2}$

$\boxed{P(18 < X < 22) = 1 - e^{-2}}$

c: *On cherche* $p_c = P_{(X>20)}(X > 21)$.

$$p_c = \frac{P(X > 21 \cap X > 20)}{P(X > 20)} = \frac{P(X > 21)}{P(X > 20)} = \frac{1 - P(X < 21)}{\frac{1}{2}} = e^{-1}.$$

$\boxed{P_{(X>20)}(X > 21) = e^{-1}}$

d: α *vérifie* $P(20 - \alpha < X < 20 + \alpha) \geqslant 0,9$. *Donc* $1 - e^{-\alpha} \geqslant 0,9$ *ou encore* $e^{-\alpha} \leqslant 0,1$.

En composant par ln, cela donne $-\alpha \leqslant -\ln(10)$ *ou encore* $\alpha \geqslant \ln(10)$.

$\boxed{\text{On choisit } \alpha \geqslant \ln(10) \simeq 2,3}$

Corrigé exercice 60

Entraînement

1) *X et Y suivent toutes les deux une même loi $\mathscr{B}(n,p)$ avec $n = 1000$ et $p = 0,001$.*
$E(X) = E(Y) = 1$, $V(X) = V(Y) = 0,999$ *et*
$\forall k \in [\![0,1000]\!] \quad P(X=k) = P(Y=k) = \binom{1000}{k}(0,001)^k(0,999)^{1000-k}$

2) *On a $n > 30$, $p < 0,1$ et $np < 15$ donc on peut approximer X par une loi de Poisson $\mathscr{P}(1)$. Si **GUEPE** perd k navires, elle doit posséder $k \times 10^3$ euros.*
On cherche h tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0,999$.
Or $P(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = e^{-1}\sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!}$
En l'absence de table, on peut se lancer dans un algorithme en Scilab.

```
lambda=1
k=0
p=exp(-lambda)
F=p
while F <0.999
    k=k+1
    p=p*lambda/k
    F=F+p
end
disp(k)
```

Avec $\lambda = 1$, on obtient $k = 5$.
Chaque compagnie devra donc posséder une réserve de 50 millions d'euros

3) *Si les deux compagnies fusionnent, la nouvelle compagnie **FRELON** possède 2000 navires. Si on nomme Z le nombre de navires coulés, $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(2000;0,001)$ que l'on peut approximer par une loi de Poisson $\mathscr{P}(2)$.*
On reprend l'algorithme avec $\lambda = 2$. On trouve $k = 8$.
La nouvelle compagnie devra donc posséder une réserve de 80 millions d'euros. C'est moins que 2 fois 50 millions. De ce point de vue, la fusion est bénéfique.

Corrigé exercice 61

Entraînement

1) *On a $P(R_1) = P(A_1)$ par définition. Pour le calcul, tout dépend de l'urne dans laquelle est effectuée le premier tirage.*
Notons U_k l'événement "on tire dans l'urne k". $(U_k)_{k\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements.

Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(A_1) = P(R_1) &= \sum_{k=0}^{N} P_{U_k}(R_1)\ P(U_k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{N} \times \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{N(N+1)} \sum_{k=0}^{N} k = \frac{1}{N(N+1)} \times \frac{N(N+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On recommence pour $P(A_2)$:

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= \sum_{k=0}^{N} P_{U_k}(A_2)\ P(U_k) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^2 \times \frac{1}{N+1} \\
&= \frac{1}{N^2(N+1)} \sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{1}{N^2(N+1)} \times \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\
&= \frac{2N+1}{6N}
\end{aligned}$$

2) *On note p_n la probabilité $P_{A_n}(R_{n+1})$*

a: $p_1 = P_{A_1}(R_2) = \dfrac{P(R_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \dfrac{\frac{2N+1}{6N}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2N+1}{3N}.$

$$\boxed{p_1 = \frac{2N+1}{6N}}$$

b: *En utilisant la même stratégie de calcul que dans la question 1 :*

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n \times \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0} N \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

$$\begin{aligned} p_n &= P_{A_n}(R_{n+1}) = \frac{P(R_{n+1} \cap A_n)}{P(A_n)} \\ &= \frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)} \\ &= \frac{\dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}} \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}} \end{aligned}$$

3) *C'est n qui tend vers $+\infty$ dans cette question, N étant fixé.*

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{k}{N}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in [\![0, N-1]\!] \\ 1 & \text{si } k = N \end{cases}$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1}$

4) *Cette fois, on fixe n et on fait tendre N vers $+\infty$.*

Regardons l'expression $A_N = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

On peut déjà remarquer que $A_N = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

On reconnaît une formule dite des rectangles : $R'_N = \dfrac{b-a}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right)$

avec ici $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = x^n$.

f est continue sur $[a,b]$. Le cours permet d'affirmer que

$\lim\limits_{N\to+\infty} R'_N = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{N+1}$.

De même, en posant $B_N = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}$*, on obtient* $\lim\limits_{N\to+\infty} B_N = \dfrac{1}{n+2}$.

Or p_n peut s'écrire $p_n = \dfrac{\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n+1}}{\dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^{n}}$ *et converge donc vers* $\dfrac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}$.

Donc $\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} p_n = \dfrac{n+1}{n+2}}$

On peut vérifier la cohérence de ce résultat avec l'expression de p_n trouvée dans la question 1).

Corrigé exercice 62

Entraînement (court)

X_n est le nombre de succès d'une expérience répété n fois de façon indépendante, le succès étant "le bulletin tiré est pour A".
Donc $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad E(X_n) = np$ *et* $V(X_n) = np(1-p)$.
En posant $f(x) = x(1-x)$, une étude rapide des variations de f sur $[0,1]$ permet d'affirmer :
$\forall x \in [0,1] \quad 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$. *Donc* $V(X_n) \leqslant \frac{n}{4}$.
En conséquence, $E(Y_n) = p$ *et* $V(Y_n) = \frac{p(1-p)}{n} \leqslant \frac{1}{4n}$.

On note $Y_n = \frac{X_n}{n}$ *et* $u_n = P(|Y_n - p| > 0,01)$.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $u_n \leqslant \frac{V(Y_n)}{(0,01)^2} = \frac{V(Y_n)}{10^{-4}}$,
donc $u_n \leqslant \frac{10^4}{2n}$.
On aura donc $u_n \leqslant a$ *dès que* $\frac{10^4}{4n} \leqslant a \quad (i)$.
Or $(i) \iff 4na \geqslant 10^4 \iff n \geqslant \frac{10^4}{4a}$.
En prenant $a = 0,1$ *cela donne* $n \geqslant \frac{10^4}{4.10^{-1}} = \frac{10^5}{4} = 25000$.

Corrigé exercice 63

HEC 1999 oral voie E

Soit a et b appartenant à $]0,1[$. *On pose* $M = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{2} & \frac{1-a}{2} \\ \frac{1-b}{2} & \frac{1+b}{2} \end{pmatrix}$.

Soit $f \in \mathscr{L}(\boldsymbol{R}^2)$ *dont la matrice relativement à la base canonique est M.*

1) *u est invariant par si et seulement si* $f(u) = u$. *Prenons* $u = (x,y)$ *et posons* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} f(u) = u &\iff MX = X \\ &\iff (M-I)X = 0 \\ &\iff (S) \quad \begin{pmatrix} \frac{a-1}{2} & \frac{1-a}{2} & | & 0 \\ \frac{1-b}{2} & \frac{b-1}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff (S) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{car } a \neq 1 \textit{ et } b \neq 1 \\ &\iff x = y \quad x \in \boldsymbol{R} \end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Les vecteurs invariants de } f \textit{ sont } u=(x,x),\ x\in\mathbb{R}, \textit{ c'est à dire } Vect(v) \textit{ avec } v=(1,1)}$

2) *On sait déjà que* 1 *est valeur propre. On devine, si on connaît la propriété de la trace, (ou on calcule) que* $\lambda=\dfrac{a+b}{2}$ *est l'autre valeur propre.*

$$\begin{aligned}
f(u)=\lambda u &\iff (M-\lambda I)X=0\\
&\iff (S)\quad \begin{pmatrix} \frac{1-b}{2} & \frac{1-a}{2} & | & 0\\ \frac{1-b}{2} & \frac{1-a}{2} & | & 0\end{pmatrix}\\
&\iff (S)\quad \begin{pmatrix}1-b & 1-a & | & 0\end{pmatrix}\\
&\iff x=\frac{a-1}{1-b}\,y \quad y\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Donc $u=(a-1,1-b)t \quad t\in\mathbb{R}$.
Le sous espace propre associé à $\lambda=\dfrac{a+b}{2}$ *est* $vect(w)$ *avec* $w=(a-1,1-b)$.

Avec $a=\dfrac{1}{3}$ *et* $b=\dfrac{2}{3}$, $M=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$. *On a la réduction suivante :*

$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $M=P\,DP^{-1}$ *avec* $P=\begin{pmatrix}1 & -\frac{2}{3}\\ 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Avec un peu de courage et un petit temps de calcul, on obtient classiquement :

$$\boxed{M^n=P\,D^nP^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{1}{3(2^{n-1})} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3(2^n)}\\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3(2^n)} & \frac{2}{3}-\frac{1}{3(2^n)}\end{pmatrix}}$$

3) *Notons* R_n *l'événement "le castor est sur la rive après n tentatives" et* I_n *"le castor est sur l'île après n tentatives".*
Notons également $r_n=P(R_n)$, $i_n=P(I_n)$ *et* $L_n=(r_n,i_n)$.
(R_n,I_n) *est un système complet d'événements. La formule des proba totales donne :*

$P(R_{n+1})=P_{R_n}(R_{n+1})P(R_n)+P_{I_n}(R_{n+1})P(I_n)=\dfrac{2}{3}P(R_n)+\dfrac{1}{6}P(I_n)$

$P(I_{n+1})=P_{R_n}(I_{n+1})P(R_n)+P_{I_n}(I_{n+1})P(I_n)=\dfrac{1}{3}P(R_n)+\dfrac{5}{6}P(I_n)$

On remarque donc que $\quad \begin{pmatrix}r_{n+1} & i_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_n & i_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$

On a donc $L_{n+1}=L_n\times M$.
Par une récurrence facile, on montre que $\quad L_n=L_0M^n$.

Or $L_0 = (0,1)$ donc L_n est la deuxième ligne de M^n et, en particulier, $\boxed{i_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3(2^n)}}$

Il n'y a plus qu'à regarder ce que cela donne pour $n = 2$ puis pour $n = 30+20 = 50$.

Corrigé exercice 64

Entraînement

Remarque initiale : le résultat admis en préambule est un résultat classique, qui se démontre sans trop de difficulté par récurrence, ou en faisant appel à la loi binomiale négative. On retrouvera des justifications de cette formule dans d'autres exercices. Se pencher sur une démonstration est donc un bon entraînement.

1) *Notons A_1 l'événement "avoir au moins un enfant" et E_n l'événement "avoir exactement n enfants".*

$A_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ *(réunion disjointe).*

Donc $P(A_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{p}{1-p}$.

Par passage à l'événement contraire, $q_0 = 1 - \frac{1}{2}\,\frac{p}{1-p} = \frac{2-3p}{2(1-p)}$.

Donc $\boxed{q = \frac{1}{2}\,\frac{p}{1-p} \text{ et } q_0 = \frac{2-3p}{2(1-p)}}$

2) *Soit n un entier donné ($n \geqslant 1$) et k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.*

On note G la variable aléatoire donnant le nombre de naissances de garçons. Sachant E_n, G compte un nombre de succès dans une suite de n expériences identiques, répétées de façon indépendante. Donc $G_{E_n} \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. On cherche donc $P_{E_n}(G=k)$.

$P_{E_n}(G=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On conclut $\boxed{P_{E_n}(G=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{si } k \leqslant n \end{cases}}$

3) *On cherche maintenant $P(G=k)$.*

Comme il faut envisager toutes les éventualités E_n, on utilise la formule des proba-

bilités totales.

$$\begin{aligned}
P(G=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{E_n}(G=k)\times P(E_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P_{E_n}(G=k)\times P(E_n)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{p^n}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{2}\right)^n\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^k}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{p^k}{(2-p)^{k+1}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\times 2^{k+1}\\
&= \left(\frac{p}{2-p}\right)^k\times\frac{1}{2-p}
\end{aligned}$$

On conclut $\quad \forall k\in \boldsymbol{N}^* \qquad P(G=k)=\left(\frac{p}{2-p}\right)^k\times\frac{1}{2-p}$

4) *Pour* $k=0$, $P_{E_n}(G=0)$ *vaut* $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *si* $n>0$ *et vaut* 1 *si* $n=0$. *Donc*

$$\begin{aligned}
P(G=0) &= 1\times P(E_0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\frac{p^n}{2}\\
&= \frac{2-3p}{2(1-p)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{2}\right)^n\\
&= \frac{2-3p}{2(1-p)}+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{p}{2}}{1-\frac{p}{2}}\\
&= \frac{2-3p}{2(1-p)}+\frac{1}{2}\,\frac{p}{2-p}\\
&= \frac{(2-3p)(2-p)+(1-p)p}{2(2-p)(1-p)}\\
&= \frac{2p^2-7p+4}{2(2-p)(1-p)}
\end{aligned}$$

Pour nous assurer de nos calculs, nous pouvons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(G=n) = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} P(G=n) &= \frac{2p^2-7p+4}{2(2-p)(1-p)} + \frac{1}{2-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p}{2-p}\right)^n \\
&= \frac{2p^2-7p+4}{2(2-p)(1-p)} + \frac{1}{2-p}\,\frac{\frac{p}{2-p}}{1-\frac{p}{2-p}} \\
&= \frac{2p^2-7p+4}{2(2-p)(1-p)} + \frac{1}{2-p}\,\frac{p}{2-p}\times\frac{2-p}{2-2p} \\
&= \frac{2p^2-7p+4}{2(2-p)(1-p)} + \frac{p}{2(2-p)(1-p)} \\
&= \frac{2p^2-6p+4}{2(2-p)(1-p)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ouf ! ! on peut donc conclure $\boxed{P(G=0) = \dfrac{2p^2-7p+4}{2(2-p)(1-p)}}$

Corrigé exercice 65

Entraînement

1) *On pose* $X = N+1$. *L'énoncé dit que* X *suit une loi géométriques de paramètre* p.
Donc $E(X) = \dfrac{1}{p}$ *et* $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
Donc $E(N) = E(X-1) = E(X) - 1 = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p}$ *et* $V(N) = V(X-1) = V(X)$.
Donc $\boxed{E(N) = \dfrac{1-p}{p} \text{ et } V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}}$

2) $P(N=10) = P(X=11) = P(1-p)^{10}$.
On cherche donc p *pour que la fonction* f *définie par* $f(p) = p(1-p)^{10}$ *soit maximum quand* $p \in [0,1]$.
$f'(p) = -10p(1-p)^9 + (1-p)^{10} = (1-p)^9\,(1-p-10p) = (1-p)^9(1-11p)$

p	0		$\frac{1}{11}$		1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Donc $\boxed{P(N=10) \text{ est maximum quand } p = \dfrac{1}{11}}$

3) *Désignons les événements :*
A_3 = "obtenir un fruit mur". M="le fruit est mangé avant maturation". F="la fleur donne un fruit".
La traduction des hypothèses de l'énoncé est : $P_F(M) = \frac{1}{4}$, $P(F) = \frac{2}{3}$.
On cherche $P(A_3)$.
On peut dire que $A_3 = F \cap \overline{M}$.
Donc $P(A_3) = P(F \cap \overline{M} = P_F(\overline{M})P(F) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

4) *Notons A l'événement $N = n$ et B l'événement "r fruits sont arrivés à maturation".*
On cherche $P_B(A)$.
On utilise le procédé de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$.
Or $P_A(B) = \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ *(schéma binomial classique) et* $P(A) = p(1-p)^n$ *donc*

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{n=r}^{+\infty} P_{(N=n)}(B)P(N=n) \\
&= \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \\
&= p\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r}\left(\frac{1-p}{2}\right)^n \\
&\qquad \text{on utilise la formule du binôme négative (cf exercice précédent)} \\
&= p\,\frac{\left(\frac{1-p}{2}\right)^r}{\left(1-\frac{1-p}{2}\right)^{r+1}} \\
&= p\,\frac{(1-p)^r}{(1+p)^{r+1}} \times 2 \\
&= \frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^r
\end{aligned}$$

La proba cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
P_B(A) &= \frac{\binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n}{\frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^r} \\
&= \binom{n}{r}\left(\frac{1-p}{2}\right)^n\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^r(1+p) \\
&= \binom{n}{r}\frac{1-p)^{n-r}(1+p)^{r+1}}{2^n}
\end{aligned}$$

Corrigé exercice 66

Entraînement

On réfléchit à la loi du couple (X,Y), ce qui permettra de répondre aux questions 1, 2 et 3.

$Y\backslash X$	0	1	*loi marginale de Y*
0	a	b	q
1	c	d	p
loi marginale de X	q	p	

1) *Ce tableau a un sens si et seulement si* $\begin{cases} a+b &= q \\ c+d &= p \\ a+c &= q \\ b+d &= p \end{cases}$.

2) *Les conditions précédentes s'identifient bien à une partie de l'ensemble des solutions du système linéaire suivant d'inconnues a,b,c,d :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \\ q \\ p \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

3) *Dans le cas de l'indépendance, on a $a = q^2$, $b = c = pq$ et $d = p^2$.*
Donc $\boxed{(p^2, pq, qp, p^2) \text{ est une solution particulière de } (\star)}$

4) *Si X et Y sont constantes égales à 1, on obtient la solution $(0,0,0,1)$. Le système $(\star)$ admet donc plusieurs solutions. Ce n'est pas un système de Cramer donc la matrice A du système n'est pas inversible.*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *On fait $L_2 \leftrightarrow L_4$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$*

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *On peut éliminer la ligne L_4, puis passer d en paramètre.*

On obtient sans problème $\boxed{\ker(A) = \{(d, -d, -d, d) \ / d \in \mathbf{R}\}}$

5) *On se souvient que l'on obtient l'ensemble des solutions du système $(\star)$ en ajoutant une solution particulière aux éléments du noyau. Donc $\mathscr{S}$ est l'ensemble des quadruplets $(q^2 + \lambda, pq - \lambda, pq - \lambda, p^2 + \lambda)$, avec $d \in \mathbf{R}$ tel que les quatre éléments du triplet soient dans $[0,1]$.*

6) *$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) =$*
Or $E(X) = E(Y) = p$, $E(XY) = d = p^2 + \lambda$ donc $Cov(X,Y) = (p^2 + \lambda) - p^2 = \lambda$.
Donc $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dfrac{\lambda}{pq} = \dfrac{\lambda}{p(1-p)}$.
On sait que $|\rho(X,Y)| \leqslant 1$, cela impose la condition : $|\lambda| \leqslant p(1-p)$

7) *On suppose ici $p = q = \dfrac{1}{2}$. Donc* $\mathscr{S} = \left\{ \left(\dfrac{1}{4} + \lambda, \dfrac{1}{4} - \lambda, \dfrac{1}{4} - \lambda, \dfrac{1}{4} + \lambda \right) \right\}$.
On a donc $\lambda \leqslant \dfrac{3}{4}$, $\lambda \leqslant \dfrac{1}{4}$, $\lambda \geqslant -\dfrac{1}{4}$ et $\lambda \geqslant -\dfrac{3}{4}$, soit $\lambda \in \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4} \right]$

Comme $\rho(X,Y) = \dfrac{\lambda}{\frac{1}{4}} = 4\lambda$, *on a donc* $\boxed{r_{min}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1}$

D'une manière générale, les conditions sur λ *s'écrivent :*
$0 \leqslant q^2+\lambda \leqslant 1$ *donc* $-q^2 \leqslant \lambda \leqslant 1-q^2$ *et* $0 \leqslant pq-\lambda \leqslant 1$
donc $pq-1 \leqslant \lambda \leqslant 1-p^2$ *et par symétrie* $-p^2 \leqslant 1-p^2$.

Donc $\boxed{r_{min}(p) = \dfrac{1}{p(1-p)} \times \min(pq-1,-q^2,-p^2)}$

Corrigé exercice 67

HEC 1999 oral voie E

1) *Traduisons l'événement* $M_n \leqslant x$. *Il signifie que, sur les* $2n+1$ *valeurs des* X_i, *au moins* $n+1$ *de ces valeurs sont inférieures à x, donc k valeurs des* X_i *sont inférieures à x, avec* $k = n+1$ *ou* $k = n+2$ *ou ...* $k = 2n+1$.

Donc $P(M_n \leqslant x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} \underbrace{\binom{2n+1}{k}}_{\text{choix des } k\ X_i} \underbrace{x^k}_{k \text{ sont inférieures à } x} \underbrace{(1-x)^{2n+1-k}}_{\text{les autres sont plus grandes que } x}$

$$\boxed{P(M_n \leqslant x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}}$$

2) *On peut considérer un exemple pour mieux comprendre, avec ici* $n = 2$.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
$0,1$	$0,3$	$0,7$	$0,8$	$0,9$

Ce tableau donne $M_2 = 0,7$. *Transformons le tableau avec les* X'_i.

X'_1	X'_2	X'_3	X'_4	X'_5
$0,9$	$0,8$	$0,7$	$0,3$	$0,1$

On obtient ici $M'_2 = 0,3$. *On est prêt à généraliser.*
En considérant les variables $X'_k = 1 - X_k$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, X'_k *suit aussi une loi uniforme sur* $[0,1]$.
Soit M'_n *la médiane des* X'_k. *On a* $M'_n = 1 - M_n$. *Et* M'_n *a même loi que* M_n.
Donc $E(M'_n) = E(M_n) = 1 - E(M_n)$. *On a bien* $E(M_n) = \dfrac{1}{2}$.

3) *Sous réserve que l'on ait prouvé que* M_n *soit une variable à densité et d'absolue convergence de l'intégrale,* $E(M_n) = \displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ *où* f *est une densité de* M_n.
Posons $u'(x) = f(x)$ *donc* $u(x) = F(x)$, $v(x) = x$ *donc* $v'(x) = 1$.
En supposant que f *soit contine sur* $[0,1]$ *(ce qui n'est pas difficile à justifier), u et*

v sont C^1 sur $[0,1]$ et on peut donc intégrer par parties.

$$\begin{aligned} E(M_n) &= \int_0^1 xf(x)\,dx = \Big[xF(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 F(x)\,dx \\ &= F(1) - \int_0^1 F(x)\,dx = 1 - \int_0^1 F(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (1-F(x))\,dx \\ &= \int_0^1 P(M_n > x)\,dx \end{aligned}$$

C'est le résultat attendu.

4) **a:** *Voilà une question classique et récurrente. Posons*

$$I_{k,m} = \int_0^1 x^k (1-x)^{m-k}\,dx$$

On intègre par parties en posant $u(x) = x^k$ et $v'(x) = (1-x)^{m-k}$, donc $u'(x) = kx^{k-1}$ et $v(x) = -\frac{1}{m-k+1}x^{m-k+1}$

$I_{k,m} = \underbrace{\left[-\frac{1}{m-k+1}x^k(1-x)^{m-k+1}\right]_0^1}_{=0} + \frac{k}{m-k+1}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{m-k+1}\,dx$

Donc

$$I_{k,m} = \frac{k}{m-k+1} I_{k-1,m}$$

On réitère le procédé :

$I_{k,m} = \frac{k}{m-k+1} \times \frac{k-1}{m-k+2} \times \ldots \times \frac{1}{m} \times I_{0,m}$

Or $I_{0,m} = \int_0^1 (1-x)^m\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{m+1}}{m+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Donc $I_{k,n} = \frac{1}{n+1}\underbrace{\frac{k \times (k-1) \times \ldots \times 1}{m \times (m-1) \times \ldots \times (m-k+1)}}_{k \text{ termes en haut et en bas}} = \frac{1}{(n+1)\binom{m}{k}}$

On retiendra ce résultat $\boxed{I_{k,m} = \frac{1}{(m+1)\binom{m}{k}}}$

b: *On reprend la formule établie en 3).*

$$\begin{aligned}
E(M_n) &= \int_0^1 (1-P(M_n \leqslant x))\,dx \\
&= \int_0^1 \left(1-\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}x^k(1-x)^{2n+1-k}\right)dx \\
&= 1-\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{\binom{2n+1}{k}}{(2n+2)\binom{2n+1}{k}} \\
&= 1-\sum_{k=n+1}^{2n+1}\frac{1}{2n+2} \\
&= 1-\frac{1}{2n+2}\sum_{k=n+1}^{2n+1}1 \\
&= 1-\frac{1}{2n+2}\times(n+1) \\
&= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a bien retrouver, par un calcul, la valeur de l'espérance de M_n.

Corrigé exercice 68

HEC 2001 oral voie E

1) *Après la première expérience, un seul jeton est susceptible de changer de numéro. Donc $X_1(\Omega)=\{2,3\}$.*
$X_1=3$ signifie que l'on a tiré au hasard le même numéro que celui du jeton tiré.
Donc $P(X_1=3)=\dfrac{1}{3}$ et en conséquence $P(X_1=2)=\dfrac{2}{3}$.
X_1-2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$ donc $E(X_1-2)=\dfrac{1}{3}$, $E(X_1)=\dfrac{7}{3}$.

2) *C'est une chaîne de Markov assez classique.*

$$\begin{aligned}
p_{n+1}=P(X_{n+1}=1) &= P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)P(X_n=1)+P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)P(X_n=2) \\
&\quad +P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)P(X_n=3) \\
&= \frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}P(X_n=2)+0 \\
&= \frac{1}{3}p_n+\frac{1}{9}q_n
\end{aligned}$$

On procède de même pour les deux autres.

3) **a:** $q_{n+1}=\dfrac{1}{9}(6p_n+6q_n+6r_n)=\dfrac{2}{3}(p_n+q_n+r_n)=\dfrac{2}{3}$

$\boxed{(q_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est la suite constante égale à } \dfrac{2}{3}}$

b: *On a donc, pour $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{27}$.*
C'est une suite arithmético-géométrique.
Soit α un point fixe, $p_{n+1} - \alpha = \frac{1}{3}(p_n - \alpha)$. La suite $(p_n - \alpha)$ est géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $p_1 - \alpha = -\alpha$ car $p_1 = 0$.
$p_n - \alpha = \frac{1}{3^{n-1}}(-\alpha)$ ou encore $p_n = \alpha\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$.
Reste à déterminer α. Il vérifie $\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{27}$ donc $\alpha = \frac{1}{9}$.
On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad p_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) \text{ et } p_0 = 0}$

c: *On peut utiliser la relation $p_n + q_n + r_n = 1$ donc, pour $n \in \mathbf{N}$:*
$r_n = 1 - p_n - q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$ $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad r_n = \frac{1}{9}\left(2 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)}$

d: $E(X_n) = p_n + 2q_n + 3r_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) + \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$.
$E(X_n) = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} + 12 + 6 + 3\frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{9}\left(19 + \frac{2}{3^{n-1}}\right)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad E(X_n) = \frac{1}{9}\left(19 + \frac{2}{3^{n-1}}\right) \text{ et } E(X_0) = 3}$$

On peut vérifier que, pour $n = 1$, on retrouve $E(X_1) = \frac{7}{3}$.

4) **a:** *Dire que 1 est valeur propre et X vecteur propre associé revient à dire que $AX = X$. C'est un état stable pour lasuite vectorielle $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$.*
La suite (q_n) est tout le temps stable avec $q_n = \frac{2}{3}$. La suite (p_n) est stable pour $p_n = \alpha = \frac{1}{9}$. S'il y a un état stable ce serait avec $r_n = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$. Cela donne le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 6/9 \\ 2/9 \end{pmatrix}$
On vérifie facilement que $AX_1 = X1$ si $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre associé}}$$

b: *En posant $X_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que $AX_2 = \frac{1}{3}X_2$. Donc $\frac{1}{3}$ est valeur propre et X_2 est un vecteur propre associé.*

On vérifie facilement que, si $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $AX_3 = 0$. *Donc A n'est pas inversible,* 0 *est valeur propre et* X_3 *est un vecteur propre associé.*

5) *A admet trois valeurs propres distinctes, donc A est diagonalisable, semblable à* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et vérifie* $A = PDP^{-1}$ *avec* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On utilise D^n *pour calculer* A^n *avec* $A^n = PD^nP^{-1}$.
Et enfin , on a $X_n = A^nX_0$. X_n *est donc la troisième colonne de* A^n.

Corrigé exercice 69

HEC 2002 oral voie E

1) *Si X est une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$, $(X > k)$ *signifie que les k premiers résultats sont des échecs. Donc* $P(X > k) = q^k$, *en notant* $q = 1 - p$.
$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{=\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p} = E(X)$.
C'est ce qu'il fallait retrouver.

2) *Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{N}$, *possédant une espérance.*

a: *Pour tout entier k,* $(Y > k) \cup (Y = k) = (Y \geqslant k) = (Y > k-1)$. *Comme la réunion est disjointe,* $P(Y > k) + P(Y = k) = P(Y > k-1)$. *Autrement dit :*

$$\forall k \in \mathbf{N} \qquad P(Y = k) = P(Y > k-1) - P(Y > k)$$

Cette égalité va nous donner une clé pour justifier la formule demandée.

$$\begin{aligned}
E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(Y = k) &= \sum_{k=0}^{n} kP(Y > k-1) - kP(Y > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(Y > k-1) - \sum_{k=1}^{n} kP(Y > k) \\
&\quad \textit{on pose } i = k-1 \textit{ dans la première somme, puis } k = i \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(Y > k) - \sum_{k=1}^{n} kP(Y > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} P(Y > k)(k+1-k) + P(Y > 0) - nP(Y > n) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} P(Y > k) + P(Y > 0)} - nP(Y > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(Y > k) - P(Y > n) - nP(Y > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(Y > k) - (n+1)P(Y > n)
\end{aligned}$$

C'est la formule attendue.

b: *Par hypothèse, $E(Y)$ existe, donc la série* $\sum_{k=0}^{+\infty} kP(Y=k)$ *est absolument convergente, donc convergente.*
dsp $\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(Y=k)$ *est le reste d'ordre n de cette série convergente, donc il tend vers* 0. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(Y=k) = 0}$

c: $P(Y>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Y=k)$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(Y=k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} (n+1)P(Y=k) = (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(Y=k)$$

Donc $0 \leqslant (n+1)P(Y>n) \leqslant \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(Y=k)}_{\to 0}$.

Par le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} (n+1)P(Y>n) = 0$

et donc $E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y>k)$.

3) *Si X est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre* λ,
$\forall t \in \boldsymbol{R}^+ \quad P(X>t) = 1-F(t) = 1-(1-e^{\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.
Toujours en utilisant la loi exponentielle (on peut aussi refaire le calcul rapidement) :
$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda} = E(X)$. *On a donc bien* $\qquad E(X) = \int_0^{+\infty} P(X>t)\, dt$.

4) *Soit Y une variable possédant une densité notée f nulle sur* $]-\infty, 0[$. *On suppose que Y possède une espérance.*

a: *On note F la fonction de répartition de Y.*
Pour tout réel positif T, posons $I(T) = \int_0^T P(X>T)\, dt$.
$I(T) = \int_0^T (1-F(t))\, dt = \int_0^T 1\, dt - \int_0^T F(t)\, dt = T - J(T)$ *en posant* $J(T) = \int_0^T F(T)\, dt$.
On pose $u(t) = F(t)$ *et* $v'(t) = 1$ *donc* $F'(t) = f(t)$ *et* $v(t) = t$.
u et v sont C^1 *sur* $[0,T]$, *on peut donc intégrer* $J(T)$ *par parties :*
$J(T) = \Big[tF(t)\Big]_0^T - \int_0^T tf(t)\, dt = TF(T) - \int_0^T tf(t)\, dt$.
Donc $I(T) = T - TF(T) + \int_0^T tf(t)\, dt = T(1-F(T)) + \int_0^T tf(t)\, dt$.
Donc $I(T) = TP(Y>T) + I(T)$.
Autrement dit $\qquad I(T) = -TP(Y>T) + I(T)$, *ce qui est la formule attendue.*

b: $\int_0^{+\infty} tf(t)\, dt$ *est absolument convergente car Y admet une espérance.*
Donc en posant $C(T) = \int_T^{+\infty} tf(t)\, dt$, $\lim_{T\to+\infty} C(T) = 0$.

Or $C(T) \geqslant T \int_T^{+\infty} f(t)\, dt \geqslant 0.$
Donc, par le théorème d'encadrement, $\lim_{T\to+\infty} C(T) = 0$ ***c.q.f.d.***

c: *On a donc* $\lim_{T\to+\infty} \int_0^T t f(t)\, dt = E(Y) = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T P(Y > t)\, dt.$
On a bien l'égalité : $E(Y) = \int_0^{+\infty} P(X > t)\, dt$

Corrigé exercice 70

HEC 2005 oral voie E

1) *En envisageant la parité de X, on obtient immédiatement*
$[Y = 0] = (X = 0) \cup (X = 1)$ *(réunion disjointe).*
Donc $P(Y = 0) = P(X = 0) + P(X = 1)$.
En reprenant la même distinction des cas de parité, pour chaque $k \in \mathbf{Z}$,
$[Y = k] = (X = 2k) \cup (X = 1 - 2k)$.
Donc $P(Y = k) = P(X = 2k) + P(X - 1 - 2k)$.

2) *Soit* $p \in]0, 1[$. *On suppose que la loi de X est donnée par :*

$$\forall k \in \mathbf{N}, \qquad P(X = k) = p(1 - p)^k$$

• *Si* $k = 0$: $P(Y = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = p + p(1 - p) = p(2 - p)$
• *Si* $k > 0$: $(X = 1 - 2k)$ *est impossible, donc* $P(Y = k) = P(X = 2k) = p(1 - p)^{2k}$.
• *Si* $k < 0$: $(X = 2k)$ *est impossible donc* $P(Y = k) = P(X = 1 - 2k) = p(1 - p)^{1-2k}$.

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=-\infty}^{k=-1} kp(1-p)^{1-2k} + 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^2 n \\
&\qquad \textit{on pose } n=-k \textit{ dans la première série} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} -np(1-p)^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} np\left((1-p)^{2n} - (1-p)^{2n-1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{2n-1}(1-p-1) \\
&= -p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1}(1-p) \quad \textit{en posant } u=(1-p)^2 \\
&= -p^2(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} nu^{n-1} \\
&= -p^2(1-p) \times \frac{1}{(1-u)^2} = -p^2(1-p)\frac{1}{[1-(1-p)^2]^2} \\
&= -p^2(1-p) \times \frac{1}{(1-1+p)^2(1+1-p)^2} \\
&= -p^2(1-p) \times \frac{1}{p^2(2-p)^2} \\
&= -\frac{1-p}{(2-p)^2}
\end{aligned}
$$

Corrigé exercice 71

HEC 2005 oral voie E

1) $X(\Omega) = [\![2,n]\!]$.
Notons U_i le résultat du i-eme tirage.
$X=2$ signifie que l'on tire au 2-eme tirage un numéro plus grand que celui tiré au 1-er.
On envisage toutes les éventualités pour le 1-er tirage et on utilise la formule des

probas totales avec le système complet d'événements $(U_1 = k)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= \sum_{k=1}^{n} P_{(U_1=k)}(U>k)P(U_1=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{n}\frac{1}{n} \\
&\qquad \text{on pose } i = n-k \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

Généralisons. On considère l'événement $X > k$*. Il signifie que la suite des éléments de* 1 *à* k *est strictement décroissante.*
$P(X > k)$ *est donc le quotient du nombre de suites strictement décroissantes à* k *éléments pris dans* $[\![1,n]\!]$*, sur le nombre de suites à* k *éléments pris dans* $[\![1,n]\!]$.
Reste à dénombrer. Pour le numérateur, on choisit les k *nombres distincts (* $\binom{n}{k}$ *choix possibles) et on les ordonne en sens décroissant (*1 *possibilité). Pour le dénominateur, c'est simple, il y a* n^k *possibilités au total.*
Donc $P(X>k) = \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.
Cherchons maintenant $P(X = k)$.
$(X>k)\cup(X=k) = (X\geqslant k) = (X > k-1)$*, donc*
$P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k) = \dfrac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.
On vérifie pour $k = 2$.

$$\frac{\binom{n}{1}}{n^1} - \frac{\binom{n}{2}}{n^2} = 1 - \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} = 1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$$

2) *La formule donnée va nous rendre un grand service.*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \qquad or \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k>n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{k}{n}}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

On sait bien, en passant par les log, que $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

Donc $\boxed{E(X) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} E(X) = e}$

Corrigé exercice 72

Entraînement (court)

1) $X_k(\Omega) = \{0,1\}$.
$(X_k = 1)$ *signifie que le k-ème jeton est dans la boite numéro k.*
Procédons par dénombrement. Ω *est l'ensemble des suites* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *où* x_j *est le numéro de la boite où l'on met le jeton numéro* j. $Card(\Omega) = n!$.
$Card(X_k = 1) = (n-1)!$, *en effet, on met le jeton k en boite k et, pour le reste, on fait comme on veut.*
Donc $P(X_k = 1) = \dfrac{Card(X=k)}{Card(\Omega)} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Donc $\boxed{X_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{n}\right) \quad E(X_k) = \frac{1}{n} \text{ et } V(X_k) = \frac{n-1}{n^2}}$

2) *Notons* $Z = X_iX_j$. $Z(\Omega) = \{0,1\}$ *et* $Z = 1 \Longleftrightarrow X_i = 1$ *et* $X_j = 1$.
On procède encore par dénombrements. $Card((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = (n-2)!$.
En effet, on place le jeton i dans la boite i, le jeton j dans la boite j puis le reste comme on veut. Donc $P(Z=1) = \dfrac{Card(X_i = 1 \cap X_j = 1)}{Card(\Omega)} = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

Donc $\boxed{X_iX_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right)}$

3) *Commençons par le calcul simple de l'espérance X.*

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Pour le calcul de la variance : $V(X) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} Cov(X_i, X_j)$

Il nous faut calculer $Cov(X_i, X_j)$ *pour* $i \neq j$.

On a $Cov(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_k) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$.

Dans la double somme $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$, *on somme donc une constante, et cela* $\binom{n}{2}$ *fois.*

Donc $V(X) = n \times \frac{n-1}{n^2} + 2 \times \binom{n}{2} \times \frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{n^2(n-1)}$

Donc $V(X) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$

On peut conclure $\boxed{E(X) = 1 \text{ et } V(X) = 1}$ *étonnant, non ?*

Corrigé exercice 73

Entraînement (court)

On considère la fonction Scilab suivante :

```
function y=X(m)
    N:=floor(1+m*rand())
    y=0
    for i =1:N
      y=y+floor(2*rand())
   end
endfunction
```

On fixe $m \in \mathbb{N}^*$.

1) *Nous reconnaissons la simulation classique de la loi uniforme discrète sur* $[\![1, m]\!]$.

Ainsi $\boxed{N \hookrightarrow \mathscr{U}_{[\![1,m]\!]}}$

$X = \sum_{i=1}^{N} Z_i$ *avec* $Z_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. *Donc, si on connaît la valeur de N, X varie de* 0 *à N. Donc, comme N varie lui même ente* 0 *et m,* $\boxed{X(\Omega) = [\![0, m]\!]}$

Sachant $N = k$, *X suit une loi binomiale* $\mathscr{B}\left(k, \frac{1}{2}\right)$ *comme somme de k Bernoulli indépendantes.*

Donc $P_{(N=k)}(X = i) = \binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} = \binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Pour déterminer $P(X=i)$, pour $i \in [\![0,m]\!]$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $(N=k)_{k\in[\![1,m]\!]}$.

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{k=1}^{m} P_{(N=k)}(X=i) \times P(N=k) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

2) $E(X) = \sum_{i=0}^{m} iP(X=i) = \sum_{i=0}^{m} i \times \left(\frac{1}{m}\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$.
On sent qu'il faut réorganiser la double sommation.
$E(X) = \sum_{0\leqslant i\leqslant k\leqslant m} \frac{i}{m}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{i}{m}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$
En principe, le calcul peut maintenant avancer :
$E(X) = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m2^k}\left(\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i}\right)$.
Cette dernière somme est assez classique. On peut la simplifier en dérivant le polynôme $P(x) = (1+x)^n$ écrit sous deux formes (forme initiale et forme développée avec la formule du binôme).
On obtient facilement : $\sum_{i=0}^{k} i\binom{k}{i} = k2^{k-1}$. *D'où :*

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m2^k}\times k2^{k-1} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\frac{k}{2} \\ &= \frac{1}{M}\times\frac{1}{2}\times\frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

On peut conclure $\boxed{E(X) = \frac{m+1}{4}}$

Corrigé exercice 74

Entraînement (court)

1) *Notons E_k l'étage choisi (au hasard) par la personne numéro k.*
$(X_i = 0) = (E_1 \neq i) \cap (E_2 \neq i) \cap \dots (E_N \neq i)$.
Les E_i sont indépendantes et suivent toutes une loi uniforme sur $[\![1,p]\!]$.
Donc $P(X_i = 0) = \left(1-\frac{1}{p}\right)^N$. $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(1-\left(1-\frac{1}{p}\right)^N\right)}$

2) *Par définition,* $X = \sum_{i=1}^{p} X_i$ *donc, par linéarité de l'espérance,* $E(X) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i)$.

On peut conclure $\boxed{E(X) = p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)}$

3) *On utilise la même tactique.*

$P(E_1 \neq i \cap E_1 \neq j) = \frac{p-2}{p}$ *puis* $P(X_i = 0 \cap X_j = 0) = \left(\frac{p-2}{p}\right)^N$.

Ainsi $X_iX_j \hookrightarrow \mathscr{B}(\alpha)$ *où* $\alpha = P(X_iX_j = 1)$.

$$\begin{aligned} P(X_i\, X_j = 0) &= P(X_i = 0 \cup X_j = 0) = P(X_i = 0) + P(X_j = 0) - P(X_i = 0 \cap X_j = 0) \\ &= 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^N - \left(\frac{p-2}{p}\right)^N \end{aligned}$$

Donc $\alpha = 1 - 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^N + \left(\frac{p-2}{p}\right)^N$

4) $V(X) = \sum_{i=1}^{p} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} Cov(X_i, X_j)$

Or $Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \alpha - \left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^N\right)^2$

$Cov(X_i, X_j) = 1 - 2\left(\frac{p-1}{p}\right)^N + \left(\frac{p-2}{p}\right)^N - \left(1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^N\right)^2$

Notons $\beta = Cov(X_i, X_j)$ *et* $\gamma = V(X_i)$.

$V(X) = p\gamma + 2\binom{p}{2}\beta = p\gamma + p(p-1)\beta$

avec $\gamma = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)\left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)$

Faut-il aller plus loin ?

Corrigé exercice 75

Entraînement (court)

Soit X une variable aléatoire à densité f continue sur $\mathbf{R}$ *et strictement positive.*

1) *Les hypothèses permettent de justifier que la fonction de répartition est* C^1 *sur* $\mathbf{R}$*, strictement croissante, donc réalise une bijection de* $\mathbf{R}$ *dans* $]0,1[$.

$P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m) \Longleftrightarrow F(m) = 1 - F(m) \Longleftrightarrow F(m) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow m = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$\boxed{X \text{ admet une médiane unique } m \text{ qui vaut } F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$

2) *On suppose que X possède une espérance a et une variance.*

Par définition de la variance $V(X) = E\left((X-a)^2\right)$ *et en utilisant le théorème de* *transfert :*

$$V(X)\int_{-\infty}^{+\infty}(t-a)^2 f(t)\ dt$$

• *Supposons que m soit plus petit que a, alors si* $t \leqslant a$, *on aura* $(t-a)^2 \geqslant (m-a)^2$ *donc*

$$\begin{array}{rcl} V(X) & \geqslant & \displaystyle\int_{-\infty}^{m}(t-a)^2 f(t)\ dt \\ & \geqslant & \displaystyle\int_{-\infty}^{m}(m-a)^2 f(t)\ dt \\ & \geqslant & \displaystyle(m-a)^2\int_{-\infty}^{m} f(t)\ dt \\ & \geqslant & (m-a)^2 F(m) \\ & \geqslant & \dfrac{1}{2}(m-a)^2 \end{array}$$

Donc, dans ce cas, $(m-a)^2 \leqslant 2V(X)$ *donc* $|m-a| \leqslant \sqrt{2V(X)}$.
• *Supposons que m soit plus grand que a, alors si* $t \geqslant m$, *on aura* $(t-a)^2 \geqslant (m-a)^2$.

$$\begin{array}{rcl} V(X) & \geqslant & \displaystyle\int_{m}^{+\infty}(t-a)^2 f(t)\ dt \\ & \geqslant & \displaystyle\int_{m}^{+\infty}(m-a)^2 f(t)\ dt \\ & \geqslant & \displaystyle(m-a)^2\int_{m}^{+\infty} f(t)\ dt \\ & \geqslant & (m-a)^2(1-F(m)) \\ & \geqslant & \dfrac{1}{2}(m-a)^2 \end{array}$$

Dans ce cas aussi, $(m-a)^2 \leqslant 2V(X)$ *donc* $|m-a| \leqslant \sqrt{2V(X)}$.
C'est donc vrai dans tous les cas.

Corrigé exercice 76

Entraînement (court)

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur le même* Ω, *à valeurs dans* $\mathbf{N}$ *telle que* $Y \leqslant X$.
On suppose que X *a une espérance et que* $P(X=n) > 0$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$.
On suppose de plus que la loi conditionnelle de Y *sachant* $X=n$ *est la loi uniforme sur* $[\![0;n]\!]$.

1) *On utilise la formule des probas totales avec le SCE* $(X=n)_{n\in\mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned}
P(X-Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X-Y=k\cap X=n)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n-k\cap X=n)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=k\cap X=n)\\
&\qquad \text{car, sachant } X=n, Y \text{ suit une loi uniforme sur } [\![0,n]\!]\\
&= P(Y=k)
\end{aligned}$$

Donc $X-Y$ *et* Y *ont la même loi.*

2) *On suppose que* $Y+1$ *suit une loi géométrique de paramètre* p.

a: *Posons* $Z=Y+1$ *donc* $Y=Z-1$.
$P(Y=n)-P(Y=n+1)=P(Z-1=n)-P(Z-1=n+1)=P(Z=n+1)-P(Z=n+2)$.
Or $Z\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$, *donc* $\forall k\in\mathbf{N}^*\quad P(Z=k)=p(1-p)^{k-1}$.
Donc $P(Y=n)-P(Y=n+1)=p(1-p)^n-p(1-p)^{n+1}=p(1-p)^n(1-1+p)$.
Donc $\boxed{\forall n\in\mathbf{N}\qquad P(Y=n)-P(Y=n+1)=p^2(1-p)^n}$

Ensuite, en reprenant la formule des probabilités totales vues en 1) :
$P(Y=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y=n\cap X=k)=\sum_{k=n}^{+\infty}P_{(X=k)}(Y=n)P(X=k)$
Donc $P(Y=n)=\sum_{k=n}+\infty\frac{1}{k+1}P(X=k)$
De même $P(Y=n+1=\sum_{k=n+1}+\infty\frac{1}{k+1}P(X=k)$
Donc $P(Y=n)-P(Y=n)=\frac{1}{n+1}P(X=n)$
Il en résulte $\boxed{\forall n\in\mathbf{N}\qquad P(X=n)=(n+1)p^2(1-p)^n}$

b: *Comparons* $P(X-Y=k\cap Y=n)$ *et* $P(X-Y=k)\times P(Y=n)$.

$$\begin{aligned}
P(X=n+k\cap Y=n) &= P(X=n+k\cap Y=n)=P_{(X=n+k)}(Y=n)P(X=n+k)\\
&= \frac{1}{n+k+1}\times(n+k+1)p^2(1-p)^{n+k}\\
&= p^2(1-p)^{n+k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X-Y=k)\times P(Y=n) &= P(Y=k)\times P(Y=n)\\
&= p(1-p)^k\times p(1-p)^n\\
&= p^2(1-p)^{n+k}
\end{aligned}$$

On a donc égalité pour tout couple $(n,k)\in\mathbf{N}^2$.
Cela confirme que $X-Y$ *et* Y *sont indépendantes.*

Corrigé exercice 77

Hec 2006 oral voie E

1) *Pas de problème pour la question de cours. variable aléatoire.*

2) $(Min(X,Y) > t) = (X > t) \cap (Y > T)$ *et comme X et Y sont indépendantes,* $P(Min(X,Y) > t) = P(X > t)P(Y > T)$ *donc*

$$\begin{aligned} F_U(t) &= 1 - P(Min(X,Y) > t) = 1 - P(X > t)P(Y > t) \\ &= 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t)) \end{aligned}$$

C'est la relation attendue.

3) $Max(X,Y) \leqslant t) = (X \leqslant t) \cap (Y \leqslant t)$ *donc* $F_V(t) = P(X \leqslant t)P(Y \leqslant t)$.
Donc $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad F_V(t) = F_X(t)F_Y(t)}$

4) *On suppose à présent que X et Y suivent la loi exponentielle de paramètre* 1.

a: *De façon classique, pour* $t \in \mathbb{R}^+$
$P(X > t) = P(Y > t) = 1 - F_X(t) = 1 - (1 - e^{-t}) = e^{-t}$.
Donc $P(U > t) = P(X > T)P(Y > T) = e^{-2t}$.
Donc $F_U(t) = 1 - e^{-2t}$ *si* $t \in \mathbb{R}^+$ *et* $F_U(t) = 0$ *sinon.*
Ainsi $\boxed{U \hookrightarrow \mathscr{E}(2)}$.
$U = X \Longleftrightarrow (X \leqslant Y)$.
Or X et Y ont même loi et $P(X < Y) + P(X = Y) + P(X > Y) = 1$. $P(X = Y) = 0$ *car ce sont des variables à densité.*
$P(X < Y) = P(X > Y)$ *car X et Y ont même loi. Donc* $P(X < Y) = P(X \leqslant Y) = \frac{1}{2}$.
$\boxed{P(U = X) = \frac{1}{2}}$

b: *On sait que* $U \hookrightarrow \mathscr{E}(2)$. *On montre facilement que U a même loi que* $\frac{1}{2}Y$.
On sait aussi que $U + V = X + Y$ *donc* $V = X + Y - U$ *a même que* $X + \frac{1}{2}Y$.
Ce n'est pas vraiment une preuve, mais c'est très intuitif. Comment en dire plus, sans connnâitre le cours sur la loi d'un couple de variables indépendantes à densité ?
$E(Y) = E(Z) = E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = 1 + \frac{3}{2}$.
$V(Y) = V\left(X + \frac{1}{2}Y\right) = V(X) + V\left(\frac{1}{2}Y\right)$ *par indépendance de X et Y.*
Donc $V(V) = V(X) + \frac{1}{4}V(Y) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.
$\boxed{E(V) = \frac{3}{2} \text{ et } V(V) = \frac{5}{4}}$

Corrigé exercice 78

HEC 2006 oral voie E

1) *Pas de problèmes pour la définition et les estimateurs de référence fournissent les premiers exemples.*

2) *On peut chercher le moment d'ordre n, $n \in \mathbf{N}$ (il existe car f est à support $I = [0,1]$ qui est un segment) :*

$$\begin{aligned} m_n(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\theta(x)\,dx = \int_0^1 \left(\theta x^{n+1} - \left(\frac{\theta}{2}+1\right)x^n\right)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{n+2}\theta x^{n+2} - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\theta}{2}-1\right)x^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+2}\theta - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\theta}{2}-1\right) \end{aligned}$$

En particulier, vérifions que $\Updownarrow_0 = 1$.

$m_0(X) = \frac{1}{2}\theta - \left(\frac{\theta}{2}-1\right) = 1$. *Donc f_θ est bien une densité.*

$m_1(X) = \frac{1}{3}\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}-1\right) = \theta\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{\theta}{12} + \frac{1}{2}$

$m_2 = \frac{1}{4}\theta - \frac{1}{3}\left(\frac{\theta}{2}-1\right) = \theta\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} = \frac{\theta}{12} + \frac{1}{3}$

$E(X) = m_1(X) = \frac{\theta}{12} + \frac{1}{2}$

$VX) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\theta}{12} + \frac{1}{3} - \left(\frac{\theta}{12}+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} - \frac{\theta^2}{144}$

$$\boxed{E(X) = \frac{\theta}{12} + \frac{1}{2} \qquad V(X) = \frac{1}{12} - \frac{\theta^2}{144}}$$

3) *On admet que :* $\forall n \in \mathbf{N} \qquad \int_0^{+\infty} u^k e^{-u}du = k!$

Remarquons tout de suite qu'il faut savoir justifier ce résultat, qui est très fréquemment réclamé.

$X(\Omega) = [0,1]$*et X est une variable à densité, donc $X = 1$ est presque impossible. Il est donc légitime de poser* $Y = -\ln(X)$.

Sous réserve d'absolue convergence, $E(Y) = \int_0^1 \ln(x) f_\theta(x)\,dx$ *(par le théorème de transfert).*

Posons $I = \int_0^1 \ln(x)\left(\theta x - \frac{\theta}{2} + 1\right)\,dx$

On sait que $\int_0^1 \ln(x)\,dx$ *est absolument convergente et vaut* -1.

Soit $a \in]0,1]$. *Posons* $I(a) = \int_a^1 x\ln(x)\,dx$

On prend $u(x) = \ln(x)$ *et* $v'(x) = x$, *donc* $u'(x) = \frac{1}{x}$ *et* $v(x) = \frac{1}{2}x^2$.

u et v sont C^1 sur $[a,1]$, on peut donc intégrer par parties.

$I(a) = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_a^1 - \frac{1}{2}\int_a^1 x\,dx = -\frac{1}{2}a^2\ln(a) - \frac{1}{4}(1-a^2)$

$\lim_{a\to 0} I(a) = -\frac{1}{4}$.

Donc $\int_0^1 x\ln(x)\,dx$ *converge et vaut* $-\frac{1}{4}$.

Donc $E(Y)$ *existe et vaut* $\theta\times\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{\theta}{2}\times(-1)-1=\frac{1}{4}\theta-1$. $\boxed{E(Y)=\frac{1}{4}\,\theta-1}$

$Y^2=\ln(X)^2$. *On recommence :* $E(Y^2)=\int_0^1(\ln(x))^2 f_\theta(x)\,dx$.

On pose $J(a)=\int_a^1(\ln(x))^2\,dx$.

On prend $u(x)=(\ln(x))^2$ *et* $v'(x)=1$, *donc* $u'(x)=2\frac{\ln(x)}{x}$ *et* $v(x)=x$

$J(a)=\left[x(\ln(x))^2\right]_a^1-\int_a^1 2\ln(x)$.

Donc $\lim_{a\to 0}J(a)=-2\times(-1)=2$. *On a donc* $\int_0^1(\ln(x))^2\,dx=2$.

On pose $K(a)=\int_a^1 x(\ln(x))^2\,dx$.

On prend $u(x)=(\ln(x))^2$ *et* $v'(x)=x$, *donc* $u'(x)=2\frac{\ln(x)}{x}$ *et* $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$J(a)=\left[\frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2\right]_a^1-\int_a^1 x\ln(x)$.

Donc $\lim_{a\to 0}J(a)=-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$. *On a donc* $\int_0^1 x(\ln(x))^2\,dx=\frac{1}{4}$.

Donc $E(Y^2)=\theta\times\frac{1}{4}-\frac{\theta}{2}\times 2+2=2-\frac{3}{4}\theta$

Enfin, $V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=2-\frac{3}{4}\theta-\left(\frac{1}{4}\theta-1\right)^2=2-\frac{3}{4}\theta-\frac{1}{16}\theta^2+\frac{1}{2}\theta-1$

$\boxed{V(Y)=1-\frac{1}{4}\theta-\frac{1}{16}\theta^2}$

4) *Voilà une question curieusement triviale pour finir.*
$\widehat{X_n}$ *est un estimateur sans biais de* $E(X)$, *c'est à dire de* $\frac{\theta}{12}+\frac{1}{2}$.
$E(T_n)=12E(\widehat{X_n})-6=12\left(\frac{\theta}{12}+\frac{1}{2}\right)-6=\theta$.
T_n *est donc bien un estimateur sans biais de* θ.

Corrigé exercice 79

HEC 2006 oral voie E

1) $Y_n(\Omega)=\{0,1\}$.
$P(Y_n=1)=P(X_n=1\cap X_{n+1}=1)=P(X_n=1)\times P(X_{n+1}=1)$ *par indépendance.*
Donc $\boxed{Y_n\hookrightarrow\mathscr{B}(p^2)}$

2) $P(Y_i=1\cap Y_{i+1}=1)=P(X_i=1\cap X_{i+1}=1\cap X_{i+2}=1)=p^3$ *par indépendance des* X_j.
$P(Y_i=1)\times P(Y_{i+1}=1)=p^4\neq p^3$.
Donc Y_i *et* Y_{i+1} *ne sont pas indépendantes.*

Par contre, si $|i-j| \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1 \cap Y_j = 1) &= P(X_i = 1 \cap X_{i+1} = 1 \cap X_j = 1 \cap X_{j+1} = 1) \\ &= p^4 = P(Y_i = 1) \times P(Y_j = 1) \end{aligned}$$

Donc, si $|i-j| \geqslant 2$, Y_i *et* Y_j *sont indépendantes. On peut aussi invoquer le lemme des coalitions.*

3) $E(U_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$ *par linéarité de l'espérance.*

Donc $\boxed{E(U_n) = np^2}$

Pour le calcul de variance, cela se corse. On utilise la formule générale de la variance d'une somme :

$$V(U_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} Cov(Y_i, Y_j)$$

• *Si* $|i-j| \geqslant 2$, $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ *du fait de l'indépendance.*
• *Si* $j = i+1$,

$$\begin{aligned} Cov(Y_i, Y_j) = Cov(Y_i, Y_{i+1}) &= E(X_i X_{i+1}^2 X_{i+2}) - E(Y_i)E(Y_{i+1} \\ &= E(X_i)E(X_{i+1}^2)E(X_{i+2}) - (p^2)^2 \\ &= E(X_i)E(X_{i+1})E(X_{i+2}) - p^4 \quad \text{car } X_j^2 \text{a même loi que } X_j \\ &= p^3 - p^4 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V(U_n) &= \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} Cov(Y_i, Y_{i+1} \\ &= np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) \\ &= p^2(1-p)\left[n(1+p) + 2(n-1)p\right] \\ &= p^2(1-p)(3np - 2p + n) \end{aligned}$$

$\boxed{V(U_n) = p^2(1-p)(3np + n - 2p)}$

4) $V\left(\dfrac{U_n}{n}\right) = \dfrac{p^2(1-p)(3np+n-2p)}{n^2}$

Donc $\lim_{n \to +\infty} V\left(\dfrac{U_n}{n}\right) = 0$

On applique l'inégalité de Bienaymé Tchebychev :

$$P\left(\left|\frac{U_n}{n} - E\left(\frac{u_n}{n}\right)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \underbrace{\frac{V\left(\dfrac{U_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}}_{\to 0}$$

Donc $\left(\dfrac{U_n}{n}\right)$ *converge en proba vers* $E\left(\dfrac{U_n}{n}\right) = p^2$.

Concernant une convergence en loi, on ne peut rien affirmer a priori, car les Y_i *ne sont pas indépendantes.*

Corrigé exercice 80 — *HEC 2006 oral voie E*

On peut traduire les hypothèses sur Y_i et Z_i par : $Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$ *et* $Z_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{3}\right)$
Comme les X_i sont indépendantes, il en est de même pour les Y_i et pour les Z_i.
Il en résulte que $T_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ *et* $T_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$*, comme somme de n Bernoulli indépendantes.* T_1 *représente le nombre de fois où l'on obtient* 1*, et* T_2 *le nombre de fois où on obtient* 0 *avec les* X_i*.* $U = n - T_3$*, où* T_3 *est le nombre de fois où l'on obtient* -1*. On cherche* $P_{(T_1=t_1)\cap(T_2=t_2)}(X_i = 1)$.
$(X_i = 1 \cap T_1 = t_1 \cap T_2 = t_2)$ *signifie que l'on obtient* 1 *en i-ème expérience, avec* t_1 *fois* 1*, donc* $t_1 - 1$ *fois dans les* $n-1$ *autres expériences que la i-ème, et* t_2 *fois* 0 *dans* $n - t_1$ *autres expériences et* 0 *dans les* $n - t_1 - t_2$ *autres expériences. Donc*

$$\begin{aligned} P(X_i = 1 \cap T_1 = t_1 \cap T_2 = t_2) &= \frac{1}{3} \times \left[\binom{n-1}{t_1-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{t_1-1}\right] \times \left[\binom{n-t_1}{t_2}\left(\frac{1}{3}\right)^{t_2}\right] \\ &\qquad \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-t_1-t_2}\right] \end{aligned}$$

Donc $P(X_i = 1 \cap T_1 = t_1 \cap T_2 = t_2) = \binom{n-1}{t_1-1} \times \binom{n-t_1}{t_2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$
$P(T = t_1 \cap T = t_2) = \binom{n-1}{t_1-1} \times \binom{n-t_1}{t_2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$
Donc

$$\begin{aligned} P_{(T_1=t_1)\cap(T_2=t_2)}(X_i = 1) &= \frac{P(X_i = 1 \cap T_1 = t_1 \cap T_2 = t_2)}{P(T = t_1 \cap T = t_2)} \\ &= \frac{\binom{n-1}{t_1-1} \times \binom{n-t_1}{t_2}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\binom{n-1}{n-t_1} \times \binom{n-t_1}{t_2}\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\binom{n-1}{t_1-1}}{\binom{n}{t_1}} \\ &= \frac{(n-1)!}{(t_1-1)!(n-t_1)!} \times \frac{t_1!(n-t_1)!}{n!} = \frac{t_1}{n} \end{aligned}$$

On recommence : $(U = k) \cap (T_1 = t_1) = (T_1 = t_1) \cap (T_3 = n-k)$ *signifie que l'on a* t_1 *fois* 1 *et* $n-k$ *fois* 0 *dans les* $n - t_1$ *autres expériences.*
Donc $P(U = k \cap T_1 = t_1) = \binom{n}{t_1}\left(\frac{1}{3}\right)^t_1 \times \binom{n-t_1}{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-t_1-(n-k)}$
$P(U = k \cap T_1 = t_1) = \binom{n}{t_1}\binom{n-t_1}{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^n$
$P(U = k) = P(T_3 = n-k) = \binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

Donc

$$\begin{aligned}
P_{(U=k)}(T_1=t_1) &= \frac{P(U=k\cap T_1=t_1)}{P(U=k)}\\
&= \frac{\binom{n}{t_1}\binom{n-t_1}{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\binom{n}{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k} = \frac{\binom{n}{t_1}\binom{n-t_1}{n-k}}{\binom{n}{k}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \frac{n!}{t_1!(n-t_1)!}\times\frac{(n-t_1)!}{(n-k)!(k-t_1))!}\times\frac{(n-k)!k!}{n!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \frac{k!}{(k-t_1)!t_1!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \binom{k}{t_1}\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

C'est logique, car, sachant que $U=k$, T_1 suit une loi binomiale de paramètre k et $\frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 81

HEC 2006 oral voie E

On dispose de 7 euros. Chaque semaine a lieu une loterie de 100 billets dont 10 sont gagnants. Chaque billet coûte 1 euro.

1) *Soit G l'événement "gagner au moins une fois".*
• *Avec la stratégie 1 consistant à acheter 7 billets la première semaine.*
Ω est le nombre de parties à 7 éléments de l'ensemble des billets et $\overline{G}$ est l'ensemble des parties à 7 éléments des billets perdants. Donc

$$\begin{aligned}
q_1=P(\overline{G}) &= \frac{\binom{90}{7}}{\binom{100}{7}} = \frac{\frac{90!}{83!\,7!}}{\frac{100!}{93!\,7!}}\\
&= \frac{90!\times 93!}{100!\times 83!}\\
&= \frac{93\times 92\times\ldots\times 84}{100\times 99\times\ldots\times 91}\\
&= \frac{90\times\ldots\times 84}{100\times\ldots\times 94}\\
&= \prod_{k=0}^{6}\frac{90-k}{100-k}
\end{aligned}$$

Puis $p_1=P(G)=1-q_1$.
• *Avec la stratégie 2 consistant à acheter un billet chaque semaine.*
$P(\overline{G})=\left(\frac{9}{10}\right)^7=q_2$ *et* $P(G)=p_2=1-\left(\frac{9}{10}\right)^7$

Or $\forall k \in [\![0,6]\!]\quad \dfrac{90-k}{100-k} \leqslant \dfrac{9}{10}$ *car* $10(90-k) = 900-10k$ *et* $9(100-k) = 900-9k$
$10k \geqslant 9k$ *donc* $900-10k \leqslant 900-9k$ *donc* $10(90-k) \leqslant 9(100-k)$ *donc,*
on a bien $\dfrac{90-k}{100-k} \leqslant \dfrac{9}{10}$
Donc $q_1 \leqslant q_2$ *donc* $p_1 \geqslant p_2$. $\boxed{\textit{La stratégie 1 est meilleure}}$

2) *Soit* N_i *le nombre de billets gagnants achetés avec la stratégie i.*
• *Avec la stratégie 1,* $N_1 \hookrightarrow \mathscr{H}\left(10, 7, \dfrac{1}{10}\right)$.
$E(N_1) = \dfrac{7}{10}$ *et* $V(N_1) = \dfrac{63}{100}\left(\dfrac{100-7}{99}\right)$.
• *Avec la stratégie 2,* $N_2 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(7, \dfrac{1}{10}\right)$.
$E(N_2) = \dfrac{7}{10}$ *et* $V(N_1) = \dfrac{63}{100}$.
$V(N_1) < V(N_2)$ *donc* $\boxed{\textit{on minimise les risques avec la stratégie 1}}$.

On a utilisé ici des connaissances de cours sur la loi dite hypergéométrique (connaissances assez fines, puisqu'on utilise la formule complexe de la variance). Cette loi n'est plus une loi de référence depuis 2013 dans le cours de ECE. Une version réactualisée de cet énoncé devrait contenir des questions intermédiaires.

Corrigé exercice 82

HEC 2006 oral voie E

1) *Soit* N_1 *le nombre d'essais avec la première méthode.*
$P(N_1 = 1) = \dfrac{1}{10}$.
$P(N_1 = 2) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10}$
$P(N_1 = 3) = \dfrac{9}{10} \times \dfrac{8}{9} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{90}$
On essaye de généraliser pour $k \geqslant 2$: $P(N_1 = k) = \dfrac{9}{10} \times \left(\dfrac{8}{9}\right)^{k-2} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{8}{9}\right)^{k-2}$.
Il nous faut maintenant chercher $E(N_1)$. *Sous réserve d'absolue convergence (donc de convergence, en l'occurrence) :*

$$\begin{aligned}
E(N_1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(N_1=k) = 1P(N_1=1) + \sum_{k=2}^{+\infty} kP(N_2=k)\\
&= \frac{1}{10} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{10}\left(\frac{8}{9}\right)^{k-2}\\
&= \frac{1}{10} + \left(\frac{9}{8}\right) \times \frac{1}{10}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}\\
&= \frac{1}{10} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{10} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{8}{9}\right)^2} - 1\right)\\
&= \frac{1}{10} + \frac{9}{8} \times \frac{1}{10} \times (9^2 - 1)\\
&= \frac{1}{10} + 9
\end{aligned}$$

Avec la première méthode $\boxed{E(N_1) = 9,1}$

2) $N_2(\Omega) = [\![1,10]\!]$. *Déjà, cela change tout.*
On suppose les stylos numérotés de 1 *à* 10. *Si on fait* 10 *tirages successifs sans remise, cela produit une permutation de* $[\![1,10]\!]$.
$(N_2 = k)$ *est l'ensemble des permutations ayant le bon numéro de stylo (celui qui marche) au rang k. Il y a* 9! *permutations de ce type.*
Donc $P(N_2 = k) = \dfrac{9!}{10!} = \dfrac{1}{10}$. *Ainsi,* $N_2 \hookrightarrow \mathscr{U}_{[\![1,10]\!]}$.
Avec la deuxième méthode, on a donc $\boxed{E(N_2) = \dfrac{1+10}{2} = 5,5}$

3) *La situation est classique, pour cette troisième méthode. C'est l'attente d'un succès dans une répétition d'expériences identiques et indépendantes.*
Donc $N_3 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{10}\right)$.
Le cours donne $E(N_3) = \dfrac{1}{\frac{1}{10}} = 10$.
C'est évidemment la pire des méthodes, un peu moins bien que la première, beaucoup moins bien que la deuxième.

Corrigé exercice 83

HEC 2006 oral voie E

Voilà un exercice inhabituel, avec des données et une seule question. Il faut donc modéliser avant de nous lancer.
Notons E_n *l'erreur globale commise avec les n opérations (avec ici* $n = 10^6$*).*
$E_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ *avec* $U_i \hookrightarrow \mathscr{U}_I$*, avec* $I = [-0.510^{-J}, 0.510^{-J}]$*, intervalle d'amplitude* 10^{-J}.

On a, de plus, l'hypothèse que les U_i sont indépendantes.
On cherche $P\left(|E_n| \leqslant \frac{1}{2}10^{-J+3}\right)$.
On sait d'après le théorème de la limite centrée (du moins son adaptation à une somme de variables aléatoires indépendantes de même loi, admettant une variance) que (E_n^*) *converge en loi vers la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
$E(E_n) = E\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(U_i)$ *par linéarité de l'espérance.*
$E(U_i) = 0$ *donc* $E(E_n) = 0$.
$V(E_n) = V\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(U_i)$ *par indépendance.* $V(U_i) = \frac{(b-a)^2}{12}$ *avec* $b-a = 10^{-J}$,
donc $V(U_i) = \frac{10^{-2J}}{12}$ *et* $V(E_n) = \frac{n}{12}10^{-2J} = \frac{10^{-2J+6}}{12}$.

$$\begin{aligned} |E_n| \leqslant \frac{1}{2}10^{-J+3} &\iff \frac{|E_n - E(E_n)|}{\sigma(E_n)} \leqslant \frac{\frac{1}{2}10^{-J+3}}{\frac{1}{\sqrt{12}}10^{-J+3}} \\ &\iff |E_n*| \leqslant \frac{\sqrt{12}}{2} \\ &\iff |E_n*| \leqslant \sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P\left(|E_n| \leqslant \frac{1}{2}10^{-J+3}\right) &= P(|E_n^*| \leqslant \sqrt(3) \\ &\simeq \Phi(\sqrt{3} - \Phi(-\sqrt{3}) \\ &\simeq 2\Phi(\sqrt{3}) - 1 \\ &\simeq 0,92 \end{aligned}$$

Corrigé exercice 84

HEC 2006 oral voie E

Cours : *C'est juste pour ne pas oublier ... Il faut se souvenir également de quelques propriétés vues en cours.*
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ *et* $E = \{1, 2, \dots, n\}$.

1) *On peut utiliser l'univers suivant :* $\Omega = (\mathscr{P}(E))^2$. $Card(\Omega) = (2^n)^2 = 2^{2n}$.
On commence par choisir B, partie à k éléments ($k \in [\![0,n]\!]$*) : il y a* $\binom{n}{k}$ *possibilités.*
Puis on choisit A comme sous ensemble de B : il y a 2^k *possibilités.*
Donc, en notant I_1 *l'événement* $A \subset B\}$, $Card(I_1) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$.
Donc $P(I_1) = \frac{3^n}{2^{2n}} = \frac{3^n}{4^n}$ $\boxed{P(I_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

2) *Soit $k \in \mathbb{N}$. On veut :* $Card(A \cap B) = k$.

Commençons par choisir $A \cap B$ à k éléments : $\binom{n}{k}$ *possibilités.*

Puis on choisit $B - (A \cap B)$ à j éléments (j pouvant varier de 0 à $n-k$) : $\binom{n-k}{j}$ *possibilités.*

Puis A dans $E - A$: 2^{n-j-k} possibilités. Donc $Card(I_2) = \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} 2^{n-j-k} \binom{n-k}{j} = \binom{n}{k} 3^{n-k}$

Ainsi $\boxed{P(I_2) = \dfrac{\binom{n}{k} 3^{n-k}}{2^{2n}}}$

3) *On vient de voir que* $P(X = k) = \dfrac{\binom{n}{k} 3^{n-k}}{2^{2n}}$.

En regardant bien, on peut écrire $P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k}$. *On reconnaît une loi binomiale* $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$. *Donc* $\boxed{E(X) = \frac{n}{4}}$

4) $S = \displaystyle\sum_{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2} Card(A \cap B) = \sum_{k=0}^{n} k \times Card\left((A,B) \in E^2 \ / \ Card(A \cap B) = k\right)$.

Donc $S = 2^{2n} E(X) = 4^n \times \frac{n}{4} = n4^{n-1}$. $\boxed{S = 4^{n-1}}$

Corrigé exercice 85 — *HEC 2006 oral voie S*

1) $R(t) = P(X > t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} f(x)\, dx = 1 - F(t)$.

2) $P_{(t<X)}(t < X < t + x) = \dfrac{P\left[(t < X < t + x) \cap (t < X)\right]}{P(t < X)} = \dfrac{P(t < X < t + x)}{P(t < X)}$

Donc $P_{(t<X)}(t < X < t + x) = \dfrac{F(t+x) - F(t)}{1 - F(t)} = \dfrac{F(t+x) - F(t)}{x} \times \dfrac{1}{1 - F(t)}$. *On passe à la limite quand x tend vers 0 :*

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{x \to 0} \frac{F(t+x) - F(t)}{x} \times \frac{1}{1 - F(t)} \\ &= \frac{F'(t)}{1 - F(t)} \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned}$$

D'autre part, $-\left[\ln(R(t))\right]' = -\dfrac{R'(t)}{R(t)} = -\dfrac{-F'(t)}{1 - F(t)} = \dfrac{f(t)}{1 - F(t)}$.

On a bien les égalités demandées.

3) *Question ultra classique : la loi exponentielle est sans mémoire. Prouvons le.*
Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, *pour tout* $x \in R^+$ $\quad P(X > x) = 1 - F_X(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$.

$$\begin{aligned} P_{(X>t)}(X > t+s) &= \frac{P(X > s \cap X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= P(X > s) \end{aligned}$$

On a alors $h(t) = \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$.

4) *Réciproquement, supposons* $h(t) = C$ *(constante). On a donc* $-(\ln[R(t)])' = C$
Donc $\ln(R(t)) = -CT + a$ *puis* $R(t) = e^{-ct+a}$.
$R(0) = 1$ *donc* $a = 0$ *et, donc* $R(t) = e^{-Ct}$.
Il en résulte que $F(t) = 1 - e^{-Ct}$ *pour tout* $t \in \boldsymbol{R}^+$ *et* $F(t) = 0$ *sinon.*
On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre C.

5) *Soit S l'événement "être en marche à la date t* ($t \in \boldsymbol{R}^+$)*.*
$P(S) = P(X > t) = R(t)$.
$N(t)$ *est le nombre de succès S dans une répétition de n expériences indépendantes.*
Donc $N(t) \hookrightarrow \mathscr{B}(n, R(t))$.
$E(N(t)) = nR(t)$, $E(N(t+x)) = nR(t+x)$. *Développons maintenant l'expression de droite :*

$$\begin{aligned} \frac{E(N(t)) - E(N(t+x))}{xE(N(t))} &= \frac{nR(t) - nR(t+x)}{nxR(t)} \\ &= \frac{R(t) - R(t+x)}{xR(t)} \\ &= \frac{1 - F(t) + F(t+x) - 1}{xR(t)} \\ &= \frac{F(t+x) - F(t)}{x} \times \frac{1}{R(t)} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(t+x) - F(t)}{x} = F'(t) = f(t)$ *donc* $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{E(N(t)) - E(N(t+x))}{xE(N(t))} = \dfrac{f(t)}{R(t)} = h(t)$.
C'est le résultat attendu... sans commentaire.

Corrigé exercice 86

Entraînement

1) *Si* $t \in [x, +\infty[$ $\quad t(f(t) \geqslant xf(t)$ *donc, en intégrant (les intégrales convergent) :*
$\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \geqslant \int_x^{+\infty} xf(t)\,dt = x\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$
Donc $M(x) \geqslant x$.

2) *Les initiés auront reconnu une densité d'une loi de Pareto.*
$G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{a}{x_0} \times a_0^{a+1} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{a+1}}\,dt.$
Posons $I(A) = \displaystyle\int_x^A \frac{1}{t^{a+1}}\,dt.$
$I(A) = \left[\dfrac{t^{-a}}{-a}\right]_x^1 = -\dfrac{1}{a}\left[\dfrac{1}{t^a}\right]_x^A = -\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{A^a} - \dfrac{1}{x^a}\right)$
$\displaystyle\lim_{A\to+\infty} I(A) = \frac{1}{ax^a}.$
Donc $G(x) = \dfrac{a}{x_0} \times x_0^{a+1} \times \dfrac{1}{ax^a} = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^a$
$H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt = \frac{a}{x_0} \times x_0^{a+1} \times \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^a}\,dt = \frac{a}{x_0} \times x_0^{a+1} \times \frac{1}{(a-1)x^{a-1}}$
Donc $H(x) = \dfrac{a}{a-1} \times \dfrac{x_0^a}{x^{a-1}}$
$\dfrac{H(x)}{G(x)} = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{-a} \times \dfrac{a}{a-1} \times \dfrac{x_0^a}{x^{a-1}} = \dfrac{a}{a-1}x$
En conclusion $\boxed{\forall x \in \boldsymbol{R}^{+*} \qquad M(x) = \dfrac{a}{a-1}\,x}$

3) *On traite ici la réciproque. On suppose dans cette question que* $X(\Omega) = [x_0, +\infty[$ *et que* $M(x) = kx$ *pour* $x \geqslant x_0$ *où* $k > 1$.

a: *Pour* $x > x_0$ $\quad G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = 1 - F(x)$
Comme F *est dérivable,* G *l'est aussi et* $G'(x) = -F'(x) = -f(x)$.
$H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_{x_0}^{+\infty} tf(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} tf(t)\,dt = E(X) - \int_{x_0}^{x} tf(t)\,dt$
Donc H *est dérivable et* $H'(x) = -xf(x)$.

b: $M(x) = kx$ *donc* $H(x) = kxG(x)$.
En dérivant, on obtient $H'(x) = kG(x) + kxG'(x) = KG(x) - kxf(x)$
donc $-xf(x) = kG(x) - kxf(x)$.
$kG(x) = (k-1)f(x) = (1-k)xG'(x)$ *donc* $\quad G(x) = \dfrac{1-k}{k}\,xG'(x)$ $\qquad$ ***c.q.f.d.***

c: *Pour* $x \geqslant x_0$, *on pose* $I(x) = x^{\frac{k}{k-1}}G(x)$. *Calculons* $I'(x)$.

$$\begin{aligned}
I'(x) &= \frac{k}{k-1}x^{\frac{k}{k-1}-1}G(x) + x^{\frac{k}{k-1}}G'(x)\\
&= \frac{k}{k-1}x^{\frac{1}{k-1}}G(x) + x^{\frac{k}{k-1}}G'(x)\\
&= \frac{k}{k-1}x^{\frac{1}{k-1}} \times \frac{1-k}{k}xG'(x) + x^{\frac{k}{k-1}}G'(x)\\
&= -x^{\frac{1}{k-1}+1}G'(x) + x^{\frac{k}{k-1}}G'(x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $I(x) = C$ *(constante) et* $G(x) = Cx^{\frac{k-1}{k}}$.
Or $G(x_0) = 1$ *donc* $Cx_0^{\frac{k-1}{k}} = 1$ *et* $C = x_0^{\frac{k}{k-1}}$.

Donc $G(x) = x_0^{\frac{k}{k-1}} \times x^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}$.

En conclusion $\boxed{\text{Pour } x > x_0 \qquad G(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}}$

Corrigé exercice 87

HEC 2007 oral voie E

Question de cours : *pas de problème.*

1) *Par linéarité de l'espérance,* $E(S) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_i) = nE(X_1)$.

Par indépendance des X_k, $V(S) = \sum_{k=1}^{n} V(X_i) = nV(X_1)$.

Reste à calculer $E(X_1)$ *et* $V(X_1)$. *Pour cela, déterminons le moment d'ordre k de* X_1.

$$\begin{aligned} E(X_1^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_\theta(x)\, dx = \int_0^\theta \frac{3x^{k+2}}{\theta^3}\, dx \\ &= \frac{3}{\theta^3}\left[\frac{x^{k+3}}{k+3}\right]_0^\theta \\ &= \frac{3}{k+3}\theta^k \end{aligned}$$

En particulier, $E(X_1) = \frac{3}{4}\theta$ *et* $E(X_1^2) = \frac{3}{5}\theta^2$.

$V(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \left(\frac{3}{5} - \frac{9}{16}\right)\theta^2 = \frac{3}{80}\theta^2$.

$\boxed{E(S) = \frac{3n}{4}\theta \text{ et } V(S) = \frac{3n}{80}\theta^2}$

2) $P(T \leqslant t) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant t)\right) = [P(X_1 \leqslant t)]^n = F_{X_1}(t)^n$. *Donc* $F_T(t) = [F_{X_1}(t)]^n$.

Donc $f_T(t) = n \times f_\theta(t) \times [F_{X_1}(t)]^{n-1}$.

Si $t \in [0,\theta]$ $\qquad f_T(t) = n \times \left(\frac{3t^2}{\theta^3}\right) \times \left(\frac{t^3}{\theta^3}\right)^{n-1} = \frac{3nt^{3n-1}}{\theta^{3n}}$

Et, bien sur, $f_T(t) = 0$ *si* $t \notin [0,\theta]$.

Pour poursuivre, là aussi, on calcule le moment d'ordre k.

$$\begin{aligned} E(T^k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_T(t)\, dt = \int_0^\theta t^k \times \frac{n}{\theta^{3n}} \times 3t^{3n-1}\, dt \\ &= \frac{3n}{\theta^{3n}}\left[\frac{t^{3n+k}}{3n+k}\right]_0^\theta \\ &= \frac{3n}{3n+k}\theta^k \end{aligned}$$

En particulier $E(T) = \dfrac{3n}{3n+1}\theta$ *et* $E(T^2) = \dfrac{3n}{3n+2}\theta^2$.

Donc $V(T) = \dfrac{3n}{3n+2}\theta^2 - \dfrac{9n^2}{(3n+1)^2}\theta^2 = 3n\theta^2 \times \dfrac{(3n+1)^2 - 3n(3n+2)}{(3n+2)(3n+1)^2}$

$$\boxed{E(T) = \frac{3n}{3n+1}\theta \text{ et } V(T) = \frac{3n}{(3n+2)(3n+1)^2}\theta^2}$$

3) *On suppose maintenant que* θ *est un paramètre inconnu qu'on se propose d'estimer.*

a: $S' = aS$ *et* $T' = bT$ *donc* $E(S') = aE(S) = \dfrac{3an}{4}\,\theta$ *et* $E(T') = bE(T) = \dfrac{3bn}{n+1}\,\theta$.

S' *est sans biais* $\Longleftrightarrow E(S') = \theta \Longleftrightarrow a = \dfrac{4}{3n}$.

T' *est sans biais* $\Longleftrightarrow E(T') = \theta \Longleftrightarrow b = \dfrac{3n+1}{3n}$.

$$\boxed{\text{On prendra donc } a = \frac{4}{3n} \text{ et } b = \frac{3n+1}{3n}}$$

$V(S') = a^2V(S) = \dfrac{16}{9n^2} \times \dfrac{3n}{80}\,\theta^2 = \theta^2\,\dfrac{1}{15n}$.

$V(T') = b^2V(S) = \dfrac{(3n+1)^2}{9n^2} \times \dfrac{3n}{(3n+1)^2(3n+2)}\,\theta^2 = \theta^2\,\dfrac{1}{3n(3n+2)}$.

b: *Étudions le signe de* $V(S') - V(T')$

$$\begin{aligned}
V(S') - V(T') &= \theta^2\left[\frac{1}{15n} - \frac{1}{3n(3n+2)}\right] \\
&= \frac{\theta^2}{15n}\left[1 - \frac{5}{3n+2}\right] \\
&= \frac{\theta^2}{15n(3n+2)}(3n+2-5) \\
&= \frac{3\theta^2}{15n(3n+2)}(n-1)
\end{aligned}$$

C'est normal que S' *et* T' *aient le même risque quand* $n = 1$ *car, dans ce cas,* $S' = T'$.
Mais dès que $n > 1$, $V(S') > V(T')$. *Le risque de* S' *étant supérieur, on préférera* T'.

Corrigé exercice 88

HEC 2007 oral voie E

1) *Parmi les 3 qualités caractéristiques d'une densité de probabilité,*
il y a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.
C'est celle là qui va nous permettre de déterminer c.
Signalons déjà que f est positive et continue partout sauf en $t_0 = 10$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = c\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$. *Posons* $I(A) = \int_{10}^{A} \frac{1}{t^2}\,dt$ *pour* $A \geqslant 10$.

$$\begin{aligned} \int_{10}^{A} \frac{1}{t^2}\,dt &= \left[-\frac{1}{t}\right]_{10}^{A} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{A} \\ &\to \frac{1}{10} \text{ quand } A \to +\infty \end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{c}{10}$

Donc f *est une densité si et seulement si* $\boxed{c = 10}$

2) *C'est donc la médiane que l'on cherche. Commençons par déterminer* F*, la fonction de répartition de* X.
$F(x) = P(X \leqslant x) = 0$ *si* $x \leqslant 10$.
Si $X \geqslant 0$, $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{10}^{x} f(t)\,dt = c\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{x}\right)$ *(d'après le calcul précédent)*
Donc $F(x) = 1 - \frac{10}{x}$ *si* $x \geqslant 10$.
On commence par remarquer que $m \geqslant 10$ *nécessairement.*
Si $m \geqslant 10$, $P(X \leqslant m) = 1 - \frac{10}{m}$ *et* $P(X \geqslant m) = 1 - P(X \leqslant m) = \frac{10}{m}$
$P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m) \iff 1 - \frac{10}{m} = \frac{10}{m} \iff \frac{10}{m} = \frac{1}{2} \iff m = 20.$ $\boxed{m = 20}$

3) *On cherche* $p_3 = P(N \geqslant 3)$ *où* $N \hookrightarrow \mathscr{B}(5,\alpha)$ *avec* $\alpha = P(X \geqslant 15) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.
$p_3 = \sum_{k=3}^{5} \binom{5}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} = \frac{1}{3^5}\sum_{k=3}^{5}\binom{5}{k} 2^k.$

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{3^5}\left(10 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + 1 \times 2^5\right) \\ &= \frac{1}{3^5}(80 + 80 + 32) \\ &= \frac{192}{243} \\ &\simeq 0,79 \end{aligned}$$

4) *Notons* X_1 *et* X_2 *les durées de vie des deux composants de A et de B.*
$T_A = Min(X_1, X_2)$ *et* $T_B = Max(X_1, X_2)$.
$(T_A \geqslant t) = (X_1 \geqslant T) \cap (X_2 \geqslant t)$ *et donc, âr indépendance de* X_1 *et* X_2 *:*
$P(T_A \geqslant t) = P(X_1 \geqslant t) \times P - X_2 \geqslant t) = P(X \geqslant t)^2 = \left(\frac{10}{t}\right)^2.$
Donc $F_{T_A}(t) = 1 - \frac{100}{t^2}$ *si* $t \geqslant 10$ *et* 0 *sinon.*
On obtient une densité f_{T_A} *en dérivant* F_{T_A} *partout où elle est dérivable.*

Donc $f_{T_A}(t) = 0$ *si* $t \leqslant 10$ *et* $f_{T_A}(t) = \dfrac{200}{t^3}$ *si* $t \geqslant 10$.

$(T_B \leqslant t) = (X_1 \leqslant t) \cap (X_2 \leqslant t)$ *donc* $P(T_b \leqslant t) = (F_X(t))^2 = \left(1 - \dfrac{10}{t}\right)^2$

Si $t \geqslant 10 \quad f_{T_B}(t) = 2 \times \dfrac{10}{t^2}\left(1 - \dfrac{10}{t}\right) = \dfrac{20}{t^2}\left(1 - \dfrac{10}{t}\right)$

Donc $f_{T_B}(t) = 0$ *si* $t \leqslant 10$ *et* $f_{T_B}(t) = \dfrac{20}{t^2}\left(1 - \dfrac{10}{t}\right)$ *si* $t \geqslant 10$.

5) *Sous réserve d'existence,* $E(T_A) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T_A}(t)\, dt = 200 \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$

Si on pose $J(x) = \displaystyle\int_{10}^{x} \frac{1}{t^2}\, dt$, $J(x) = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_{10}^{x} = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{x}$

$E(T_A) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} 200 J(x) = 20.$ $\boxed{E(T_A) = 20}$

$t f_{T_B}(t) \sim \dfrac{20}{t}$ *quand t voisin de* $+\infty$*, donc* $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} t f_{T_B}(t)\, dt$ *diverge.* $\boxed{E(T_B) \text{ n'existe pas}}$

Corrigé exercice 89

HEC 2007 oral voie E

Question de cours : *très classique et sans problème.*

1) *Notons* A_n *l'événement "lancer la pièce 1 au n-ième lancer" et* $q_n = P(A_n)$*. On cherche une relation entre* p_{n+1} *et* p_n *en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $\{A_n, \overline{A_n}\}$.

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n}) \\ &= p_1 P(A_n) + (1 - p_2)P(\overline{A_n}) \\ &= p_1 \times q_n + (1 - p_2) \times (1 - q_n) \\ &= (p_1 + p_2 - 1)q_n + (1 - p_2) \quad (1) \end{aligned}$$

C'est une suite arithmético géométrique. Notons α *sont point fixe.*
Il vérifie $\alpha = (p_1 + p_2 - 1)\alpha + (1 - p_2) \quad (2)$.
En faisant $(1) - (2)$*, on obtient* $q_{n+1} - \alpha = (p_1 + p_2 - 1)(q_n - \alpha)$.
$(q_n - \alpha)$ *est une suite géométrique de raison* $(p_1 + p_2 - 1)$ *de premier terme* $q_1 - \alpha$.
Donc $q_n - \alpha = (p_1 + p_2 - 1)^{n-1}(q_1 - \alpha)$ *avec* $q_1 = \dfrac{1}{2}$ *et* α *s'obtient facilement avec* (2) *:* $\alpha = \dfrac{1 - p_2}{2 - p_1 - p - 2}$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad q_n = (p_1 + p_2 - 1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1 - p_2}{2 - p_1 - p_2}\right) + \dfrac{1 - p_2}{2 - p_1 - p_2}}$

2) *Notons* B_n *l'événement "obtenir pile au n-ième lancer".* $r_n = P(B_n)$*. On recommence :*

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(B_{n+1})P(\overline{A_n}) \\ &= p_1 \times q_n + p_2(1 - q_n) \end{aligned}$$

On garde cette relation, sans chercher à la préciser.

3) *On sait que* $p_1+p_2-1 \in]-1,1[$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}(p_1+p_2-1)^{n-1}=0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \dfrac{1-p_1}{2-p_1-p_2}$. *On peut maintenant calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} r_n &= p_1\times\frac{1-p_1}{2-p_1-p_2}+p_2\times\left(1-\frac{1-p_1}{2-p_1-p_2}\right)\\ &= \frac{p_1(1-p_2)+p_2(2-p_1-p_2-1+p_2)}{2-p_1-p_2}\\ &= \frac{p_1-p_1p_2+p_2-p_1p_2}{2-p_1-p_2}\end{aligned}$$

Donc $$\boxed{L=\lim_{n\to+\infty} r_n=\frac{p_1+p_2-2p_1p_2}{2-p_1-p_2}}$$

4) *Voilà un script Scilab répondant à la question :*

```
p1=1/3;p2=1/6;eps=1e-6
L=(p1+p2-2*p1*p2)/(2-p1-p2)
n=0;r=0;q=1/2
while abs(r-L)>eps
    n=n+1
    r=p1*q+(1-q)*p2
    q=p1*q+(1-p2)*(1-q)
end
disp([n,L])
```

L'exécution donne $n=15$ *et* $L\simeq 0.2592593$.

Corrigé exercice 90

HEC 2007 oral voie E

Voilà le frère jumeau d'un exercice déjà rencontré. C'est en effet un grand classique, aussi bien dans des écrits que à l'oral de hec.

1) **a:** *f est bien positive, continue sur* $\mathbf{R}$ *sauf éventuellement en* x_0. *Reste à vérifier que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\frac{\alpha}{x_0}\int_{x_0}^{+\infty}\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)^{\alpha+1}dx.$

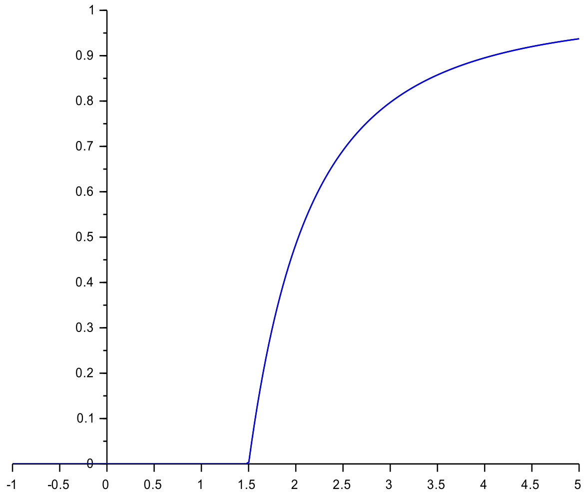
Posons $I(A)=\dfrac{\alpha}{x_0}\displaystyle\int_{x_0}^{A}\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)^{\alpha+1}dx$ *pour* $A>x_0$.

$I(A)=\dfrac{\alpha}{x_0}\times x_0^{\alpha+1}\left[\dfrac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{x_0}^{A}=x_0^{\alpha}\left(\dfrac{1}{x_0^{\alpha}}-\dfrac{1}{A^{\alpha}}\right)$

On a donc $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A)=1$ *et* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$. *Cela confirme que f est bien une densité de probabilité.*

$F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$. *En reprenant les calculs précédents avec* $A=x$, *on obtient :* $F(x)=0$ *si* $x\leqslant x_0$ *et* $F(x)=1-\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}$ *si* $x\geqslant x_0$.

Voilà une représentation graphique avec ici $x_0=1,5$ *et* $\alpha=2,3$.



b: *Discutons directement l'existence du moment d'ordre k ($k \in \mathbf{N}$). Il existe sous réserve de la convergence absolue de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$.*

Cela revient à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1-k}}\,dx$.

On sait que cette intégrale converge si et seulement si $\alpha+1-k>1$ donc $\alpha>k$.

Donc $E(X)$ existe pour $\alpha>1$ et $V(X)$ existe pour $\alpha>2$.

Supposons donc $\alpha>1$ et calculons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$. Pour cela on pose $J(A)= \displaystyle\frac{\alpha}{x_0}\times x_0^{\alpha+1}\int_{x_0}^{A}\frac{1}{x\alpha}\,dx$.

$$\begin{aligned} J(A) &= \alpha x_0^{\alpha}\left[-\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_{x_0}^{A} \\ &= \alpha x_0^{\alpha}\frac{1}{\alpha-1}\left(-\frac{1}{A^{\alpha-1}}+\frac{1}{x_0^{\alpha-1}}\right) \\ &\to \frac{\alpha}{\alpha-1}\,x_0 \quad \text{quand } A\to+\infty \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } \alpha>1 \qquad E(X)=\frac{\alpha}{\alpha-1}\,x_0}$$

c: *Posons $G(x)=\displaystyle\int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$.*

$G(x)=\displaystyle\frac{\alpha}{x_0}\times x_0^{a+1}\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{t^{\alpha+1}}\,dt$.

En reprenant les calculs précédents, en remplaçant x_0 par x dans l'intégrale, on obtient

$G(x) = \dfrac{\alpha}{x_0} \times x_0^{\alpha+1} \times \dfrac{1}{\alpha x^\alpha} = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^\alpha$

De même, posons $H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} t f(t)\, dt$

$H(x) = \dfrac{\alpha}{x_0} \times x_0^{\alpha+1} \times \displaystyle\int_x^{+\infty} \dfrac{1}{t^a}\, dt$

En reprenant les calculs précédents, $H(x) = \dfrac{\alpha}{x_0} \times x_0^{\alpha+1} \times \dfrac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$

Donc $H(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} \times \dfrac{x_0^\alpha}{x^{\alpha-1}}$

$\dfrac{H(x)}{G(x)} = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{-\alpha} \times \dfrac{\alpha}{\alpha-1} \times \dfrac{x_0^\alpha}{x^{\alpha-1}} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} x$

En conclusion $\boxed{\forall x \in \boldsymbol{R}^{+*} \qquad M_X(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\, x}$

2) **a:** *Pour* $x > x_0$ $\quad G(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt = \int_{x_0}^{+\infty} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = 1 - F(x)$

Comme F est dérivable, G l'est aussi et $G'(x) = -F'(x) = -f(x)$.

$H(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} t f(t)\, dt = \int_{x_0}^{+\infty} t f(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} t f(t)\, dt = E(X) - \int_{x_0}^{x} t f(t)\, dt$

Donc H est dérivable et $H'(x) = -x f(x)$.

b: $M(x) = kx$ *donc* $H(x) = kxG(x)$.

En dérivant, on obtient $H'(x) = kG(x) + kxG'(x) = KG(x) - kx f(x)$

donc $-x f(x) = kG(x) - kx f(x)$.

$kG(x) = (k-1) f(x) = (1-k)xG'(x)$ *donc* $\quad G(x) = \dfrac{1-k}{k} xG'(x)$ $\qquad$ ***c.q.f.d.***

c: *Pour* $x \geqslant x_0$, *on pose* $I(x) = x^{\frac{k}{k-1}} G(x)$. *Calculons* $I'(x)$.

$$\begin{aligned}
I'(x) &= \frac{k}{k-1} x^{\frac{k}{k-1}-1} G(x) + x^{\frac{k}{k-1}} G'(x) \\
&= \frac{k}{k-1} x^{\frac{1}{k-1}} G(x) + x^{\frac{k}{k-1}} G'(x) \\
&= \frac{k}{k-1} x^{\frac{1}{k-1}} \times \frac{1-k}{k} xG'(x) + x^{\frac{k}{k-1}} G'(x) \\
&= -x^{\frac{1}{k-1}+1} G'(x) + x^{\frac{k}{k-1}} G'(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $I(x) = C$ *(constante) et* $G(x) = Cx^{\frac{k-1}{k}}$.

Or $G(x_0) = 1$ *donc* $Cx_0^{\frac{k-1}{k}} = 1$ *et* $C = x_0^{\frac{k}{k-1}}$.

Donc $G(x) = x_0^{\frac{k}{k-1}} \times x^{\frac{k-1}{k}} = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}$.

En conclusion $\boxed{\text{Pour } x > x_0 \qquad G(x) = \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}}$

On a, pour $x \geqslant x_0$, $F_Y(x) = 1 - G(x) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\frac{k}{k-1}}$ *et* $F_Y(x) = 0$ *sinon.*

On reconnaît une loi de Pareto de paramètres x_0 *et* $\alpha = \dfrac{k}{k-1}$

Corrigé exercice 91

HEC 2007 oral voie E

1) *On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $\{P_n, Q_n, R_n, S_n\}$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(P_{n+1}) &= P_{P_n}(P_{n+1})P(P_n) + P_{Q_n}(P_{n+1})P(Q_n) + P_{R_n}(P_{n+1})P(R_n) + P_{S_n}(P_{n+1})P(S_n) \\ &= 0 + \frac{1}{3}q_n + \frac{1}{3}r_n + \frac{1}{3}t_n \end{aligned}$$

On procède de même avec q_{n+1}, r_{n+1} *et* s_{n+1}.

On obtient facilement $X_{n+1} = AX_n$ *avec* $\boxed{A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

2) *A est symétrique, donc diagonalisable.*

3) *On pourrait utiliser la réduction de A à une matrice diagonale, mais la méthode est longue et pénible. On peut accélérer en faisant intervenir la matrice J de* $\mathscr{M}_4(\boldsymbol{R})$ *composées que de* 1 *et en remarquant que* $A = \frac{1}{3}(J - I)$.
On a donc $J = 3A + I$. *On remarque que* $\quad \forall k \geqslant 1 \quad J^k = 4^{k-1}J$.

$$\begin{aligned} A^n = \left[\frac{1}{3}(J-I)\right]^n &= \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}J^k \\ &= \frac{1}{3^n}\left((-1)^n I + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}4^{k-1}J\right) \\ &= \frac{1}{3^n}\left((-1)^n + \frac{1}{4}\left[(4-1)^n - (-1)^n\right]J\right) \\ &= \frac{1}{3^n}\left((-1)^n I + \frac{3^n - (-1)^n}{4}J\right) \end{aligned}$$

Inutile de détailler plus le résultat obtenu.
On cherche maintenant à exprimer X_n *pour* $n \in \boldsymbol{N}$. *De la question 1), nous en déduisons facilement :* $\forall n \in \boldsymbol{N} \quad X_n = A^n X_0$ *avec* $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Autrement dit, X_n *est la première colonne de la matrice* A^n.
Donc $p_n = \frac{1}{3^n}\left((-1)^n + \frac{3^n - (-1)^n}{4}\right)$, $q_n = r_n = s_n = \frac{1}{3^n}\left(\frac{3^n - (-1)^n}{4}\right)$

4) $T(\Omega) = [\![3, +\infty]\!]$.
$(T = k)$ *signifie qu'au premier saut, elle va n'importe où (Q,R,ou S), au deuxième saut (si* $k > 3$*), elle retourne en P, puis au troisième elle retourne là où elle était après le premier saut, etc ..., puis au k-ème saut, elle saute vers l'un des deux sommets non visités.*

Donc $P(T=k) = \underbrace{1}_{saut\ 1} \times \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}}_{saut\ 2\ à\ k-1} \times \underbrace{\frac{2}{3}}_{saut\ k}.$

$$\boxed{T(\omega) = [\![2,+\infty]\!] \text{ et } \forall k \in [\![2,+\infty]\!] \quad P(T=k) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}}$$

On remarque que, en posant $T' = T-1$, T' *suit une loi géométrique* $\mathscr{G}\left(\frac{2}{3}\right)$. *Le cours donne* $E(T') = \frac{3}{2}$ *donc* $E(T) = R(T'+1) = E(T')+1 = \frac{5}{2}$. $\boxed{E(T) = \frac{5}{2}}$

5) $U(\Omega) = [\![3,+\infty]\!]$. *On sait déterminer* $P_{(T=k)}(U=n)$ *pour* $k \leqslant n-1$.
En effet, cela signifie que l'on a visité , après le k-ème saut, un des deux autres sommets déjà visités jusqu'au $n-1$*-ème saut.*

$$\begin{aligned}
P(U=n) &= \sum_{k=2}^{n-1} P_{(T=k)}(U=n) \times P(T=k) \\
&= \sum_{k=2}^{n} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} \times \frac{1}{3}\right] \times \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\
&= \sum_{k=2}^{n} 2^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sum_{j=1}^{n-2} 2^j \qquad \text{en posant } j = n-k \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2-2^{n-1}}{1-2} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (2^{n-1}-2) \qquad \textbf{c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

6) *Voilà un calcul somme toute assez reposant. Toutes les séries convergent car ce sont* *des séries géométriques convergentes.*

$$\begin{aligned}
E(U) &= \sum_{n=3}^{+\infty} nP(U=n) \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n2^{n-1}-2n}{3^{n-1}} \\
&= \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}-1-\frac{4}{3}\right)-2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-1-\frac{2}{3}\right) \\
&= \left(9-1-\frac{4}{3}\right)-2\left(\frac{9}{4}-1-\frac{2}{3}\right) \\
&= 8-\frac{4}{3}-\frac{9}{2}+2-\frac{4}{3} \\
&= 10-\frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E(U)=\frac{11}{2}}$

Corrigé exercice 92

Entraînement

Question de cours : *pas de problème majeur. Attention à la simulation en utilisant* `rand()`.

1) $Y(\Omega)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$. *Pour* $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$:
$P(Y>x)=P(X>x\cap 1-X>x)=P(x<X<1-x)=F(1-x)-F(x)$.
Donc $P(Y>x)=1-x-x=1-2x$.

$$\boxed{F_Y(x)=0 \text{ si } x\leqslant 0 \qquad F_Y(x)=2x \text{ si } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2} \qquad F_Y(x)=1 \text{ si } x\geqslant \frac{1}{2}}$$

On reconnaît une loi uniforme : $Y\hookrightarrow \mathscr{U}_{[0,1/2]}$ *donc :*

$$\boxed{\text{densité } g(x)=2 \text{ si } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \text{ et } 0 \text{ ailleurs} \qquad E(Y)=\frac{1}{4} \text{ et } V(Y)=\frac{1}{4\times 12}=\frac{1}{48}}$$

2) $Z(\Omega)=\left[\frac{1}{2},1\right]$. *Pour* $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$:
$P(Z\leqslant x)=P(X\leqslant x\cap 1-X\leqslant x)=P(1-x\leqslant X\leqslant x)=F(x)-F(1-x)$.
Donc $P(Z\leqslant x)=x-(1-x)=2x-1x$.

$$\boxed{F_Z(x)=0 \text{ si } x\leqslant \frac{1}{2} \qquad F_Z(x)=2x-1 \text{ si } \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1 \qquad F_Z(x)=1 \text{ si } x\geqslant 1}$$

On reconnaît une loi uniforme : $Z \hookrightarrow \mathscr{U}_{[1/2,1]}$ *donc :*

$$\boxed{\text{densité } h(x) = 2 \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ et } 0 \text{ ailleurs} \qquad E(Z) = \frac{3}{4} \text{ et } V(Y) = \frac{1}{4 \times 12} = \frac{1}{48}}$$

3) *Voilà la question difficile de cet exercice, par ailleurs facile.*
$R(\Omega) = [0,1]$. *Soit* $x \in [0,1]$ *:*

$$\begin{aligned}
P(R \leqslant x) &= P\left(\frac{Y}{Z} \leqslant x\right) = P_{(X\leqslant 1/2)}\left(\frac{Y}{Z} \leqslant x\right) P(X \leqslant 1/2) + P_{(X>1/2)}\left(\frac{Y}{Z} \leqslant x\right) P(X > 1/21/2) \\
&= P\left(\frac{Y}{Z} \leqslant x \cap X \leqslant 1/2\right) + P\left(\frac{Y}{Z} \leqslant x \cap X > 1/2\right) \\
&= P\left(\frac{X}{1-X} \leqslant x \cap X \leqslant 1/2\right) + P\left(\frac{1-X}{X} \leqslant x \cap X > 1/2\right) \\
&= P\left(X \leqslant \frac{x}{1+x} \cap X \leqslant 1/2\right) + P\left(X \geqslant \frac{1}{1+x} \leqslant x \cap X > 1/2\right)
\end{aligned}$$

Or $\qquad \dfrac{x}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 2x \leqslant 1+x \Longleftrightarrow x \leqslant 1$

De même $\qquad \dfrac{1}{1+x} \geqslant \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow 1+x \leqslant 2 \Longleftrightarrow x \leqslant 1$

Donc $P(R \leqslant x) = P\left(X \leqslant \dfrac{x}{1+x}\right) + P\left(X \geqslant \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{x}{1+x} + \left(1 - \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{2x}{1+x}$

Notons K la fonction de répartition de R.

$$K(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1+x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On montre sans difficulté que K est la fonction de répartition d'une variable à densité. On obtient une densité k en dérivant ...
$k(x) = K'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$ *si* $x \in [0,1]$ *et* $k(x) = 0$ *ailleurs* $\qquad$ *(on a complété en* 0 *et en* 1*).*

$E(R) = \displaystyle\int_0^1 x \times \frac{2}{(1+x)^2}\, dx = \int_0^1 \frac{2(1+x)-2}{(1+x)^2}\, dx = \left[2\ln(1+x) + \frac{2}{1+x}\right]_0^1$

$\boxed{E(R) = 2\ln(2) - 2}$

4) *Aucun problème :*

```
N=1000
X=rand(1,N)
T=1-X;
for k=1:N
    Y(k)=min(X(k),T(k))
    Z(k)=max(X(k),T(k))
    R(k)=Y(k)/Z(k)
end
```

```
disp(mean(R))
disp(2*log(2)-1)
// valeurs obtenues :  0.3883431   0.3862944
```

Corrigé exercice 93

HEC 2007 oral voie S

1) *Commençons par étudier rapidement la fonction h définie par* $h(x) = \dfrac{2x}{1+x} = 2 - \dfrac{2}{1+x}$ *avec* $x \in]0,1]$.

$h'(x) = \dfrac{2}{(1+x)^2}$. *h est strictement croissante.* $h(]0,1]) =]0,1]$.

Il en résulte que $h(U)(\Omega) =]0,1]$ *et donc* $X(\Omega) = [0,+\infty[$. *Soit* $x \in \boldsymbol{R}^+$

$$\begin{aligned}
P(X \leqslant x) &= P\left(-\ln\left(\frac{2U}{1+U}\right) \leqslant x\right) = P\left(\frac{2U}{1+U} \geqslant e^{-x}\right) \\
&= P(2U \geqslant e^{-x} + Ue^{-x}) = P\left((2-e^{-x})U \geqslant e^{-x}\right) \\
&= P\left(U \geqslant \frac{e^{-x}}{2-e^{-x}}\right) \\
&= 1 - \frac{e^{-x}}{2-e^{-x}} \\
&= 2 - \frac{2}{2-e^{-x}}
\end{aligned}$$

Donc $$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 2 - \dfrac{2}{2-e^{-x}} & si\ x \geqslant 0 \end{cases}}$$

2) *F est continue sur R (la vérification en* 0 *est immédiate),* C^1 *sur* $\boldsymbol{R}^*$*, donc X est une variable à densité et on obtient une densité en dérivant F partout où elle est dérivable (on complète après comme on veut).*

$\forall x \in \boldsymbol{R}^* \quad F'(x) = (-2) \times \dfrac{-(-e^{-x})}{(2-e^{-x})^2} = \dfrac{2e^{-x}}{(2-e^{-x})^2}$.

$$\boxed{f(x) = \frac{2e^{-x}}{(2-e^{-x})^2}\ si\ x \in \boldsymbol{R}^+\ et\ f(x) = 0\ sinon}$$

3) *Utilisons le théorème de transfert pour déterminer* $E(X)$. *Sous réserve d'absolue convergence de l'intégrale,*

$E(X) = \displaystyle\int_0^1 -\ln\left(\frac{2t}{1+t}\right)\, dt$. *On utilisera ici deux résultats connus :*

$\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\, dt = -1$ *et une primitive de la fonction* $\ln(t)$ *:* $t\ln(t) - t$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 (-\ln(2)-\ln(t)+\ln(1+t))\ dt \\
&= -\ln(2)-(-1)+\int_1^2 \ln(x)\ dx \quad \textit{en posant } x=1+t \\
&= -\ln(2)+1+\Big[x\ln(x)-x\Big]_1^2 \\
&= -\ln(2)+1+2\ln(2)-2-(-1) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$

$\boxed{E(X)=\ln(2)}$

4) *Déjà, on peut remarquer que $Y = X$ ou $Y = X^2$ donc $Y(\Omega) = \mathbf{R}^+$.*
Si on note G la fonction de répartition de Y, $G(x) = 0$ si $x \leqslant 0$. Pour $x \geqslant 0$, on utilise le système complet d'événements $\{(V = 0),(V = 1)\}$.

$$\begin{aligned}
G(x)=P(Y\leqslant x) &= P_{(V=0)}(Y\leqslant x)P(V=0)+P_{(V=1)}(Y\leqslant x)P(V=1) \\
&= \frac{1}{2}P(X^2\leqslant x)+\frac{1}{2}P(X\leqslant x) \\
&= \frac{1}{2}P(X\leqslant\sqrt{x})+\frac{1}{2}P(X\leqslant x) \\
&= \frac{1}{2}F(\sqrt{x})+\frac{1}{2}F(x)
\end{aligned}$$

5) *Voilà un script Scilab répondant à la question :*

```
function x=X()
    U=rand()
    x=-log(2*U/(1+U))
endfunction

function y=Y()
    if rand()<1/2 then v=1 else v=0 end
    x=X()
    y=v*x+(1-v)*x^2
endfunction
```

6) *Soit B la variable de Bernoulli de paramètre $\alpha = P(U > 1/2)$.*
On pose $Z = BX$.

a: *On remarque tout de suite que $(B = 0) \subset (Z = 0)$, donc*
$P(B=0)=\dfrac{1}{2}\leqslant P(Z=0)$.
Donc $P(Z = 0) \neq 0$. $\boxed{\textit{Z n'est pas une variable à densité}}$

b: *Un script :*

```
function z=Z()
    if rand() then z=X() else z=0 end
endfunction
```

Corrigé exercice 94

HEC 2008 oral voie E

1) Question de cours : *pas de problème. On peut même retrouver la formule si, par hasard, on avait perdu de vue son énoncé.*

2) *Pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$, *on pose* $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

a: • $Y_2 = X_1 X_2$. $Y_2(\Omega) = \{-1, 1\}$.
$P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = -1 \cap X_2 = -1) = p^2 + (1-p)^2$ *par indépendance de* X_1 *et* X_2.
$P(Y_2 = -1) = 1 - \left(p^2 + (1-p)^2\right)$
• $Y_3(\Omega) = \{-1, 1\}$. *On remarque que* $Y_3 = Y_2 X_3$
$P(Y_3 = 1) = P(Y_2 = 1 \cap X_3 = 1) + P(Y_2 = -1 \cap X_3 = -1)$
Donc $P(Y_3 = 1) = (p^2 + q^2) \times p + \left[1 - \left(p^2 + (1-p)^2\right)\right] \times (1-p)$ *par indépendance de* Y_2 *et* X_3.
$P(Y_3 = -1) = 1 - P(Y_3 = 1)$.

b: $Y_{n+1} = Y_n X_{n+1}$ *et, par le lemme des coalitions,* Y_n *et* X_{n+1} *sont indépendantes.*
$Y_k(\Omega) = \{-1, 1\}$ *pour tout* $k \in \mathbf{N}^*$ *comme produit de* 1 *et de* -1.
$P(Y_{n+1} = 1) = P(Y_n = 1 \cap X_{n+1} = 1) + P(Y_n = -1 \cap X_{n+1} = -1)$
Donc $P(Y_{n+1} = 1) = p_n \times p + (1 - p_n) \times (1-p)$ *par indépendance de* Y_n *et* X_{n+1}.
Donc $p_n = p_n(p - (1-p)) + 1 - p = p_n(2p-1) + 1 - p \quad (1)$.
On obtient donc une suite arithmético géométrique, initialisée par $p_1 = p$. *On peut même remarquer qu'on peut l'initialiser avec* $p_0 = 1$.
Si α *est un point fixe,* $\alpha = \alpha(2p-1) + 1 - p \quad (2)$.
En faisant $(1) - (2)$, *on obtient* $p_{n+1} - \alpha = (2p-1)(p_n - \alpha)$,
donc $p_n - \alpha = (2p-1)^n (p_0 - \alpha)$.
Ainsi $\qquad p_n = (2p-1)^n (1-\alpha) + \alpha$.
De (2), *nous tirons :* $\quad \alpha(2 - 2p) = 1 - p$ *donc* $\alpha = \frac{1}{2}$.

Donc $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad p_n = \frac{1}{2}\left[(2p-1)^n + 1\right]}$

c: Y_n *et* Y_{n+1} *sont indépendantes si* $P_{(Y_n=1)}(Y_{n+1} = 1) = P(Y_{n+1} = 1)$
Cela revient donc à $p_{n+1} = p \quad (3)$

$$\begin{aligned}
(3) \iff & \; p = \frac{1}{2}\left[(2p-1)^{n+1} + 1\right] \\
\iff & \; 2p_1 = (2p-1)^{n+1} \\
\iff & \; (2p-1)\left[1 - (2p-1)^n\right] = 0 \\
\iff & \; 2p - 1 = 0 \text{ ou } 2p - 1 = 1 \\
\iff & \; p = \frac{1}{2} \text{ car } p < 1
\end{aligned}$$

Y_n *et* Y_{n+1} *sont indépendantes pour* $p = \frac{1}{2}$.

3) *Posons* $X_i' = \frac{1}{2}(X_i + 1)$.
Si $X_i = 1$, $X_i' = 1$ *et si* $X_i = -1$, $X_i' = 0$. *Donc* $X_i' \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (2X_k' - 1) = 2\sum_{k=1}^{n} X_k' - n = 2B_n - n$ *avec* $B_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
$S_n(\Omega) \subset [\![-n,n]\!]$.
Si $k \in [\![-n,n]\!]$ $\quad P(S_n = k) = P(2B_n - n = k) = P\left(B_n = \frac{1}{2}(k+n)\right)$
Si $k+n$ *est impair,* $P(S_n = k) = 0$ *sinon* $k+n = 2j$ *et* $P(S_n = k) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.
$E(S_n) = 2E(B_n) - n = 2np - n = n(2p-1)$.
$V(S_n) = 4V(B_n) = 4np(1-p)$.

4) *Il y a plusieurs méthodes. En voici une (simple) :*

```
function y=S(n,p)
   u=0
   for k=1:n
       if rand()<p then u=u+1 else u=u-1 end
   y=u
 endfunction
```

Corrigé exercice 95 *HEC 2008 oral voie E*

1) Question de cours : *pas de problème, tout est maîtrisé (en principe).*

2) $X_i(\Omega) = \{0,1\}$. *On peut avoir une intuition, mais pour déterminer la loi de* X_i *rigoureusement, procédons par dénombrement. Prenons* Ω *l'ensemble de toutes les parties à* n *éléments pris dans les* $2n$ *boules initiales.* $Card(\Omega) = \binom{2n}{n}$.
$(X_i = 1)$ *est l'ensemble de ces parties contenant le numéro i.*
$Card(X_i = 1) = 1 \times \binom{2n-1}{n-1}$

Donc $P(X_i = 1) = \dfrac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n-1}{n-1}} = \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!\,(2n-1-n+1)!} \times \dfrac{n!\,n!}{(2n)!} = \dfrac{n}{2n}$

On peut conclure $\quad \boxed{X_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$

3) *Commençons par déterminer la loi de* $Z = X_iX_j$.
$Z(\Omega) = \{0,1\}$. $P(Z = 1) = P(X_i = 1 \cap X_j = 1)$.
On procède de même : $Card(X_i = 1 \cap X_j = 1) = 1 \times 1 \times \binom{2n-2}{n-2} = \binom{2n-2}{n-2}$.
$P(Z = 1) = \dfrac{(2n-2)!}{(n-2)!\,n!} \times \dfrac{n!\,n!}{(2n)!} = \dfrac{n(n-1)}{2n(2n-1)})\dfrac{n-1}{2(2n-1)}$
$X_i\,X_j \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{n-1}{2(2n-1)}\right)$.
Donc $E(X_iX_j) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$. *Puis*

$$Cov(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{n-1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n-1)-(2n-1)}{4(2n-1)}$$

$$\boxed{Cov(X_i,X_j) = -\ \frac{1}{4(2n-1)}}$$

4) **a:** *On a immédiatement* $S = \sum_{k=1}^{n} kX_k$.

b: $E(S) = E\left(\sum_{k=1}^{n} kX_k\right) = \sum_{k=1}^{n} kE(X_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k.$

Donc $\boxed{E(S) = \frac{n(n+1)}{4}}$

$$\begin{aligned} V(S) &= \sum_{k=1}^{n} V(kX_k) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Cov(iX_i, jX_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{4} + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\, j\left(-\ \frac{1}{4(2n-1)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{2(2n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\, j \end{aligned}$$

Calculons la double somme $A = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i\, j.$

$$A = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} i\, j = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{(j-1)j}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^3 - j^2\right)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{1}{24}\left(n(n+1)\times(3n(n+1)-2(2n+1)\right).$$

$$A = \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2) = \frac{1}{24}n(n-1)(n+1)(3n+2).$$

$$\begin{aligned} V(S) &= \frac{1}{24}\left[n(n+1)(2n+1)\right] - \frac{1}{48(2n-1)}\left[n(n-1)(n+1)(3n+2)\right] \\ &= \frac{1}{48(2n-1)}n(n+1)\left[2(2n-1)(2n+1)-(n-1)(3n+2)\right] \\ &= \frac{1}{48(2n-1)}n(n+1)(5n^2+n) \end{aligned}$$

Après ces calculs assez peu sympathiques $\boxed{V(S) = \frac{1}{48}\frac{n^2(n+1)(5n+1)}{2n-1}}$

5) $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Notons Y *le nombre de boules ne portant pas le numéro* 0.

$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *et* $Z = n - Y$.

Donc $E(Z) = n - \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n - n\times\frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$

Pour la loi de Y, on peut dénombrer : $(Z = k)$ signifie "choisir k boules numéro 0 parmi les n portant le numéro 0 puis $n - k$ parmi les n autres.

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad P(Z=k) = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} \qquad E(Z) = \frac{n}{2}}$$

Les initiés auront reconnu, pour Z, une loi hypergéométrique de paramètres $2n$, n et $\frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 96

HEC 2008 oral voie E

1) *Pas de problème pour la question de cours.*

2) *On sait que M_n est un estimateur sans biais de $E(Z_k) = \frac{N+1}{2}$ car $Z_k \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,N]\!]}$.*
Posons $Y_n = 2M_n - 1$. $E(Y_n) = 2E(M_n) - 1 = N$.
$\boxed{Y_n = 2M_n - 1 \text{ est un estimateur sans biais de } N}$

3) *On pose $S_n = \max(Z_1, \dots, Z_n)$.*

a: *$X_n(\Omega) = [\![1,N]\!]$. Si on note F_n la fonction de répartition de S_n, on sait déjà que $F_n(k) = 0$ si $k < 0$ et $F_n(k) = 1$ si $k \geqslant N$.*
Si $k \in [\![1,N]\!]$ $\qquad (X_n \leqslant k) = (Z_1 \leqslant k) \cap (Z_2 \leqslant k) \cap \dots (Z_n \leqslant k)$ donc
$F_n(k) = P(S_n \leqslant k) = \prod_{i=1}^{n} P(Z_i \leqslant k)$ par indépendance des Z_i et ainsi,
$F_n(k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

$$\boxed{F_n(k) = 0 \text{ si } k < 1,\ F_n(k) = 1 \text{ si } k \geqslant N \text{ et } F_n(k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n \text{ si } k \in [\![1,N]\!]}$$

b: *Question très classique, rencontrée déjà plusieurs fois dans ce recueil.*

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{k=1}^{N} kP(S_n = k) = \sum_{k=1}^{N} k\left(P(S_n \geqslant k) - P(S_n \geqslant k+1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N} kP(S_n \geqslant k) - \sum_{k=1}^{N} kP(S_n \geqslant k+1) \\
&\qquad \textit{on décale d'un cran l'indice dans la 2-eme somme} \\
&= \sum_{k=1}^{N} kP(S_n \geqslant k) - \sum_{k=2}^{N+1} (k-1)P(S_n \geqslant k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} kP(S_n \geqslant k) - \sum_{k=2}^{N+1} kP(S_n \geqslant k) + \sum_{k=2}^{N+1} P(S_n \geqslant k) \\
&= 1P(Y \geqslant 1) - (N+1)P(S_n \geqslant N+1) + \sum_{k=2}^{N+1} P(S_n \geqslant k) \\
&= 1 - 0 + \sum_{k=2}^{N+1} P(S_n \geqslant k) = \sum_{k=1}^{N} P(S_n \geqslant k)
\end{aligned}$$

c: *D'après ce qui précède*

$$\begin{aligned}
E(S_n) = \sum_{k=1}^{N} P(S_n \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n} [1 - P(S_n < k)] \\
&= N - \sum_{k=1}^{N} P(S_n \leqslant k-1) \\
&= N - \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k-1}{N}\right)^n \\
&= N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

Continuons en comparant la somme à une intégrale.
Posons $A_n = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$ *et* $f(x) = \left(\frac{x}{N}\right)^n$.
f *est continue sur* $\mathbf{R}^+$, *positive et croissante.*
Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, *si* $x \in [k, k+1]$, $f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k+1)$. *En intégrant,* $\int_k^{k+1} f(k)dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k+1)\,dx$ *donc* $f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k+1)$
On somme $A_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_0^N f(x)\,dx$.
Notons $I_n = \int_0^N f(x)\,dx$. $I_n = \int_0^N \left(\frac{x}{N}\right)^n dx = \left[\frac{N}{n+1}\left(\frac{x}{N}\right)^{n+1}\right]_0^N = \frac{N}{n+1}$.
Donc $A_n \leqslant \frac{N}{n+1}$ *ou encore,* $-A_n \geqslant -\frac{N}{n+1}$.

$E(S_n) = N - A_n \geqslant N - \dfrac{N}{n+1}$. *C'est l'inégalité attendue.*

On a donc que $N - \dfrac{N}{n+1} \leqslant E(S_n) \leqslant N$, *donc, par le théorème d'encadrement,* $\lim\limits_{n\to+\infty} E(S_n) = N$.
Cela signifie que S_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N

Corrigé exercice 97

HEC 2009 oral voie E

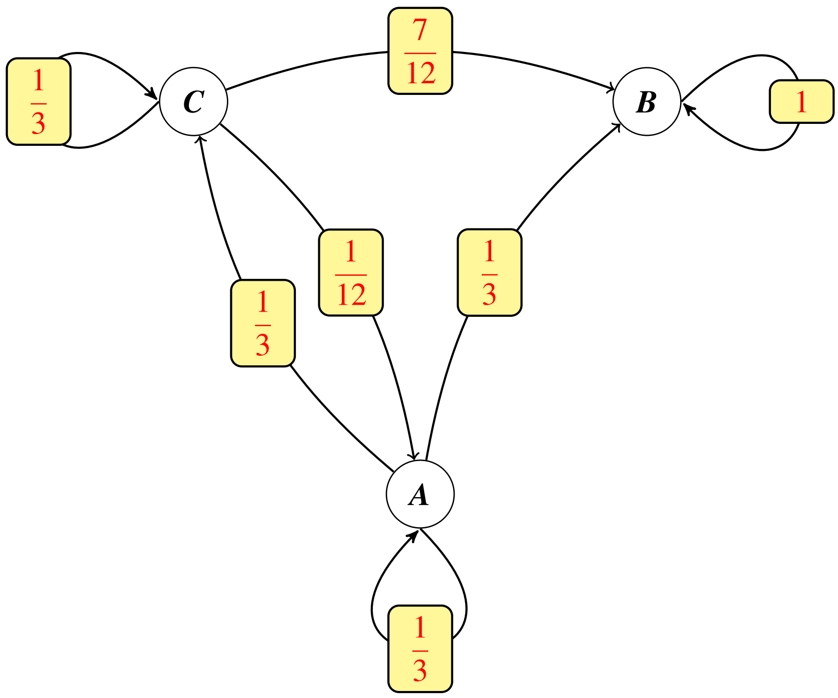
1) Question de cours : *pas de problème. On pourra énoncer les deux formules, pour un système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$ où I est un ensemble dénombrable d'indices :*

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)\, P(A_i)$$

2) *Au départ, le client choisit au hasard donc* $\boxed{p_1 = q_1 = r_1 = \dfrac{1}{3}}$

3) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n + q_n + r_n = 1$.*

4) *On peut traduire les hypothèses par le graphe de transition suivant :*



En suite, on utilise le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n).

$$\begin{aligned} p_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}P(A_n) + 0P(B_n) + \frac{1}{12}P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}\, p_n + \frac{1}{12}\, r_n \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} q_{n+1} = P(B_{n+1}) &= P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}P(A_n) + 1P(B_n) + \frac{7}{12}P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}\ p_n + q_n + \frac{7}{12}\ r_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{n+1} = P(C_{n+1}) &= P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}P(A_n) + 0P(B_n) + \frac{1}{3}P(C_n) \\ &= \frac{1}{3}\ p_n + \frac{1}{3}\ r_n \end{aligned}$$

On peut remarquer (ce qui rendra de grands services) que ces relations sont aussi valables pour $n = 0$ en prenant $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ et $r_0 = 0$. On peut résumer cela en écrivant :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/12 \\ 1/3 & 1 & 7/12 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \ \text{avec}\ X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

5) *Soit $n \geqslant 2$.* $p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{12}r_{n-1} = \left(r_n - \frac{1}{3}r_{n-1}\right) + \frac{1}{12}r_{n-1}$.

Donc $\boxed{\forall n \geqslant 2 \qquad p_n = r_n - \frac{1}{4}r_{n-1}}$

Cette formule est encore vraie pour $n = 1$.

6) *Pour $n \geqslant 1$* $\qquad r_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}r_n = \frac{1}{3}\left(r_n - \frac{1}{4}r_{n-1}\right) + \frac{1}{3}r_n$.

Donc $\boxed{\forall n \geqslant 1 \quad r_{n+1} = \frac{2}{3}r_n - \frac{1}{12}r_{n-1}}$

La suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, initialisée par $r_0 = 0$ et $r_1 = \frac{1}{3}$.

L'équation caractéristique s'écrit : $\qquad (E) \quad x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} = 0.$

$(E) \sim 12x^2 - 8x + 1 = 0$. *On trouve $\Delta = 4$ et deux racines $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{6}$.*

On a donc $r_n = a\left(\frac{1}{2}\right)^n + b\left(\frac{1}{6}\right)^n$. On trouve a et b avec les conditions initiales $r_0 = 0$ et $r_1 = \frac{1}{3}$.

Donc $\begin{cases} a + b &= 0 \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b &= \frac{1}{3} \end{cases}$

Cela donne $a = 1$ et $b = -1$. Donc $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbf{N} \quad r_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n}$

Ensuite nous utilisons la relation de la question 5, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
p_n &= r_n - \frac{1}{4}r_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^n \left(-1 + \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Cette formule est également valable pour $n = 0$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \quad p_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

7) *Il ne manque plus que q_n. On utilise $q_n = 1 - p_n - r_n$.*

$\boxed{\forall n \in N \qquad q_n = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

On sait que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$. *Donc* $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} r_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} q_n = 1}$

C'est logique car $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est un vecteur invariant de la matrice A et correspond à un état stable de la chaîne de Markov.*

Corrigé exercice 98

HEC 2009 oral voie E

1) Question de cours : *pas de problème.*

2) *Soit x un réel de* $]0,1[$.

a: *C'est une question très classique, pas très détaillée par contre ici.*

En préalable convient de se souvenir de : $\forall t \in \mathbf{R} - \{1\} \qquad \sum_{t=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^x t^k\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \qquad \textbf{c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

b: *Posons* $R_n = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$.

Si $t \in [0,x] \qquad 1 - x \leqslant 1 - t \leqslant 1$ *donc* $\frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}$ *et enfin* $0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{t^n}{1-x}$

On intègre pour t variant entre 0 *et x (bornes dans le bon sens) :*
$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt$ *donc* $0 \leqslant R_n \leqslant \frac{x^n}{1-x}$.
Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1-x} = 0$ *car* $x \in]0,1[$, *donc* $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

c: $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = -\ln(1-x) + \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$
Donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Cela prouve la convergence de la série de terme général $\frac{x^k}{k}$ *ainsi que l'égalité :*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

3) *Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, p)$ *qui suit une loi géométrique de paramètre p* ($0 < p < 1$)*.*
On pose : $Y = \frac{1}{X}$.

a: $X(\omega) = \mathbf{N}^*$ *donc* $Y(\Omega) = \frac{1}{k}$ $\quad k \in \mathbf{N}^*$.
$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$.

b: *On utilise le théorème de transfert.*
$E(Y)$ *existe si et seulement si* $\sum_{k\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{k^m} P(X=k)$ *est absolument convergente.*
Convergence et absolue convergence sont identiques, ici ,car Y est positive.
$\sum_{k\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{k^m} P(X=k) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k^m}\right) \times \frac{p}{1-p}$
Posons $u_k = \frac{(1-p)^m}{k^m}$. *On a alors* $\frac{u_k}{\frac{1}{k^2}} = \frac{(1-p)^k}{k^{m-2}}$
Ce dernier terme tend vers 0 *quand k tend vers* $+\infty$ *(évident si* $m \geqslant 2$, *par domination de la fonction exponentielle sur la fonction puissance si* $m=1$*).*
Donc $u_k = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ *donc* $\sum u_k$ *converge.* $\boxed{\forall m \in \mathbf{N}^* \quad E(Y^m) \text{ existe}}$

c: *Quand* $m=1$, $E(Y) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^k}{k}\right) \times \frac{p}{1-p} = -\ln(1-(1-p)) \times \frac{p}{1-p}$.
Donc $\boxed{E(Y) = \frac{-p\ln(p)}{1-p}}$

Corrigé exercice 99

HEC 2009 oral voie E

1) Question de cours : *pas de problème.*

2) **a:** $S_1(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. $P(S_1 = -1) = n$, $P(S_1 = 0) = r$, *et* $P(S_1 = 1) = b$.
$E(S_1) = -n + b$. $E(S_1^2) = n + b$ *donc*
$V(S_1) = E(S_1^2) - E(S_1)^1 = (n+b) - (b-n)^2$.
$E(S_k) = kE(S_1) = k(b-n)$ *du fait de la linéarité de E.*
$V(S_k) = kV(S_1) = k\left[n + b - (b-n)^2\right]$ *du fait de l'indépendance des* Z_i.

b: $E(t^{S_k}) = \sum_{i=-k}^{+k} t^i P(S_k = i)$. *Mais cela ne donne pas grand chose.*
$t^{S_k} = t^{Z_1+\ldots+Z_k} = t^{Z_1} \times \ldots \times t^{Z_k}$.
Du fait de l'indépendance $E(t^{S_k}) = E(t^{Z_1}) \times \ldots \times E(t^{Z_k}) = E(t^{S_1})^k$
Or $E(t^{S_1}) = t^{-1}P(S_1 = -1) + t^0 P(S_1 = 0) + t^1 P(S_1 = 1) = \dfrac{n}{t} + r + bt$

Donc $\boxed{g_k(t) = E(t^{S_k}) = \left(\dfrac{n}{t} + r + bt\right)^k}$

c: *Reprenons* $g_k(t) = \sum_{i=-k}^{+k} t^i P(S_k = i)$.

$g_k'(t) = \sum_{i=-k}^{i=k} i t^i P(S_k = i)$ *donc* $g_k'(1) = \sum_{i=-k}^{i=k} iP(S_k = i) = E(S_k)$ ***c.q.f.d.***
$g_k'(t) = k\left(-\dfrac{n}{t^2} + b\right)\left(\dfrac{n}{t} + r + bt\right)^{k-1}$ *donc* $g_k'(1) = k(b-n)(n+b+r)^{k-1}$
Comme $n + b + r = 1$, $g_k'(1) = k(b-n)$ *cela marche.*

3) **a:** $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(b)$ $E(X_1) = \dfrac{1}{b}$ $V(X_1) = \dfrac{1-b}{b} = n + rb$

b: *Soit* A_k *l'événement « tirer une boule rouge aux* $k-1$ *premiers tirages ».*
$P_{X_1=k}(A_k) = \left(\dfrac{r}{r+n}\right)^{k-1}$ *car, durant les* $k-1$ *premiers tirages, on ne tire que des rouges ou des noires)*

c: $P_{(X_1=k)}(X = i) = \dbinom{k-1}{i}\left(\dfrac{r}{n+r}\right)^i\left(\dfrac{n}{r+n}\right)^{k-1-i} = \left(\dfrac{1}{r+n}\right)^{k-i}\dbinom{k-1}{i} r^i n^{k-1-i}$

d: *On utilise la formule des probabilités totales :*

$$\begin{aligned} P(W = i) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(_{(X_1=k)}(W = i)P(X_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{r+n}\right)^{k-i}\binom{k-1}{i} r^i n^{k-1-i} b(n+r)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{k-1}{i} r^i n^{k-1-i} b \end{aligned}$$

4) **a:** • *Si* $k > l$, $(X_1 = k \cap Y_1 = l)$ *sont les tirages du type* $(r, r, \ldots, r, n, \overline{r}, \overline{r}, \ldots, v, \ldots\ldots$
Donc $P(X_1 = k \cap Y_1 = l) = r^{k-1} \times n \times (n+r)^{l-k-1} \times b$
• *Si* $k = l$, $P(X_1 = k \cap Y_1 = l) = 0$
• *Si* $k < l$ $P(X_1 = k \cap Y_1 = l) = r^{k-1} \times b \times (b+r)^{k-l-1} \times n$
Il est clair que $P(X_1 = 1 \cap Y_1 = 1) = 0 \neq P(X_1 = 1) \times P(Y_1 = 1$, *donc* X_1 *et* Y_1 *ne sont pas indépendantes.*

b: *Si* $r=0$*, pas de rouge.*
- $P(X_1=1\cap Y_1=l)=b^{l-1}n$ *si* $l>1$
- $P(X_1=k\cap Y_1=l)=0$ *si* $l\neq 1$ *et* $k\neq 1$
- $P(X_1=k\cap Y_1=1)=n^{k-1}b$ *si* $k>1$

$$\begin{aligned}
E(X_1\,Y_1) &= \sum(x_i,y_j)x_iy_jP(X_1=x_i\cap Y_1=y_j)\\
&= \sum_{l>1} lP(X_1=1\cap Y_1=l)+\sum_{k>1} kP(X_1=k\cap Y_1=1)\\
&= \sum_{l=2}^{+\infty} lb^{l-1}n+\sum_{k=2} kn^{n-1}b = n\left[\frac{1}{(1-l)^2}-1\right]+k\left[\frac{1}{(1-n)^2}-1\right]\\
&= \frac{n}{n^2}-n+\frac{b}{b^2}-b=\frac{1}{n}+\frac{1}{b}-1=\frac{1}{nb}-1
\end{aligned}$$

Ensuite, $C(X_1,Y_1)=E(X_1Y_1)-E(X_1)E(Y_1)=\frac{1}{nb}-1-\frac{1}{n}\times\frac{1}{b}=-1$

$\boxed{Cov(X_1,Y_1)=-1}$

Corrigé exercice 100

HEC 2010 oral voie E

1) *Question de cours : pas de problème. On pourra citer le fait qu'une loi géométrique est "sans mémoire".*

2) **a:** T_h *est le nombre d'années pour obtenir un succès, dans une répétition d'expériences identiques et indépendantes.*
Donc $T_h \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
$T_h(\Omega)=\mathbf{N}^*$ *et* $\forall k\in\mathbf{N}^*$ $\quad P(T_h=k)=q^{k-1}p$

b: $T=\max\limits_{h\in[\![1,n]\!]}(T_h)$.
$T(\Omega)=\mathbf{N}^*$ $P(T\leqslant k)=P(T_1\leqslant k\cap T_2\leqslant k\cap\ldots\cap T_n\leqslant k)$
Donc $P(T\leqslant k)=P(T_1\leqslant k)\times P(T_2\leqslant k)\times\ldots\times P(T_n\leqslant k)$ *par indépendances des* T_h.
Or $P(T_h\leqslant k)=1-P(T_h>k)$ *et* $P(T_h>k)=q^k$ *car cela veut dire que l'on a k échecs pour commencer.*
Donc $P(T_h\leqslant k)=1-q^k$ *et donc* $P(T\leqslant k)=(1-q^k)^n$.
Pour $k\geqslant 2$, $P(T=k)=P(k-1<T\leqslant k)=P(T\leqslant k)-P(T\leqslant k-1)$
donc $P(T=k)=(1-q^k)^n-(1-q^{k-1})^n$.
Pour $k=1$, $P(T=1)=p^n$*. La formule précédente marche encore.*

$\boxed{T(\Omega)=\mathbf{N}^* \text{ et } \forall k\in\mathbf{N}^* \quad P(T=k)=(1-q^k)^n-(1-q^{k-1})^n}$

3) **a:** *On sait que, si* $x\in]-1,1[$, $\lim\limits_{N\to+\infty} Nx^N=0$ *donc, comme* $q^k\in]0,1[$,

$$\lim_{N\to+\infty} N(q^k)=0 \text{ et donc } \qquad \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kN(q^k)^N=0.$$

b: *Posons* $S_N=\sum\limits_{j=1}^{N}(q^k)^{j-1}$.

$$S_N=\sum_{i=0}^{N-1}(q^k)^i=\frac{1-(q^k)^N}{1-q^k}.$$

Or $\lim_{N\to+\infty}(q^k)^N = 0$ *donc* $\lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{1}{1-q^k}$.

Ainsi $\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{N}(q^k)^{j-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{1-q^k}$.

Où l'énoncé nous entraîne-t-il ?

c: *La question est ambiguë. On essaye d'avancer.*
Sous réserve d'absolue convergence (donc de convergence ici) :
$E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(t=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left[(1-q^k)^n - (1-q^{k-1})^n\right]$.
Notons A_N la somme partielle de rang N de cette série.

$$\begin{aligned}
A_N &= \sum_{k=1}^{N} k(1-q^k)^n - \sum_{k=1}^{N} k(1-q^{k-1})^n \quad \textit{on pose } j = k-1\\
&= \sum_{k=1}^{N} k(1-q^k) - \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)(1-q^j)^n\\
&= \sum_{k=1}^{N} k(1-q^k) - \sum_{k=0}^{N-1} k(1-q^k) - \sum_{k=0}^{N-1} (1-q^k)^n\\
&= N(1-q^N) - \sum_{k=0}^{N-1}(1-q^k)^n
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1}(1-q^k)^n &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(q^k)^j\\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^j(q^j)^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{N-1}(-1)^k\binom{n}{k}(q^k)j\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{N}(q^j)^{j-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{N}(q^k)^{j-1} + \binom{n}{0}\sum_{j=1}^{N}1^{j-1}\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{N}(q^k)^{j-1} + N
\end{aligned}$$

Donc $A_N = N(1-q^N)^n - \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{N}(q^k)^{j-1}+N\right)}_{B_N}$. *De plus :*

$$\begin{aligned} N(1-q^n)^n &= N\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-q^N)^k \\ &= N+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k N(q^k)^N \\ &\to N \text{ d'après a :} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{N\to+\infty} A_N &= N+0-\lim_{N\to+\infty}\sum_{k+1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{N}(q^k)^{j-1}-N \\ &= -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{1-q^k} \end{aligned}$$

On a donc $E(T) = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{1-q^k}$.
Il est possible que la solution attendue ressemble à cela, mais ce n'est pas certain. cette question est assez surréaliste.

Corrigé exercice 101

HEC 2010 oral voie E

I) Question de cours : pas de problème..
II) Soit g la fonction définie sur $\boldsymbol{R}^{+*}$ *à valeurs réelles telle que :*

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad g(x) = x(\ln x)^2$$

1) *g est* C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$.
$\forall x \in \boldsymbol{R}^{+*} \quad g'(x) = (\ln(x))^2 + x\times 2\,\frac{1}{x}\ln(x) = \ln(x)\,[\ln(x)+2]$.
Pour $x > 1$, $g'(x) > 0$ *donc g est strictement croissante et continue de* $I =]1,+\infty[$ *dans* $g(I) =]0,+\infty[$.
Donc g réalise bien une bijection de $]1,+\infty[$ *dans* $]0,+\infty[$.
Soit h la bijection réciproque de la restriction de g à l'intervalle $]1,+\infty[$.

2) **a:** *Soit* $x > 0$.

$$\begin{aligned} \ln(h(x))+2\ln(\ln(h(x)) &= \ln\left[h(x)\times\ln\left(\ln(x)^2\right)\right] \\ &= \ln[g(\ln x)] \\ &= \ln(x) \qquad \text{car } g\circ h = id \qquad \textbf{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

b: *Remarquons tout de suite que, d''après cette relation,* $\ln(h(x)) \leqslant \ln(x)$ *quand x voisin de* $+\infty$.
Par ailleurs $g(h(x)) = x$ *donc* $h(x)\,(\ln[h(x)])^2 = x$ *donc*

$$h(x) = \frac{x}{[\ln(h(x))]^2}$$

Cherchons un équivalent de $\ln(h(x))$.

D'après notre remarque, $\ln([\ln(h(x))] \leqslant \ln(\ln(x))$ *donc* $0 \leqslant \dfrac{\ln([\ln(h(x))]}{\ln(x)} \leqslant \dfrac{\ln(\ln(x)}{\ln(x)}$.

Or $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln(u)}{u}$ *donc, en prenant* $u = \ln(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln(x)}{\ln(x)} = 0$.

Par le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln([\ln(h(x))]}{\ln(x)} = 0$.

En utilisant 2) a, on en déduit que $\dfrac{\ln(h(x)}{\ln(x)} = 1 - 2\dfrac{\ln([\ln(h(x))]}{\ln(x)}$ *et donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(h(x)}{\ln(x)} = 1$

Donc $\ln(h(x)) \sim \ln(x)$. *On peut donc conclure* $\boxed{h(x) \sim \dfrac{x}{(\ln(x))^2} \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty}$

III) Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2g(|x|)} & si\ |x| < \dfrac{1}{e}\ et\ x \neq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ *donc* f *est paire.* f *est positive et continue sauf éventuellement en* $x_1 = -\dfrac{1}{e}$ *et* $x_2 = \dfrac{1}{e}$ *et* $x_3 = 0$.

Il reste à vérifier que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. *Sous réserve de convergence*

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{1/e} \frac{1}{2g(|t|)}\,dt = \int_0^{1/e} \frac{1}{t(\ln(t))^2}\,dt$ *(impropre pour la borne 0).*

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^{1/e} \frac{1}{t(\ln(t))^2}\,dt &= \left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_\varepsilon^{1/e} \quad avec\ u = \ln(x) \\ &= \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_\varepsilon^{1/e} \\ &= -\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{\ln(\varepsilon}\right) \\ &\to 1\ quand\ \varepsilon \to 0 \end{aligned}$$

Donc f *est bien une densité.*

2) *Pour* $t \in]0, 1/e]$ $\quad \dfrac{t}{g(t)} = \dfrac{1}{(\ln(t))^2}$ *tend vers* 0 *quand* t *tend vers* 0. *On peut donc prolonger la fonction* $t \mapsto tf(t)$ *en* 0.

Elle est impaire, continue sur le segment $\left[-\dfrac{1}{e}, +\dfrac{1}{e}\right]$, *donc* $\boxed{E(X) \text{ existe et } E(X) = 0}$

3) *Si* $t \in]0, 1/e]$ $\quad t^2 f(t) = \dfrac{t}{(\ln(t))^2}$ $\quad$ *fonction prolongeable par continuité en* 0.

Donc $E(X^2)$ *existe et X possède une variance.*

Corrigé exercice 102

HEC 2010 oral voie E

1) *Question de cours : classique et sans problème.*

2) $Y(\omega) = [\![1,n]\!]$. *On notera* $q = 1-$.
On utilise le système complet d'événements $(X=i)_{i\in[\![0,n]\!]}$. *Pour* $k \in [\![1,n]\!]$, *la formule des probabilités totales donne :*

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} P_{(X=i)}(Y=k)\times P(X=i)\\
&= P_{(X=0)}(Y=k)\times P(X=0) + \sum_{i=i}^{n} P_{(X=i)}(Y=k)\times P(X=i)\\
&= \frac{1}{n}\times q^n + P_{(X=k)}(Y=k)\times P(X=k)\\
&= \frac{q^n}{n} + \binom{n}{k} p^k q^{n-k}\times 1
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{Y(\Omega) = [\![1,n]\!] \text{ et } \forall k \in Y(\Omega) \qquad P(Y=k) = \frac{q^n}{n} + \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$

3) $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\frac{q^n}{n}$.
Or, on sait que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np$ *(espérance d'une loi binomiale).*
Donc $E(Y) = np + \frac{q^n}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}$. $\boxed{E(Y) = np + \frac{(n+1)q^n}{2}}$

4) **a:** *On traduit la probabilité conditionnelle :*

$$\begin{aligned}
P_{(X\neq 0)}(Y=k) &= \frac{P(Y=k\cap X\neq 0)}{P(X\neq 0)}\\
&= \frac{1}{P(X\neq 0)}\sum_{i=1}^{n} P(Y=k\cap X=i)\\
&= \frac{1}{1-P(X=0)}\times P(Y=k\cap X=k)\\
&= \frac{1}{1-P(X=0)}\times P(X=k)\\
&= \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1-q^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{P_{(X\neq 0)}(Y=k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1-q^n}}$$

b: $E(Y\ /\ X \neq 0) = \sum_{k=1}^{n} kP_{(X\neq 0)}(Y=k) = \dfrac{1}{1-q^n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}pq^{n-k}$

On peut donc conclure $\boxed{E(Y\ /\ X \neq 0) = \dfrac{np}{1-q^n}}$

Corrigé exercice 103

HEC 2010 oral voie E

1) *Question de cours : Pas de problème. Pour la variance, ne pas confondre définition et formule de Huygens. Concernant l'interprétation, on citera la notion de moyenne et d'écart quadratique moyen de la variable aléatoire à sa moyenne.*

2) *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère une variable aléatoire X (discrète ou possédant une densité) prenant toutes ses valeurs dans l'intervalle $[a,b]$ et ayant un moment d'ordre 2.*

a: *En notant $m = E(X)$, $V(X) = E((X-m)^2) = E(X^2) - m^2$ (formule de Huygens).*
$E([X-\lambda]^2) = E(X^2 - 2\lambda X + \lambda^2) = E(X^2 - 2\lambda m + E(X^2)$.
On obtient donc un trinôme du second degré : $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda m + E(X^2)$
$P'(\lambda) = 2(\lambda - m)$ *et* $P(m) = E(X^2) - m^2 = V(X)$.

λ	$-\infty$	m	$+\infty$
$P'(\lambda)$	$-$	0	$+$
P	$\searrow$	$V(X)$	$\nearrow$

On a donc bien : $\forall \lambda \in \boldsymbol{R} \qquad E((X-\lambda)^2) \geqslant V(X)$

b: *En prenant* $\lambda = \dfrac{a+b}{2}$, $(X-\lambda) \leqslant \dfrac{b-a}{2}$.
Donc $(X-\lambda)^2 \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
$V(X) \leqslant (X-\lambda)^2 \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
C'est le résultat attendu.

3) *Dans la suite, X est une variable discrète ayant un moment d'ordre 2.*

a: *On suppose que X suit une loi uniforme sur $\{a,b\}$, c'est à dire :*

$$\mathbf{P}(X=a) = \mathbf{P}(X=b) = \frac{1}{2}$$

Dans ce cas $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $E(X^2) = a^2 \times \dfrac{1}{2} + b^2 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \left[\dfrac{a+b}{2}\right]^2 = \dfrac{1}{4}\left(2(a^2+b^2) - (a^2+2ab+b^2)\right]$
Donc $V(X)\dfrac{(b-a)^2}{4}$. ***c.q.f.d.***

b: *Étude d'une réciproque : on suppose que* $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

On a donc $\lambda = \dfrac{a+b}{2}$, *et* $(X-\lambda)^2 = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$, *d'après 2) b.*

Donc $X - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b-a}{2}$ *ou* $X - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a-b}{2}$, *donc* $X = b$ *ou* $X = a$.

Donc $X(\Omega) \subset \{a,b\}$. $V(X) \neq 0$ *donc X prend au moins deux valeurs distinctes donc* $X(\Omega) = \{a,b\}$.

Si $P(X=a) = p$, $E(X) = ap + b(1-p) = \dfrac{a+b}{2}$ *donc* $2p(a-b) = (a+b) - 2b$ *donc* $p = \dfrac{1}{2}$. *X suit bien une loi uniforme sur* $\{a,b\}$.

4) *L'écart quadratique moyen de X à* $E(X)$ *est majoré par l'écart quadratique de a à b sur 4. Cet écart est un maximum, atteint uniquement pour la loi uniforme sur* $\{a,b\}$.

Corrigé exercice 104

HEC 2010 oral voie E

Une fois de plus, on retrouve dans cet exercice une une situation rencontrée assez récemment dans un autre exercice. Ici, on donne la loi du couple pou démarrer, au lieu des lois de X et Y sachant X = k.

1) *Question de cours : pas de problème.*

2) **a:** *Commençons par la loi de X.*

• *Si* $j \neq 0$: $P(X=j) = \sum_{k=1}^{n} P(X=j \cap Y=k) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$

• *Si* $j = 0$: $P(X=0) = \sum_{k=1}^{n} P(X=0 \cap Y=k) = n \times \dfrac{q^n}{n} = q^n$.

Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)}$

Loi de Y : soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{j=0}^{n} P(X=j \cap Y=k) \\ &= P(X=0 \cap Y=k) + \sum_{j=1}^{n} P(X=j \cap Y=k) \\ &= \frac{q^n}{n} + P(X=k \cap Y=k) \\ &= \frac{q^n}{n} + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

b: *Immédiatement (sans calcul)* $\boxed{E(X) = np}$

3) *Soit j un entier tel que* $0 \leqslant j \leqslant n$

a: $P_{(X=j)}(Y=k) = \dfrac{P(X=j \cap Y=k)}{P(X=j)} = \begin{cases} 0 & si\ k \neq j\ et\ j \neq 0 \\ \dfrac{1}{n} & si\ j=0 \\ 1 & si\ k=j \neq 0 \end{cases}$

b: $E(Y/X=j) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP_{(X=j)}(Y=k)$.

- *Si* $j=0$*, la loi de* Y *est la loi uniforme sur* $[\![1,n]\!]$ *donc* $E(Y/(X=0)) = \dfrac{n+1}{2}$
- *Si* $j \neq 0$*,* $Y=j$ *(constante) donc* $E(Y/(X=j)) = j$.

4) **a:** $P(X=1 \cap Y=1) = {}_n1pq^{n-1} = npq^{n-1}$.
$P(X=1) \times P(Y=1) = npq^{n-1} \times \left(\dfrac{q^n}{n} + npq^{n-1}\right)$

$$P(X=1 \cap Y=1) = P(X=1) \times P(Y=1) \iff \frac{q^n}{n} + npq^{n-1} = 1$$

Posons $f(x) = \dfrac{x^n}{n} + n(1-x)x^{n-1} + 1$ *pour* $x \in [0,1]$.
$f'(x) = x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n^2x^{n-1} = n(n-1)x^{n-2} + x^{n-1}(1-n^2) = (n-1)x^{n-2}(n-(1+n)x)$.

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-1+\frac{1}{n}$

$M = f\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{n^{n-1}}{(n+1)^n} + \dfrac{n^n}{(n+1)^n} - 1 = \dfrac{n^{n-1}}{(n+1)^{n-1}} - 1 < 0$
Donc $f(x) = 0$ *est impossible.*
Il en résulte que $P(X=1 \cap Y=1) \neq P(X=1) \times P(Y=1)$ *et donc* X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*

b: $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. *On sait que* $E(X) = np$.
$E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{q^n}{n} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$.

Donc $E(Y) = \dfrac{q^n}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \dfrac{n+1}{2}\, q^n + np$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} j\times kP(X=j\cap Y=k) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j\times jP(X=j\cap Y=j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^2 P(X=j) \\ &= E(X^2) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(X^2)-E(X)E(Y) = V(X)+E(X)^2-E(X)E(Y) \\ &= npq+(np)^2-np\left(\frac{n+1}{2}\, q^n+np\right) \\ &= np\left(q+np-\frac{n+1}{2}\, q^n-np\right) \\ &= npq\left(1-\frac{n+1}{2}q^{n-1}\right) \end{aligned}$$

$$Cov(X,Y)=0 \Longleftrightarrow q^{n-1}=\frac{2}{n+1} \Longleftrightarrow q=\left(\frac{2}{n+1}\right)^{1/(n-1)}$$

c: *Que conclure ?*

Corrigé exercice 105

HEC 2010 oral voie E

1) *Question de cours : pas de problème. Ne pas confondre la définition et le fait que c'est* $E(X^r)$*, sous réserve d'existence (résultat du théorème de transfert).*

2) *Cela commence en douceur. On calcule ou on devine :* $\boxed{A=1 \text{ et } B=-1}$

3) **a:** f *est positive (à condition que* k *soit positif) et continue sur* $\mathbf{R}$ *sauf éventuellement en* 1.

Donc f *est une densité* $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1.$

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = k\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)}\,dt$

Posons $J(A)=\displaystyle\int_{1}^{A} \frac{1}{t(1+t)}\,dt$ *pour* $A>1$.

$$\begin{aligned} J(A) &= \int_1^A\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt = \int_1^A \frac{1}{t} - \int_1^A \frac{1}{1+t}\,dt \\ &= \Big[\ln(t)-\ln(1+t)\Big]_1^A \\ &= \ln(A)-\ln(1+A)+\ln(2) \\ &= \ln\left(\frac{A}{1+A}\right)+\ln(2) \end{aligned}$$

On sait que $\lim_{A\to+\infty} \ln\left(\frac{A}{1+A}\right) = 0$ *donc* $\lim_{A\to+\infty} J(A) = \ln(2)$.

Donc $\boxed{f \text{ est une densité pour } k = \frac{1}{\ln(2)}}$

Pour donner l'expression de la fonction de répartition F de X, les calculs sont déjà effectués ci-dessus.
Pour $x < 1$, $F(x) = 0$ *et pour* $x \geqslant 1$:
$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\ln(2)} \times \left(\ln(2) + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) = 1 - \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \times \frac{1}{\ln(2)}$.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 1 \\ 1 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{\ln(2)} & si\ x \geqslant 1 \end{cases}}$$

b: $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = k \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,dt$.
Or cette dernière intégrale diverge (il suffit de remarquer que $\frac{1}{1+t} \sim \frac{1}{t}$ *au voisinage de* $+\infty$*). Donc* $\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance}}$

4) **a:** $X(\Omega) = [1, +\infty[$ *donc* $T(\Omega) = \mathbb{N}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. $T = k \iff k \leqslant X < k+1$ *donc :*

$$\begin{aligned} P(T = k) = &= \int_{k}^{k+1} f(t)\,dt = \frac{1}{\ln(2)}\Big[\ln(t) - \ln(t+1)\Big]_{k}^{k+1} \\ &= \frac{1}{\ln(2)}\left[\ln(k+1) - \ln(k) - \ln(k+2) + \ln(k+1)\right] \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \ln\left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right] \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \ln\left[\frac{k^2+2k+1}{k(k+2)}\right] \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \ln\left[1 + \frac{1}{k(k+2)}\right] \end{aligned}$$

b: *On sait que* $\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) = 1$ *donc* $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) = \ln(2)}$

5) *On a tout de suite :* $Z(\omega) =]0, 1]$. *Notons G la fonction de répartition de Z. Si* $x \in]0, 1]$ *:*

$$\begin{aligned} G(x) = P(Z \leqslant x) &= P\left(\frac{1}{X} \leqslant x\right) = P\left(X \geqslant \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 - F\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \left[1 - \ln(1+x) \times \frac{1}{\ln(2)}\right] \\ &= \frac{\ln(1+x)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leqslant 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(2)} & si\ x \in]0,1] \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}}$$

6) *Cela devient long...*

a: *Y est la partie décimale de X. $Y(\Omega) = [0,1[$. Soit $x \in [0,1[$.*
On remarque que $Y \leqslant x = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (k \leqslant X \leqslant k+x)$ (réunion disjointe).

$$\begin{aligned} P(Y \leqslant x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leqslant X \leqslant k+x) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} F(k+x) - F(k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{k+x}\right) \times \frac{1}{\ln(2)} - 1 + \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \times \frac{1}{\ln(2)}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+\dfrac{1}{k}}{1+\dfrac{1}{k+x}}\right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{(k+x)(k+1)}{k(k+1+x)}\right) \end{aligned}$$

Regardons la somme partielle de cette série :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{(k+x)(k+1)}{k(k+1+x)}\right) &= \ln\left[\left(\frac{(1+x)2}{1(2+x)}\right) \times \left(\frac{(2+x)3}{2(3+x)}\right) \times \ldots \times \left(\frac{(N+x)(N+1)}{N(N+1+x)}\right)\right] \\ &= \ln\left[(1+x) \times \frac{N+1}{N+1+x}\right] \\ & \textit{tend vers } \ln(1+x) \textit{ quand } N \to +\infty \end{aligned}$$

Donc $\boxed{Y \textit{ a même loi que } Z}$

b: *Une densité de Y est définie par $g(x) = \dfrac{1}{\ln(2)} \dfrac{1}{1+x}$ si $x \in [0,1]$ et 0 ailleurs.*
Pour tout $r \in \mathbf{N}$, $x^r g(x)$ est intégrale entre 0 et 1 donc Y admet un moment d'ordre r.

c: $E(Y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(2)} \frac{x}{1+x}\, dx = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\, dx$

$E(Y) = \dfrac{1}{\ln(2)} \Big[x - \ln(1+x)\Big]_0^1 = \dfrac{1}{\ln(2)}(1 - \ln(2))$ $\quad \boxed{E(Y) = \dfrac{1}{\ln(2)} - 1}$

Corrigé exercice 106

HEC 2010 oral voie E

1) *Question de cours : pas de problème.*

2) **a:** *La variable* $\overline{Z_n}$ *est un estimateur sans biais de référence de* $E(Z)$, *donc de* θ.

b: *Le risque quadratique de* $\overline{Z_n}$ *est sa variance, car c'est un estimateur sans biais.*

$V(\overline{Z_n}) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{j=1}^{n} Z_j\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} V(Z_j) = \frac{1}{n}$

3) **a:** $E(Y_n) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j E(Z_j) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \theta.$

Donc $\boxed{E(Y_n) = \theta \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1}$

b: *On utilise la linéarité de la covariance sur les deux composantes :*

$$\begin{aligned}
Cov(\overline{Z_n}, Y_n) &= Cov\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i Z_i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Z_j\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \beta_i Cov(Z_i, Z_j) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i Cov(Z_i, Z_i) \qquad \textit{par indépendance des } Z_j \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(Z_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \beta_i \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Pourquoi recalculer $V(\overline{Z_n})$ *? On a déjà vu* $V(\overline{Z_n}) = \frac{1}{n}$.

$V(Y_n - \overline{Z_n}) = V(Y_n) + V(\overline{Z_n}) - 2Cov(Y_n, \overline{Z_n}) = V(Y_n) + \frac{1}{n} - 2\frac{1}{n}$

Donc $V(Y_n) = \frac{1}{n} + V(Y_n - \overline{Z_n}) \geqslant \frac{1}{n}$

On a bien $V(Y_n) \geqslant V(\overline{Z_n})$

Autrement dit, $\overline{Z_n}$ *est le meilleur estimateur sans biais de* θ *de la famille des* Y_n.

4) U_n *est de la famille des* Y_n *donc* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

$V(U_n) = \frac{1}{n} + V(U_n - \overline{Z_n}) = \frac{1}{n}$.

Donc $V(U_n - \overline{Z_n}) = 0$. *Cela signifie que* $U_n - \overline{Z_n}$ *est une constante* C *avec une probabilité égale à 1.*

Donc $E(U_n - \overline{Z_n}) = C$ *et donc* $C = \theta - \theta = 0$. *On a bien* $U_n = \overline{Z_n}$ *avec une probabilité* 1.

Corrigé exercice 107

HEC 2010 oral voie BL

1) **a:** *Question de cours : pas de problème.*
Ne pas confondre la définition, $Cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y)\right)$ *avec la formule de Huygens.*

b: $Cov(X,Y) = Cov(X, N - X) = Cov(X,N) - Cov(X,X) = -V(X) = -\dfrac{q}{p^2} = -2$
car N est une constante et $p = q = \dfrac{1}{2}$. $\boxed{Cov(X,Y) = -2}$
Évidemment, X et Y ne sont pas indépendantes.

2) *On suppose que N suit une loi géométrique de paramètre* $\dfrac{1}{2}$.

a: $X(\Omega) = \mathbf{N}$. *On utilise le système complet d'événements* $(N = k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ *et la formule des probabilités totales.*

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(N=k)}(X=0)P(N=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{k}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(X=0) = \dfrac{1}{3}}$

b: *Par les mêmes calculs, on trouve* $P(Y = 0) = \dfrac{1}{3}$.
$P(X = 0) \times P(Y = 0) = \dfrac{1}{9}$. *Et* $(X = 0 \cap Y = 0)$ *est impossible donc* $P(X = 0 \cap Y = 0) = 0$. *Ainsi, X et Y ne sont pas indépendantes.*

3) **a:** *$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}$. On procède de la même façon. Pour $k \in \mathbf{N}$:*

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(N=n)}(X=k)P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \times e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{1}{n!}\,\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \\
&= e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{k!(n-k)!}\,\frac{1}{n!}\,\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n}{i!} \quad \textit{on a posé } i=n-k \\
&= \frac{e^{-\lambda}}{k!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k \times e^{\lambda/2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \frac{e^{-\lambda/2}}{k!}
\end{aligned}$$

On peut conclure $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{P}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \qquad E(X) = V(X) = \frac{\lambda}{2} \quad \textit{de même pour } Y}$

b: *On utilise le fait que $X+Y=N$, donc $V(X+Y) = V(N) = \lambda$.*
Or $Cov(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} + 2Cov(X,Y) = \lambda + 2Cov(X,Y)$.
Donc $\boxed{Cov(X,Y) = 0}$

c: *Comparons $P(X=i \cap Y=j)$ avec $P(X=i)\times P(Y=j)$, pour $(i,j) \in \mathbf{N}^2$.*

$$\begin{aligned}
P(X=i\cap Y=j) &= P(X=i\cap N=i+j) = P_{(N=i+j)}(X=i)\times P(N=i+j) \\
&= \binom{i+j}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}\times e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \\
&= \frac{1}{i!j!}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} e^{-\lambda}\,\lambda^{i+j}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $P(X=i)\times P(Y=j) = e^{-\lambda/2}\,\dfrac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^i}{i!}\times e^{-\lambda/2}\,\dfrac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^j}{j!}j! = e^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^{i+j}}{i!j!}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}.$

On a donc égalité. $\boxed{\textit{Les variables aléatoires } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes}}$

Corrigé exercice 108

HEC 2011 oral voie E

1) *Question de cours : donnons la définition ici pour préparer la question suivante. f est une densité de probabilité si f est positive sur* **R**, *continue sur* **R** *sauf éventuellement en un nombre fini de points, et* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

2) *Ici, f est bien positive, continue sur* **R**. *Vérifions que* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.
On remarque que f est paire donc, sous réserve de convergence :
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt.$
Or cette dernière intégrale est l'aire sous la courbe d'une densité d'une loi exponentielle $\mathscr{E}(1)$ et vaut donc 1.
f est bien une densité de probabilité.

3) **a:** *Sous réserve d'absolue convergence (donc de convergence) :* $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$.
Au voisinage de $+\infty$, $tf(t) = \frac{1}{2}te^{-t}$ *et on sait que* $\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = 1$ *(espérance de la loi $\mathscr{E}(1)$).*
On sait aussi que $t \to tf(t)$ est une fonction impaire, donc $\boxed{E(X) \text{ existe et } E(X) = 0}$

b: *Calculons, en utilisant G la fonction de répartition de la loi $\mathscr{E}(1)$:*

$$\begin{aligned} P(X > t-s) &= \int_{t-s}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{t-s}^{+\infty} e^{-x}dx \\ &= \frac{1}{2}(1 - G(t-s)) = \frac{1}{2}\left(1 - (1 - e^{-(t-s)})\right) \\ &= \frac{e^{s-t}}{2} \end{aligned}$$

$$P_{(X>s)}(X > t) = \frac{P(X > t \cap X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t)}{P(X > s)} = \frac{\frac{1}{2}e^{-t}}{\frac{1}{2}e^{-s}}$$

Donc $P_{(X>s)}(X > t) = e^{s-t} \neq P(X > t-s)$

4) *Posons* $h_n : t \mapsto f(t)\left(1 + t\, e^{-n|t|}\right)$.
h_n est continue sur **R**. $H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|t|}\left(1 + t\,e^{-n|t|}\right)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\left(e^{-|t|} + te^{-|t|(1+n)}\right)\,dt$
Si $x < 0$, $H_n(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}\left(e^t + te^{t(1+n)}\right)\,dt$
Posons $J(A) = \int_{-\infty}^{x} e^{at}\,dt$
$J(A) = \frac{1}{a}\left[e^{at}\right]_A^x = \frac{1}{a}(e^{ax} - e^A)$. $\lim_{A\to-\infty} J(A) = \frac{1}{a}\,e^{ax}$
Posons $K(A) = \int_A^x te^{at}\,dt$
On utilise une intégration par parties :
$K(A) = \frac{1}{a}\left[te^{at}\right]_A^x - \frac{1}{a}\int_A^x e^{at}\,dt = \frac{1}{a}\left(xe^{ax} - Ae^{aA} - J(A)\right)$
Donc $\lim_{A\to-\infty} K(A) = \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2}$.

On utilise ces résultats pour $a = 1$ et $a = (n+1)$.

Donc, si $x \leqslant 0$: $\qquad H_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x + \dfrac{xe^{x(1+n)}}{1+n} - \dfrac{e^{x(1+n)}}{(1+n)^2}\right).$

En particulier $H_n(0) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{(1+n)^2}.$

Pour $x \leqslant 0$, $H_n(x) = H_n(0) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left(e^{-t} + te^{-t(1+n)}\right)\, dt$

On peut utiliser certains résultats de cours sur la loi exponentielle.

$\displaystyle\int_0^x e^{-at}\, dt = \frac{1}{a}(1-e^{-ax})$

$\displaystyle\int_0^x te^{-at}\, dt = -\frac{1}{a}\Big[te^{-at}\Big]_0^x + \int_0^x \frac{1}{a}e^{-at}\, dt = -\frac{1}{a}xe^{-ax} + \frac{1}{a^2}(1-e^{-ax}).$

On utilise ces résultats pour $a = 1$ et $a = (n+1)$.

$$\begin{aligned}
H_n(x) &= H_n(0) + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x} - \frac{1}{1+n}xe^{-x(1+n)} + \frac{1}{(n+1)^2}(1-e^{-x(n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+n)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2(n+1)}xe^{-x(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(n+1)^2}e^{-x(n+1)} \\
&= 1 - \frac{e^{-x}}{2} - \frac{1}{2(n+1)}xe^{-x(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)^2}e^{-x(n+1)}
\end{aligned}$$

Ces calculs ne sont pas très intéressants et rien ne permet d'en vérifier la validité.

5) *Cherchons la limite de $H_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.*

Si $x < 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n(x) = \frac{1}{2}e^x.$

Si $x \geqslant 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$

Cherchons la fonction de répartition F de X.

Si $x \leqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \frac{1}{2}e^t\, dt = \frac{1}{2}e^x$

Si $x \geqslant 0$, $F(x) = F(0) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-e^{-x}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

On a donc $\quad \forall x \in \mathbf{R} \qquad \displaystyle\lim_{n\to\infty} H_n(x) = F(x).$

C'est la définition de : $\quad (X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *converge en loi vers X.*

Corrigé exercice 109 — *HEC 2011 oral voie E*

1) *Question de cours : pas de problème.*

2) *F est continue sur $\mathbf{R}$ donc admet une primitive unique sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0. Soit H_f cette primitive.*

On a $H_f(x) = \displaystyle\int_0^x F(t)\, dt.$

Par définition de H_f, $H_f' = F$ qui est continue sur $\mathbf{R}$, donc H_f est C^1 sur $\mathbf{R}$.

3) **a:** *$f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = e^{-x}$ si $x > 0$.*

On reconnaît une densité d'une loi exponentielle de paramètre 1.

Donc $F(x)=0$ *si* $x\leqslant 0$ *et* $F(x)=1-e^{-x}$ *si* $x\geqslant 0$.
Donc, si $x\leqslant 0$, $H_f(x)=0$ *et si* $x\geqslant 0$,
$H_f(x)=\displaystyle\int_0^x (1-e^{-t})\,dt = x-\Big[-e^{-t}\Big]_0^x = x-(1-e^{-x}) = -1+x+e^{-x}$.
Immédiatement, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$, *nous pouvons affirmer :*
$(D)y=x-1$ *est asymptote à la courbe de* H_f *au voisinage de* $+\infty$.

b: $f(x)=0$ *si* $x\leqslant 0$ *et* $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$ *si* $x>0$.
On commence par déterminer $F(x)$.
Si $x\leqslant 0$, $F(x)=0$. *Si* $x\geqslant 0$ *:*
$F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^x = 1-\frac{1}{1+x}$.
Donc, si $x\leqslant 0$, $H_f(x)=0$ *et*
si $x\geqslant 0$, $H_f(x)=\displaystyle\int_0^x \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\,dt = x-\ln(1+x)$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{H_f(x)}{x}=1$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H_f(x)-x=+\infty$, *donc*
$(D)y=x$ *est une direction asymptotique (branche parabolique de direction* $y=x$*).*

c: $f(x)=0$ *si* $x\leqslant 0$ *et* $f(x)=\dfrac{1}{2(1+x)^{3/2}}$ *si* $x>0$.
On a donc $F(x)=0$ *si* $x\leqslant 0$ *et si* $x\geqslant 0$,
$F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2(1+t)^{3/2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+t)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^x$
et $F(x)=-(1+x)^{-1/2}+1 = 1-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$
Donc $H_f(x)=0$ *si* $x\leqslant 0$ *et, si* $x\geqslant 0$,
$H_f(x)=\displaystyle\int_0^x \left(1-(1+t)^{-1/2}\right)\,dt = \Big[t-2(1+t)^{1/2}\Big]_0^x = x-2\sqrt{1+x}+2$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{H_f(x)}{x}=1$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H_f(x)-x=+\infty$, *donc*
$(D)y=x$ *est une direction asymptotique (branche parabolique de direction* $y=x$*).*

4) *On suppose que* X *admet une espérance* ℓ.

a: *Notons* $I(x)=\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt$.
On choisit $u(t)=t$ *et* $v'(t)=f(t)$ *donc* $u'(t)=1$ *et* $v(t)=F(t)$
u *et* v *sont* C^1 *sur* $[0,x]$, *on peut donc intégrer par parties.*
$5x)=\Big[tF(t)\Big]_0^x-\displaystyle\int_0^x F(t)\,dt = xF(x)-H_f(x)$.
On a donc $H_f(x)=-I(x)+xF(x)$
$\dfrac{H_f(x)}{x}=-\dfrac{I(x)}{x}+F(x)$. *On sait que* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x)=\ell$ *donc* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{I(x)}{x}=0$.
On sait aussi que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$. *Donc* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{H_f(x)}{x}=1$.
Cela prouve bien que $H_f(x)\sim x$ *au voisinage de* $+\infty$.

On a donc $(D) y = x$ qui est une direction asymptotique pour la courbe de H_f au voisinage de $+\infty$.

b: $H_f(x) - x = -I(x) + x[F(x) - 1]$.
Tout dépend de $g(x) = x[F(x) - 1]$.
Si $g(x)$ admet une limite finie α en $+\infty$, (D') $y = x + \ell + \alpha$ est asymptote.
Sinon, il n'y a pas d'asymptote.

Corrigé exercice 110

HEC 2011 oral voie E

1) *Question de cours : pas de problème.*

2) *Il faut prendre du temps pour lire et comprendre l'énoncé de la situation. On va globaliser cette question 2).*
On regarde les lancers par groupe de 2 et on appelle succès un groupe de 2 du type (P,), où * n'a pas d'importance.*
La probabilité du succès est donc $\frac{1}{2}$.
X_1 est le rang du premier succès (pour les groupes de 2). Donc, on peut dire que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$. Il en résulte que $P(X_1 = 0) = 0$.
Pour X_2 un succès est un groupe de 2 de la forme (,P). Pour les mêmes raisons $X_2 \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $P(X_2 = 0) = 0$.*
$P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ *et* $P(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$.
$(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$ *est l'événement (P,P) au deux premiers tirages de probabilité* $\frac{1}{4}$ *:*
$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \frac{1}{4}$
On suppose $i < j$:
$(X_1 = i \cap X_2 = j)$ *représente une suite de tirages du type :*

$$\underbrace{(F,F),\ldots(F,F)}_{i-1 \text{ blocs}},\underbrace{(P,F)}_{\text{bloc } i},\underbrace{(*,F),(*,F),\ldots,(*,F)}_{j-i-1 \text{ blocs}},\underbrace{(*,P)}_{\text{bloc } j}$$

Donc $P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j-i}$
Donc $P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{j} = P(X_1 = i) \times (X_2 = j)$.
Pour $i \geqslant j$, même raisonnement.
Donc X_1 et X_2 sont indépendantes.

Loi de Y : on peut déjà remarquer que $Y(\Omega) = \boldsymbol{N}^*$.
$(Y > k) = (X_1 > k) \cap (X_2 > k)$ *donc*
$P(Y > k) = P(X_1 > k) \times P(X_2 > k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \times = \left(\frac{1}{4}\right)^{k}$.

Donc $P(Y \leqslant k) = 1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^k$.

$P(Y = k) = P(k-1 < Y \leqslant k) = \left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^k\right) - \left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}\right)$

$P(Y = k) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^k = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1} \times \dfrac{3}{4}$

Donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{3}{4}\right)}$

3) *Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. On note* $q = 1 - p$.

a: $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, *donc, si* $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *aussi.*

$$\begin{aligned} Y = k &\iff k \leqslant \frac{X+1}{1} < k \\ &\iff 2k-1 \leqslant X < 2k+1 \\ &\iff X = 2k-1 \text{ ou bien } X = 2k \end{aligned}$$

Donc $P(Y = k) = P(X = 2k-1) + P(X = 2k) = q^{2k-2}p + q^{2k-1}p$
$P(Y = k) = q^{2k-2}(p + qp)$
Or $q + qp = 1 - q + (1-q)q = 1 - q^2$.
Donc $P(Y = k) = (q^2)^{k-1}(1 - q^2)$. $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{G}(1 - q^2)}$

b: *Posons* $Z = 2Y - X$.

$$\begin{aligned} Y = k &\iff X = 2k-1 \text{ ou bien } X = 2k \\ &\iff 2Y - X = 1 \text{ ou bien } 2Y - X = 0 \end{aligned}$$

Donc $Z(\Omega) = \{0, 1\}$.
D'après ce qui précède $(Z = 1) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = 2k-1)$,
donc $P(Z = 1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k-1)$.
$P(Z = 1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1}p = \frac{p}{1-q^2} = \frac{p}{(1-q)(1+q)} = \frac{1}{2-p}$.
Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2-p}\right)$.
$P\left[(Y = k) \cap Z = 1)\right] = P(X = 2k-1) = q^{2k-1}p$.
$P(Y = k) \times P(Z = 1) = (q^2)^{k-1}(1-q^2) \times \dfrac{p}{1-q^2} = q^{2k-2}p = P\left[(Y = k) \cap Z = 1)\right]$.
De même $P(Y = k) \times P(Z = 1) = P\left[(Y = k) \cap Z = 0)\right]$.
Donc Y et Z sont bien indépendantes.

Corrigé exercice 111

HEC 2011 oral voie E

1) *Question de cours : pas de problème.*

2) $X_n(\Omega) = \mathbf{R}^+$ *donc* $Y_n(\Omega) = \mathbf{N}$.
Si $k \in \mathbf{N}$ $\quad Y_n = k \iff k \leqslant X_n < k+1$ *donc*

$$\begin{array}{rcl} P(Y_n = k) & = & F_{X_n}(k+1) - F_{X_n}(k) \\ & = & (1 - e^{-\lambda(k+1)}) - (1 - e^{-\lambda k}) \\ & = & e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) \qquad \textit{avec } \lambda = \dfrac{1}{n} \end{array}$$

Posons $Y'n = Y_n + 1$. $Y_n'(\Omega) = \mathbf{N}^*$ *et*
$P(Y_n' = k) = P(Y_n = k-1) = \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}(1 - e^{-\lambda}$.
On reconnaît une loi géométrique : $\quad Y_n' \hookrightarrow \mathscr{G}(1 - e^{-\lambda})$.
Donc $E(Y_n') = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}}$ *et donc*
$E(Y_n) = E(Y_n' - 1) = E(Y_n') - 1 = \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \dfrac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}$.

$$\boxed{E(Y_n) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \textit{ avec } \lambda = \frac{1}{n}}$$

3) $Z_n(\Omega) = [0,1[$. *On peut remarquer que* Z_n *est la partie décimale de* X_n.
Pour $t \in [0,1[$ $\quad Z_n \leqslant t = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(X_n \leqslant t \cap Y_n = k) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}(k \leqslant X_n \leqslant k+t)$ *(réunion disjointe) donc*

$$\begin{array}{rcl} P(Z_n \leqslant t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leqslant X_n < k+t) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} [F_{X_n}(k+t) - F_{X_n}(k)] \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left[1 - e^{-\lambda(k+t)t} - 1 + e^{-\lambda k}\right] \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda t}) \\ & = & \displaystyle(1 - e^{-\lambda t})\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda}\right)^k \\ & = & (1 - e^{-\lambda t}) \times \dfrac{1}{1 - e^{-\lambda}} \qquad \textit{avec } \lambda = \dfrac{1}{n} \end{array}$$

C'est le résultat attendu.

4) *On a* $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-t/n} = 1 = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-1/n}$.
De plus, quand $n \to +\infty$ $\quad 1 - e^{-t/n} \sim \dfrac{y}{n} \quad$ *et* $\quad 1 - e^{-1/n} \sim \dfrac{1}{n}$.
Par quotient d'équivalents, $P(Z_n \leqslant t) \sim \dfrac{\frac{t}{n}}{\frac{1}{n}} = t$

Donc $\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \leqslant t) = t$ *pour tout* $t \in [0,1[$.

On peut conclure $\boxed{(Z_n) \text{ converge en loi vers la loi uniforme sur } [0,1[}$

5) **a:** N_n *compte le nombre de succès, celui-ci étant* $X_k \leqslant \dfrac{k}{n}$.

Le probabilité du succès est $p_n = P\left(X_k \leqslant \dfrac{k}{n}\right) = F_{X_k}\left(\dfrac{k}{n}\right) = 1 - e^{-\lambda\times k/n}$ *avec* $\lambda = \dfrac{1}{n}$.

Donc $p_n = 1 - e^{-1/n}$. *L'expérience est menée n fois de façon indépendante donc*

$$\boxed{N_n \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, 1 - e^{-1/n}\right) \quad E(N_n) = n\left(1 - e^{-1/n}\right) \quad V(N_n) = ne^{-1/n}\left(1 - e^{-1/n}\right)}$$

b: *On a ici* $n \times p_n = n\left(1 - e^{-1/n}\right)$ *tend vers* 1 *quand n tend vers* $+\infty$.

On sait d'après le cours que $\boxed{(N_n) \text{ converge en loi vers une loi de Poisson } \mathscr{P}(1)}$

Corrigé exercice 112

HEC 2011 oral voie E

1) *Question de cours : pas de problème.*

2) f *est positive sur* $\boldsymbol{R}$, *continue sur* $\boldsymbol{R}$ *sauf éventuellement en* 0 *et en a.*

f *sera continue sur* $\boldsymbol{R}^{+*}$ *si et seulement si* $\lim_{x\to a^+} \dfrac{b}{x^4} = c$, *c'est à dire* $b = ca^4$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^a c\,dt + b\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^4}\,dt$$

Posons $I(A) = \displaystyle\int_a^A \frac{1}{t^4}\,dt$ *pour* $A \geqslant a$.

$$I(A) = \int_a^A t^{-4}\,dt = \frac{1}{-3}\left[t^{-3}\right]_a^A = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{a^3} - \frac{1}{A^3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{A^3}\right)$$

$$\lim_{A\to+\infty} I(A) = \frac{1}{3a^3}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = ac + \frac{b}{3a^3} = ac + \frac{1}{3}ac = \frac{4}{3}ac$

On a donc $\boxed{c = \dfrac{3}{4a} \text{ et } b = \dfrac{3}{4}a^3}$

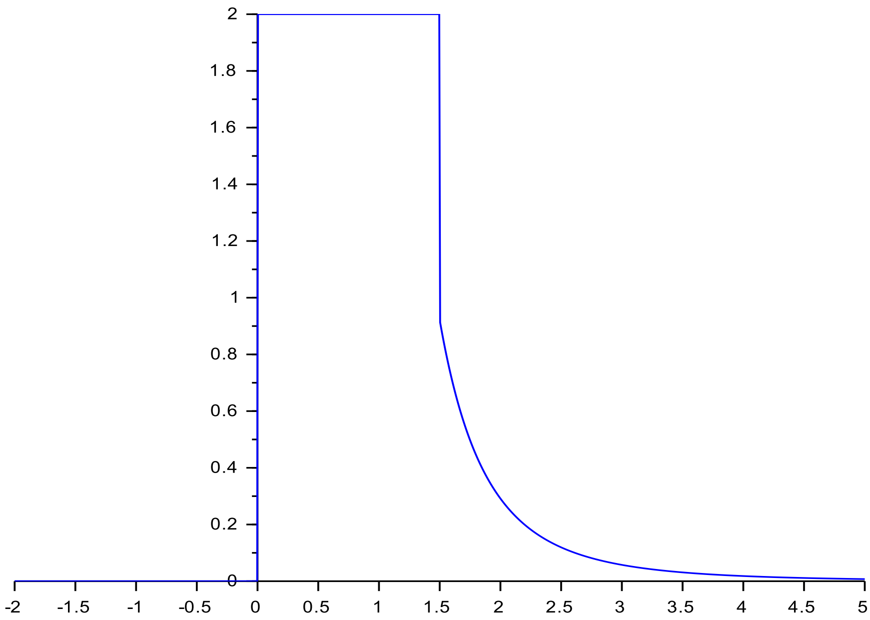
Pas de problème pour faire le graphe de f.

3) X *admet un moment d'ordre k si et seulement si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} t^k f(t)\,dt$ *ce qui revient à* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{4-k}}\,dt$ *converge.*

Donc, la condition est $4 - k > 1$ *soit* $k < 3$ $\boxed{k = 0,\ k = 1 \text{ ou } k = 2}$.

On peut aller au bout du calcul.

$$m_k(X) = \frac{3}{4a}\int_0^a t^k\,dt + b\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{4-k}}\,dt = \frac{3}{4a}\,\frac{a^{k+1}}{k+1} + \frac{b}{-4+k+1}\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{t^{4-k-1}}\right]_a^A$$



$$m_k(X) = \frac{3}{4}\,\frac{a^k}{k+1} + \frac{b}{-3+k}\left(\frac{1}{A^{3-k}} - \frac{1}{a^{3-k}}\right) = \frac{3}{4}\,\frac{a^k}{k+1} + \frac{\frac{3}{4}a^k}{3-k} \times \frac{1}{a^{3-k}} = \frac{3}{4}\,a^k\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{3-k}\right)$$

$$m_k(X) = \frac{3}{4}\,a^k \times \frac{4}{(k+1)(3-k)}$$

4) *En particulier, pour* $k=1$, $E(X) = m_1(X) = \frac{3}{4}\,a \times \frac{4}{4} = \frac{3a}{4}$

Pour $k=2$, $E(X^2) = m_2(X) = \frac{3}{4}\,a^2 \times \frac{4}{3} = a^2$ *donc*

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a^2 - \frac{9a^2}{16} = \frac{3a^2}{8}$

$$\boxed{E(X) = \frac{3a}{4} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{3a^2}{8}}$$

5) *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que* X. *On pose :*

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

a: T_n *dépend de* a, *c'est donc un estimateur de* a.

b: T_n *est un estimateur sans biais de* $E(X) = \frac{3}{4}a$ *donc, on prendra* $\boxed{S_n = \frac{4}{3}T_n}$

c: *Soit* r_n *le risque quadratique de* S_n. $r_n = V(S_n) = \frac{16}{9} \times \frac{1}{n^2} \times n \times V(X) = \frac{2a^2}{3n}$

Corrigé exercice 113

HEC 2013 oral voie E

1) Question de cours : *pas de problème.*

2) **a:** $E(W_n) = \sum_{k=1}^{n} kE(X_k)$ *par linéarité de l'espérance.*

$E(W_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}s_n \qquad \boxed{E(W_n) = \frac{s_n}{2}}$

Pour le calcul de $V(W_n)$ on utilise l'indépendance des variables kX_k.

$$\begin{aligned} V(W_n) &= \sum_{k=1}^{n} V(kX_k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 V(X_k) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$\boxed{V(W_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$

b: $(W_n = 0) \iff \forall k \in [\![1,n]\!] \quad X_k = 0$

donc $P(W_n = 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = 0)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \boxed{P(W_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$(W_n = s_n) \iff \forall k \in [\![1,n]\!] \quad X_k = 1$

donc $P(W_n = 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k = 1)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \boxed{P(W_n = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c: *Examinons le cas général : $n \geqslant 3$. Dans ce cas :*
$W_n = 3 \iff$ *($X_3 = 1$ et $X_k = 0$ pour $k \neq 3$) ou ($X_2 = 1$ et $X_1 = 1$ et $X_k = 0$ pour $k \neq 1$ et $k \neq 2$)*

Donc $P(W_n = 3) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

$\boxed{P(W_n = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

Quand $n = 2$, $P(W_2 = 3) = P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{1}{4}$.
Pour $n = 1$, $P(W_1 = 3) = 0$.

3) *Posons $X'_k = 1 - X_k$ et $W'_k = \sum_{k=1}^{n} kX'_k$.*

$W_n = \sum_{k=1}^{n} k(1 - X'_k) = s_n - \sum_{k=1}^{n} kX'_k = s_n - W'_n$

Ainsi, $P(W_n = k) = P(s_n - W'_n = k) = P(W'_n = s_n - k)$
Or W_n et W'_n ont clairement même loi, car X_k et X'_k ont même loi. ***c.q.f.d.***

4) **a:** *Sachant $W_n = j$, W_{n+1} ne peut prendre que les valeurs j et $j + (n+1)$.*

Donc $\boxed{P_{(W_n=j)}(W_{n+1} = n+1+j) = P_{(W_n=j)}(W_{n+1} = j) = \frac{1}{2}}$

b: *On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $(W_n = j)_{j\in[\![0,s_n]\!]}$ *:*
$P(W_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{s_n} P_{(W_n=j)}(W_{n+1} = k)$.
• *Si* $k \leqslant n$ *:* $P(W_{n+1} = k) = P_{(W_n=k)}(W_n = k)P(W_n = k) = \frac{1}{2}P(W_n = k)$
• *Si* $k \geqslant s_n + 1$ *:* $P(W_{n+1} = k) = P_{(W_n=k-n-1)}(W_n = k)P(W_n = k-n-1) = \frac{1}{2}P(W_n = k-n-1)$
• *Si* $k \in [\![n+1, s_n]\!]$ *:*

$$\begin{aligned} P(W_{n+1}+k) &= P_{(W_n=k)}(W_{n+1} = k)P(W_n = k) + P_{(W_n=k-n-1)}(W_{n+1} = k)P(W_n = k-n-1) \\ &= \frac{1}{2}P(W_n = k) + \frac{1}{2}P(W_n = k-n-1) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

Corrigé exercice 114

HEC 2013 (année 0) oral voie E

1) Question de cours : *voir cours.*

2) $X_n(\Omega) = \mathbf{R}^+$ *donc* $Y_n(\Omega) = \mathbf{N}$. *Pour tout* $k \in \mathbf{N}$ *:*
$P(Y_n = k) = P(k \leqslant X_n < k+1) = F_{X_n}(k+1) - F_{X_n}(k) = \left(1 - e^{-(k+1)/n}\right) - \left(1 - e^{-k/n}\right)$
$P(Y_n = k) = e^{-k/n} - e^{-(k+1)/n} = e^{-k/n}\left(1 - e^{-1/n}\right)$
Posons $Y_n' = Y_n + 1$. $Y_n'(\Omega) = \mathbf{N}^*$ *et* $P(Y_n' = k) = P(Y_n = k-1) = \left(e^{-1/n}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-1/n}\right)$.
On reconnaît une formule du type $(1-p)^{k-1}p$, *donc*
$Y_n' \hookrightarrow \mathscr{G}\left(1 - e^{-1/n}\right)$ *et* $E(Y_n') = \frac{1}{1 - e^{-1/n}}$.
$E(Y_n) = E(Y_n' - 1) = \frac{1}{1 - e^{-1/n}} - 1 = \frac{e^{-1/n}}{1 - e^{-1/n}}$.

3) $Z_n(\Omega) = [0,1[$. *Pour déterminer la loi de* Z_n, *on utilise le système complet d'événements* $(X_n = k)_{k\in\mathbf{N}}$. *Pour* $t \in [0,1[$ *:*

$$\begin{aligned} P(Z_n \leqslant t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_n \leqslant t \cap X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leqslant X_n \leqslant k+t) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(e^{-k/n} - e^{-(k+t)/n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k/n}\left(1 - e^{-t/n}\right) \\ &= \left(1 - e^{-t/n}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-1/n}\right)^k = \frac{1 - e^{-t/n}}{1 - e^{-1/n}} \qquad \textit{c.q.f.d.} \end{aligned}$$

4) *On va au plus vite :*

```
n=input('n=')
```

```
X=grand(1,1000,'exp',n)
Z=X-floor(X)
histplot(10,Z)
```

Il semble que plus n devient grand, plus l'histogramme devient plat, donc se rapproche de la densité d'une loi uniforme sur $[0,1[$.
Essayons de prouver ce résultat. Soit G_n *la fonction de répartition de* Z_n.
On utilise le résultat classique : $e^x - 1 \sim x$ *au voisinage de* 0.
Ici, $-t/n$ *et* $-1/n$ *sont au voisinage de* 0 *quand* $n \to +\infty$.
$G_n(t) = 0$ *si* $t < 0$, $G_n(t) = 1$ *si* $t \geqslant 1$ *et pour* $t \in [0,1[$ *:* $\quad G_n(t) = \dfrac{1-e^{-t/n}}{1-e^{-1/n}} \sim \dfrac{t/n}{1/n} = t$
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(t) = F(t)$ *où* F *est la fonction de répartition de la loi* $\mathscr{U}_{[0,1[}$
On a donc $\boxed{(Z_n) \text{ converge en loi vers la loi uniforme sur } [0,1[}$

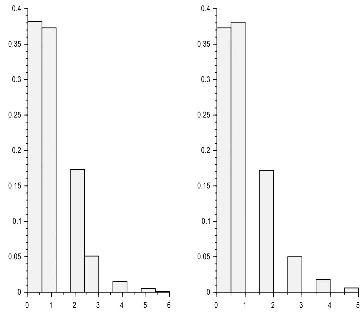
5) **a:** $F_{X_k}(x) = 1 - e^{-x/k}$ *pour* $x \in \boldsymbol{R}^{+*}$. *Donc* $F_{X_k}(k/n) = 1 - e^{-k/n\times k/1} = 1 - e^{-1/n}$
Donc $\left(X_k \leqslant \dfrac{k}{n}\right)$ *sont des événements indépendants, de probabilité* $1 - e^{-1/n}$.
N_n *compte le nombre de succès de ces événements.*
$\boxed{N_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-e^{-1/n}) \qquad E(N_n) = n(1-e^{-1/n}) \text{ et } V(N_n) = ne^{-1/n}(1-e^{-1/n})}$

b: $P(N_n = k) = \dbinom{n}{k}\left(1-e^{-1/n}\right)\left(e^{-1/n}\right)^{n-k} \sim \dfrac{n^k}{k!}\left(\dfrac{1}{n}\right) =^k e^{-1} = \dfrac{e^{-1}}{k!}$
Donc $\boxed{(N_n) \text{ converge en loi vers la loi de Poisson } \mathscr{P}(1)}$

c: *Voilà un script complet !*

```
n=100
nech=1000
ech=zeros(1,nech)
for i=1:nech
    Nn=0
    for k=1:n
        Xk=grand(1,1,'exp',k)
        if Xk <=k/n then
            Nn=Nn+1
        end
     ech(i)=Nn
     end
end
subplot(1,2,1)
histplot(10,ech)
V=grand(1,nech,'poi',1)
subplot(1,2,2)
histplot(10,V)
```

et le résultat :



Corrigé exercice 115

HEC 2016 oral voie E

1) Question de cours : *pas de problème.*

2) a: *Très classique... $U_n(\Omega) = [0,1]$. Notons F_n la fonction de répartition de U_n. Si $x \in [0,1]$*

$F_n(x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\right) = 1 - (1-x)^n$ *(par indépendance des X_i).*

Donc $\boxed{F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0, \quad F_n(x) = 1-(1-x)^n \text{ si } x \in [0,1] \quad \text{et } F_n(x) = 1 \text{ si } x > 1}$

b: *$P(U_n \geqslant \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n$. Or $1-\varepsilon \in]0,1[$, donc $\lim_{n\to+\infty}(1-\varepsilon)^n = 0$* ***c.q.f.d.***

3) *Pas de problème. On peut mettre* `x=grand(1,k,'unf',0,1)` *ou encore plus simple* `x=rand(1,k)`

4) a: *Soit $x \in]0,1[$:*

$$\begin{aligned}
P(Z \leqslant x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\left(1-(1-x)^k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} - p(1-x)\sum_{k=1}^{+\infty}[(1-p)(1-x)]^{k-1} \\
&= 1 - p(1-x) \times \frac{1}{1-(1-p)(1-x)} \\
&= 1 - \frac{p(1-x)}{p+(1-p)x}
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

b: *On justifie facilement que, en posant $G(x) = P(Z \leqslant x)$, G est continue sur $\mathbf{R}$ et C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.*
On obtient une densité g de Z en dérivant G partout où elle est dérivable.
Posons $q = 1-p$ pour alléger les notations.
Pour $x \in]0,1[$:
$g(x) = -\dfrac{-p(p+qx) - p(1-x)q}{(p+qx)^2} = \dfrac{p^2 + pqx + pq - pqx}{(p+qx)^2} = \dfrac{p}{(p+qx)^2}$
Et $g(x) = 0$ sinon.

5) **a:** *En suivant le script Scilab, on simule ici une variable z définie par l'expérience :*
• On commence par simuler $N \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
• Puis, si $N = k$, on simule U_k.
La loi de z est définie par (en utilisant la formule des probas totales sur le système complet d'événements $(N = k)_{k\in\mathbf{N}^*}$) :

$$P(z \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{(N=k)}(U_k \leqslant x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p^{k-1}P(U_k \leqslant x)$$

On retrouve bien la loi de Z.

b: *Dans le script, on affiche la moyenne de* 10000 *valeurs réalisées de la variable Z, pour $p = \frac{1}{2}$. D'après la méthode de Monte Carlo, on obtient une estimation de $E(Z)$.*
Or $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx = \int_0^1 \frac{px}{(p+qx)^2}\,dx$
On simplifie la fraction rationnelle de façon classique :
$\frac{px}{(p+qx)^2} = \frac{a}{(p+qx)^2} + \frac{b}{p+qx} = \frac{a+b(p+qx)}{(p+qx)^2}$
On cherche donc a et b tels que $bq = p$ et $a + bp = 0$
Donc $b = \frac{p}{q}$ et $a = -bp$

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^1 \frac{dx}{p+qx} - \int_0^1 \frac{p\,dx}{(p+qx)^2}\right) = \frac{p}{q}\left(\left[\frac{1}{q}\ \ln(p+qx) + \frac{p}{q}\frac{1}{p+qx}\right]_0^1\right) \\
&= \frac{p}{q^2}(\ln(p+q) - \ln(p) + \frac{p^2}{q^2}\left(\frac{1}{p+q} - \frac{1}{p}\right) = -\frac{p}{q^2}\ln(p) + \frac{p^2}{q^2}\frac{q}{p} \\
&= -\frac{p}{q^2}\ln(p) - \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

Pour $p = \frac{1}{2}$, on a $E(Z) = -2\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2\ln(2) - 1$

$\boxed{\textit{On devrait donc voir afficher une valeur approchée de } 2\ln(2) - 1}$

On pourrait faire un calcul plus simple en remplaçant p et q dès le début du calcul par $\frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 116

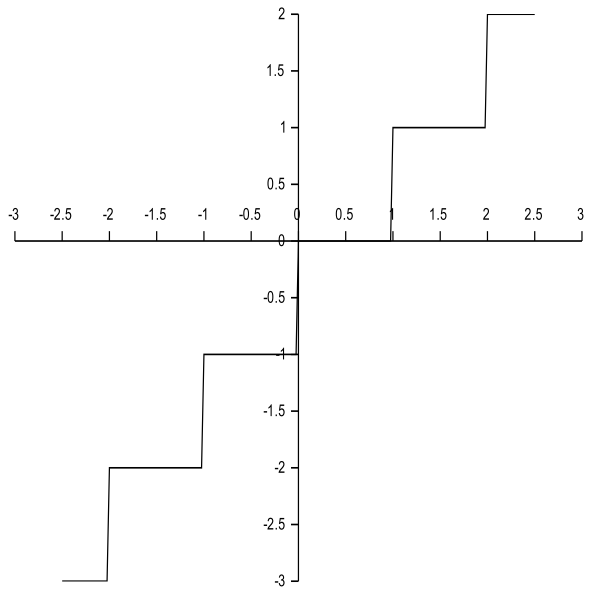
HEC 2017 oral voie E

1) Question de cours :

a: *Pas de problème.*

b: *Voilà un script possible :*

```
x=linspace(-5/2,5/2,201)
fplot2d(x,floor)
```



et la courbe obtenue :

2) X_n *suit une loi exponentielle de paramètre* $\dfrac{1}{n}$ *donc* $\boxed{E(X_n) = n \text{ et } V(X_n) = n^2}$

3) **a:** *On calcule mécaniquement en utilisant la fonction de répartition :*

$$\begin{aligned} u_n &= P(|X_n - n| < 1) = P(n-1 < X_n < n+1) = F_{X_n}(n+1) - F_{X_n}(n-1) \\ &= \left(1 - e^{-(n+1)/n}\right) - \left(1 - e^{-(n-1)/n}\right) = e^{-(n-1)/n} - e^{-(n+1)/n} = e^{-(n+1)/n}(e^{2/n} - 1) \end{aligned}$$

c.q.f.d.

b: *On sait que, quand n tend vers* $+\infty$, $e^{2/n} - 1 \sim \dfrac{2}{n}$ *et* $e^{-(n+1)/n} \sim e^{-1}$ *donc*
$u_n \sim \dfrac{2}{n} \times e^{-1}$
Ainsi $\boxed{\alpha = 2e^{-1}}$

4) **a:** *On a immédiatement* $B_n = \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k$.

b: *La réunion étant disjointe :* $P(B_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$. *Or :*

$$P(A_k) = \exp\left(-\frac{1}{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) - \exp\left(-\frac{1}{n}(k+1)\right)$$

donc $P(A_k) = \exp(-(k+1)/n)(\exp(1/2n) - 1)$. *Il en résulte :*

$$\begin{aligned} v_n &= (\exp(1/2n)-1)\sum_{k=0}^{+\infty}(\exp(-1/n))^{k+1} \\ &= (\exp(1/2n)-1) \times \frac{\exp(-1/n)}{1-\exp(-1/n)} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{v_n = \dfrac{\exp(1/2n)-1}{\exp(1/n)-1}}$

On utilise $\exp(x) - 1 \sim x$ *quand* x *tend vers* 0 *donc* $v_n \sim \dfrac{1/2n}{1/n} = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}}$

5) **a:** *De façon classique* $P(M_n > x) = P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} X_k > x\right) = \prod\limits_{k=1}^{n}\exp(-x/k) = \exp\left(-\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)x\right)$.

Il en résulte que $\boxed{M_n \textit{ suit une loi exponentielle de paramètre } S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}}$

b: $E(M_n) = \dfrac{1}{S_n} < 1$ *donc* $F_{M_n}(E(M_n)-1) = 0$

$w_n = P(E(M_n) - 1 < M_n < E(M_n) + 1) = 1 - \exp(-S_n(E(M_n)+1)) - 0$.

$\boxed{w_n = 1 - \exp(-1 - S_n)}$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ *donc* $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1}$

Chapitre 4

Corrigés des questions courtes

4.1 Algèbre

Corrigé question 1 — *Entraînement*

$P(x) = x^2 - x$ est un polynôme annulateur de l'endomorphisme f.
0 et 1 sont les deux racines de f, donc $Sp(f) \subset \{0,1\}$.
Le sous espace propre associé à $\lambda = 0$ est $\ker(f)$ (si celui n'est pas réduit à $\{0_E\}$).
Si $u \in Imf \quad \exists v \in E$ tel que $f(v) = u$ donc $f^2(v) = f(u) = f(v$ car $f^2 = f$ donc $f(u) = u$.
Donc, le sous espace propre $E_{(\lambda=1)}$ contient Imf.
On sait que $\dim(\ker(f)) + \dim(Imf) = \dim(E)$ donc $E_{(\lambda=1)} = Im_f$.
La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à $\dim(E)$, donc f est diagonalisable.
Remarquons que si $\dim(\ker(f)) = 0$, f est bijectif donc $f^{-1} \circ f^2 = id_E$ donc $f = id_E$.

Corrigé question 2 — *Entraînement*

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\boldsymbol{R})$ à (V_1, V_2, V_3).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc A est diagonalisable, (V_1, V_2, V_3) est une base propre.

$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ *(où les λ_i sont les valeurs propres de A).*

Donc $A = PDP^{-1}$. En calculant, on obtient $PDP^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \dots & \dots \\ \lambda_1 - \lambda_3 & \dots & \dots \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

Donc, par identification avec A*, on obtient* $\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & =3 \\ \lambda_1-\lambda_3 & =3 \\ \lambda_1-\lambda_2 & =3 \end{cases}$

On trouve facilement $\lambda_1 = 3$*,* $\lambda_2 = 0$ *et* $\lambda_3 = 0$*.*

En finissant le calcul de A*, on trouve* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*.*

Corrigé question 3 *HEC 1998 oral voie E*

D'après l'hypothèse, A *est inversible et* $A^{-1} = A\ {}^tA = {}^tAA$

${}^t({}^tA\,A) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tA\,A$ *donc* A^{-1} *est symétrique.*

On sait que, d'une manière générale ${}^t\left(B^{-1}\right) = ({}^tB)^{-1}$*, donc, si* B *est symétrique,* B^{-1} *l'est aussi.*

Donc A *est symétrique, comme* A^{-1}*. Donc* ${}^tA = A$ *et* $A^3 = I$*.*

Si A' *est la matrice diagonale semblable à* A*,* $A'^3 = I$ *donc les 3 valeurs propres de* A *sont égales à* 1 *et donc* $A = A' = I_n$*.*

Corrigé question 4 *HEC 1998 oral voie E*

Dire que A *et* B *sont deux matrices semblables dans* $\mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$ *revient à dire qu'elles représentent le même endomorphismes* f *de* $\boldsymbol{R}^n$*.*

Si A *est inversible, alors* f *est bijectif donc* B *est inversible.* $A = P^{-1}BP$

donc $PA = BP = Q$*,* $A = P^{-1}Q$ *et* $B = QP^{-1}$ *et donc* $\boxed{X = P^{-1} \text{ et } Y = Q}$

Réciproque : on suppose A *inversible,* $A = XY$ *et B=*YX*. Il faut montrer que* A *et* B *sont semblables.*

Commençons par justifier que X *est inversible.*

On a $f = u \circ v$ *avec* u *et* v *les endomorphisme de matrices* X *et* Y*.*

$\forall y \in E \quad \exists x \in E$ *tel que* $f(x) = y$ *donc* $u(v(x)) = y$*. Donc* u *est surjective.*

Comme nous sommes en dimension finie, u *est bijectif et donc* X *est inversible.*

On a $X^{-1}A = Y$ *et* $BX^{-1} = Y$ *donc* $X^{-1}A = BX^{-1}$ *ou encore* $X^{-1}AX = B$*.* A *et* B *sont bien semblables.*

Corrigé question 5 *HEC 1998 oral voie E*

$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *donc* $M - 2I = -U$ *où* $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*.*

$U^2 = 3U$ *et* $U^2 = (2I_M)^2 = 4I - 4M + M^2 = 3U = 3(2I - M)$

On en déduit que $M^2 - M - 2I = 0$

De là, $M.\dfrac{1}{2}(M - I) = I$*, donc* $\boxed{M \text{ est inversible et } M^{-1} = \dfrac{1}{2}(M - I)}$

M est diagonalisable car symétrique. Pour aller vite, on peut remarquer que U *est diagonalisable et peut se réduire "'à vue" :*

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}UP \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{P^{-1}MP = P^{-1}(2I-U)P = 2I - U' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Corrigé question 6

HEC 1998 oral voie E

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Soit f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *ayant* A *comme matrice dans la base canonique* (i, j, k).

$Im(f) = Vect(u)$ *avec* $u \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *donc* $\boxed{rg(A) = 1}$.

Par la formule du rang, $\ker(f)$ *est de dimension* 2. *Donc* 0 *est valeur propre.*
On remarque que $f(j) = 2f(i)$ *et* $f(k) = 3f(i)$ *donc*
$u_1 = 2i - j \in \ker(f)$ *et* $u_2 = 3i - k \in \ker(f)$.
Donc $E_{(\lambda=0)} = Vect(u_1, u_2)$

Une bonne expérience nous pousse à calculer $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. *On obtient* $\begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 42 \end{pmatrix}$

Donc $f(u) = 14u$. 14 *est valeur propre et* $E_{(\lambda=14)} = Vect(u) = Im(f)$

Au final $\boxed{\text{En prenant } P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}}$

Corrigé question 7

HEC 1998 oral voie E

Voilà une question qui est presque une question de cours. À ne pas rater donc...

On peut écrire, pour $p \geqslant 1$: $\binom{n}{p} = \dfrac{\overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times *}^{p \text{ termes}}}{\underbrace{p \times p - 1) \times \dots \times 1}_{p \text{ termes}}} = \prod_{i=0}^{p-1} \dfrac{n-i}{k-i}$

Et $\binom{n}{p} = 1$ *pour* $p = 0$.

```
function y=bin(n,p)
    y=1
    for i=0:(p-1)
        y=y*(n-i)/(p-i)
    end
endfunction
```

Corrigé question 8

HEC 2005 oral voie E

À tout triplet de nombres réels (a,b,c), on associe la matrice

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

1) *M est inversible (matrice triangulaire avec des pivots non nuls).*
M admet 1 comme unique valeur propre (matrice triangulaire).
Si M était diagonalisable, elle serait semblable à I donc $M = I$, ce qui n'est vrai que si $a = b = c = 0$.

2) $(M-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$. $(M-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $(M-I)^n = 0_3$ *pour* $n \geqslant 3$.

3) *Posons $A = M - I$. On a donc $M = A + I$. A et I commutent donc*
$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k = \binom{n}{0} A^0 + \binom{n}{1} A^1 + \binom{n}{2} A^2 = I + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2$
Donc $M^n = I + n(M-I) + \frac{n(n-1)}{2}(M-I)^2$
$M^n = \left(1 - n + \frac{n(n-1)}{2}\right) I + (n - n(n-1)) M + \frac{n(n-1)}{2} M^2.$
Donc $\boxed{\text{Pour } n \in \mathbf{N} \qquad M^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}\ I - n(n-2)M + \frac{n(n-1)}{2}\ M^2}$

Posons $B_n = I - nA + \frac{-n(-n-1)}{2} A^2$ *pour* $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned} M^n \times B_n &= \left(I + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2\right) \times \left(I - nA + \frac{n(n+1)}{2} A^2\right) \\ &= I + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2 - nA + \frac{n(n+1)}{2} A^2 - n^2 A^2 \\ &= I + \frac{n}{2}(n-1+n+1) A^2 - n^2 A^2 \\ &= I \end{aligned}$$

Donc B_n est la matrice inverse de M^n, c'est à dire $M^{-n} = B_n$.
La formule encadrée marche donc aussi si $n \in \mathbf{Z}$.

Corrigé question 9

HEC 2005 oral voie E

1) *Cherchons les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice A.*

$$(S)\ (A-\lambda I)X=0 \iff \begin{pmatrix} 13-\lambda & -9 & 45 & | & 0 \\ -3 & 3-\lambda & -11 & | & 0 \\ -3 & 2 & -10-\lambda & | & 0 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 2 & -10-\lambda & | & 0 \\ -3 & 3-\lambda & -11 & | & 0 \\ 13-\lambda & -9 & 45 & | & 0 \end{pmatrix}$$

on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ *et* $L_3 \leftarrow 3L_3 + (13-\lambda)L_1$

$$\iff \begin{pmatrix} -3 & 2 & -10-\lambda & | & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1-\lambda & | & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & \lambda^2-3\lambda+5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

• *Si* $\lambda=1$, (S) *devient* $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -11 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $y=z$ *puis* $x=-3z$, $z\in \boldsymbol{R}$.
$\lambda=1$ *est valeur propre et* $E_{(\lambda=1)} = Vect(U-1)$ *avec* $U_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

• *Si* $\lambda \neq 1$, (S) *devient* $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -10-\lambda & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1-2\lambda & \lambda^2-3\lambda+5 & | & 0 \end{pmatrix}$.
On fait $L_3 \leftarrow L_3 + (1+2\lambda)L_2$
$(S) \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -10-\lambda & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-5\lambda+4 & | & 0 \end{pmatrix}$
Or $\lambda^2-5\lambda+4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$. *Donc* $Sp(A)=\{1,4\}$.
Pour $\lambda=4$, $(S) \sim \begin{pmatrix} -3 & 2 & -10-\lambda & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$
$y=z$ *puis* $x=-4z$, $z\in \boldsymbol{R}$.
$E_{(\lambda=4)} = Vect(U_2)$ *avec* $U_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
La somme des dimensions des sous espaces propres ne donne pas 3, donc A n'est pas diagonalisable.

2) *L'énoncé nous incite à poser* $V_1=U_2$, $V_2=U_1$ *et à chercher un vecteur* V_3 *tel que* $AV_3 = V_3 + cV_2 \quad (2)$.

$$(2) \iff (A-I)V_3 = cV_2 \iff \begin{pmatrix} 12 & -9 & 45 & | & -3c \\ -3 & 2 & -11 & | & c \end{pmatrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & -3 & 15 & | & -c \\ -3 & 2 & -11 & | & c \end{pmatrix} L_2 \leftarrow 4L_2 + 3L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & -3 & 15 & | & -c \\ 0 & -1 & 1 & | & c \end{pmatrix}$$

Donc $y=z-c$ *puis* $x=-3z-c \quad z\in \boldsymbol{R}$ *et* $c\in \boldsymbol{R}$.
Prenons $c=1$ *et* $z=1$, *nous obtenons* $x=-4$ *et* $y=0$.

On vérifie que $\begin{pmatrix} 13 & -9 & 45 \\ -3 & 3 & -11 \\ -3 & 2 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Çà marche.

On peut prendre la matrice P suivante (après avoir vérifié qu'elle est bien inversible)

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donnera } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Corrigé question 10

Entraînement

1) $Im(f+g) = \{f(u+g(u) \quad u \in E\}$
Soit $\mathscr{B}_1$ une base de $Im(f)$ et $\mathscr{B}_2$ une base de $Im(g)$, on a donc $Im(f+g) = Vect(\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2)$.
Donc $\dim(Im(f+g)) \leqslant Card(\mathscr{B}_1) + Card(\mathscr{B}_2) = \dim(Im(f)) + \dim(Im(g))$.
C'est le résultat attendu.

2) *Si suppose $f+g$ bijectif, on aura donc $\dim(Im(f+g)) = n$, en posant $n = \dim(E)$.*
Donc $\dim(Im(f)) + \dim(Im(g)) \geqslant n$.
On a d'autre part $g \circ f = 0$.
Donc $\forall u \in E \qquad g(f(u)) = 0-E$ donc $Im(f) \subset \ker(g)$ donc $\dim(Im(f)) \leqslant \dim(\ker(g))$.
Il en résulte : $\quad \dim(Im(f)) + \dim(Im(g)) \leqslant \dim(\ker(g)) + \dim(Im(g)) = n$.
Donc $\quad \boxed{\text{Dans le cas étudié, } \dim(Im(f)) + \dim(Im(g)) = \dim(E)}$

Corrigé question 11

HEC 2006 oral voie S

1) *M étant inversible, M^n l'est aussi. $\forall n \in \mathbf{N} \qquad (M^n)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^n$.*

2) *On peut commencer par regarder M^2 : $M^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.*

M^2 est donc diagonale (donc diagonalisable) et il en sera de même pour M^{2k}.
On sait que si λ est valeur propre de M, λ^2 est valeur propre de M^2, donc $\lambda^2 = 16$ ou $\lambda^2 = 36$, donc $\lambda \in \{-4, 4, -6, 6\}$.

$M - 4I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -4 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *a deux lignes proportionnelles (L_1 et L_4).*

Donc $M - 4I$ est non inversible et 4 est valeur propre.
Pour $M + 4I$, il en est de même. Donc -4 est valeur propre.

$M - 6I = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -6 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ *a deux lignes proportionnelles (L_2 et L_3).*

Donc $M - 6I$ est non inversible. Donc 6 est valeur propre.

Pour $M+6I$, il en est de même, donc -6 est valeur propre.
Donc M admet 4 valeurs propres distinctes et est diagonalisable. Il en résulte que M^n est diagonalisable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Corrigé question 12

HEC 2006 oral voie S

Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ tel que $f^4 = f^2$ et dont 1 et -1 sont valeurs propres.
$P(x) = x^4 - x^2$ est un polynôme annulateur de f, donc $Sp(f) \subset \{-1,0,1\}$.
On sait déjà que -1 et 1 sont des valeurs propres. Envisageons plusieurs cas.
• 0 *est aussi valeur propre. On a donc* 3 *valeurs propres distinctes en dimension* 3 *donc f est diagonalisable.*
• 0 *n'est pas valeur propre, donc f est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$ et f^{-1} existe.*
$f^4 = f^2$ donc $f^2 = id$.
On peut trouver une base de $\mathbf{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha = 1$ ou $\alpha = -1$. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a(\alpha-1) \\ 0 & 1 & b((\alpha+1) \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$.
On doit avoir $A^2 = I$ donc $\alpha^2 = 1$
Si $\alpha = 1$, $2b = 0$ donc $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$(A-I)X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & a & | & 0 \end{pmatrix}$
Cela donne un espace propre associé à la valeur propre 1 de dimension 2. La somme des dimensions des sous espaces propres donne 3 donc A est diagonalisable.
Si $\alpha = -1$, $2a = 0$ donc $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
$(A+I)X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & b & | & 0 \end{pmatrix}$
Cela donne un espace propre associé à la valeur propre -1 de dimension 3. La somme des dimensions des sous espaces propres donne 2 donc A est diagonalisable.
Dans tous les cas, f est diagonalisable.

Corrigé question 13

HEC 2007 oral voie E

1) *M est symétrique, donc M est diagonalisable et f est bien diagonalisable.*

2) *On note M' une matrice diagonale semblable à M. Avec ce qui est admis, on a donc $M'^2 = 4I$, donc $M^2 = 4I$.*
Ainsi, $M^{2n} = 4^n I$ et $M^{2n+1} = 4^n M$. C'est bien ici une question courte.

Corrigé question 14

HEC 2007 oral voie E

1) *Prenons $u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces trois vecteurs sont bien tels que deux quelconques d'entre eux sont linéairement indépendants. f admet au plus deux valeurs propres dans $\mathbf{R}^2$.*

Si u_1 et u_2 sont vecteurs propres associés à une valeur propre λ, alors (u_1, u_2) est une famille libre de $\ker(f - \lambda id)$ donc $f = \lambda id$. Si $f \neq \lambda id$, ce n'est pas possible.

2) *Soit f un endomorphisme de $\boldsymbol{R}^n$ et $\mathscr{F}$ une famille de $n+1$ vecteurs propres de f s'il en existe.*

a: *$\mathscr{F}$ ne peut pas être une famille libre, car une famille libre de $\boldsymbol{R}^n$ comporte au plus n vecteurs.*

b: *Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ les valeurs propres associés aux vecteurs propres $u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1}$.*
Comme on est en dimension n, il n'y a au plus n valeurs propres distinctes. On suppose avoir rangé ces valeurs propres en commençant par celles qui sont distinctes. Dans ce cas, $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_{n+1} = \lambda_i$.

$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$ *car $(u_1, \ldots, u_n)$ est une famille libre donc une base de R^n.*

$$f(u_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k u_k = \lambda_{n+1} u_{n+1}$$

donc $\sum_{k=1}^{n} x_k(\lambda_k - \lambda_{n+1}) u_k = 0.$

On fait un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\exists j \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_{n+1} \neq \lambda_j$, alors, dans ce cas, $x_j = 0$.

On aurait alors $u_{n+1} = \sum_{k=1 (k \neq j)}^{n} x_k u_k$. Mais comme la famille $\underbrace{(u_1, \ldots, u_{n+1})}_{\text{sauf } u_j}$ est libre, on aboutit à une absurdité. Donc $\lambda_j = \lambda_{n+1}$ pour tout j et $f = \lambda id$.
Et si $f \neq \lambda id$, la condition de l'énoncé est impossible.

Corrigé question 15 — *HEC 2007 oral voie E*

1) *$A \neq 0$ car $BA \neq 0$ et $AB = 0$ donc, comme $A \neq 0$, B ne peut pas être inversible. Donc v ne peut pas être bijectif.*
$Im(v)$ est donc de dimension 1 ou 0. Il ne peut pas être de dimension 0 car, sinon on aurait $B = 0$ et $BA = 0$, ce qui n'est pas possible. Donc $Im(v)$ est de dimension 1.
D'après BA, en notant (e_1, e_2) la base canonique, $(v \circ u)(e_1) = 0$ et $(v \circ u)(e_2) = e_1 = v(u(e_2))$ donc $e_1 \in Im(v)$.
On peut conclure $\boxed{Im(v) = Vect(e_1)}$

2) *$A \neq 0$ donc $\ker(u)$ est de dimension 0 ou 1. Si c'était de dimension 0, A serait inversible et on aurait $B = 0$, ce qui n'est pas possible. Donc $\ker(u)$ est de dimension 1.*
D'après AB, $(u \circ v)(e_1) = 0$ et $(u \circ v)(e_2) = 0$. donc $u(v(e_1)) = 0$ et $u(v(e_2))$. Or $v(e_1) \in Im(v)$ et $v(e_2) \in Im(v)$ donc $v(e_1) = ke_1$ et $v(e_2) = k'e_1$.
Donc $ku(e_1) = 0$ et $k'u(e_1) = 0$. On ne peut pas avoir k et k' simultanément nuls donc $u(e_1) = 0$.
On peut conclure $\boxed{\ker(u) = Vect(e_1)}$

3) *D'après ce qui précède,* A *est de la forme* $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a' \end{pmatrix}$ *et* B *de la forme* $\begin{pmatrix} b & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient $AB = 0$ *et* $BA = \begin{pmatrix} 0 & ab + a'b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Donc* A *et* B *sont respectivement de la forme précédente, avec la condition* $ab + a'b' = 1$.

Corrigé question 16

HEC 2008 oral voie E

1) a: *On calcule* A^2 *et on trouve* $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. *En regardant le terme en haut à gauche, on se doute que* $A^2 = \alpha A - 2I$. *En regardant un autre terme, on doit avoir* $\alpha = 3$. *On vérifie que cela marche.* $\boxed{A^2 - 3A + 2I = 0}$

b: $A\left[\dfrac{1}{2}(A - 3I)\right] = I$ *donc* $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A - 3I) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$

2) $P(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ *est un polynôme annulateur de* A. *Donc* $\boxed{Sp(A) \subset \{1, 2\}}$

3) $A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *On remarque que* $L_2 - L_1$ *donne* L_3. *Donc* $A - 2I$ *n'est pas inversible et* 2 *est bien valeur propre.*

$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. *On voit immédiatement que* $A - I$ *n'est pas inversible donc* 1 *est bien valeur propre et le sous espace propre est de dimension* 2 *(car* $A - I$ *est de rang 1).*

Donc, la somme des dimensions des sous espaces propres donne 3. A est diagonalisable.

Corrigé question 17

HEC 2009 oral voie E

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1) *Dans cette question* B *est nécessairement de la forme* $B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.

$$AB = I_3 \iff \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 & b_1 + 2b_2 & c_1 + 2c_2 \\ 3a_1 + 4a_2 & 3b_1 + 4b_2 & 3c_1 + 4b_2 \\ -a_1 + 4a_2 & -b_1 + 4b_2 & -c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} = I$$

On voit facilement que le système $\begin{cases} 3a_1 + 4a_2 & = 0 \\ -a_1 + 4a_2 & = 0 \end{cases}$ *admet* $a_1 = 0$ *et* $a_2 = 0$ *ce qui est incompatible avec* $a_1 + 2a_2 = 1$. *Donc* $\boxed{\text{Pas de solution}}$

2) *Prenons C de la forme* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$.

$CA = \begin{pmatrix} a_1+3b_1-c_1 & 2a_1+4b_1+4c_1 \\ a_2+3b_2-c_2 & 2a_2+4b_2+4c_2 \end{pmatrix}$

$CA = I$ donne donc deux systèmes : $(S_1)\left\{\begin{array}{ll} a_1+3b_1-c_1 & =1 \\ a_1+4b_1+4c_1 & =0 \end{array}\right.$ *et* $(S_2)\left\{\begin{array}{ll} a_2+3b_2-c_2 & =0 \\ a_2+4b_2+4c_2 & =1 \end{array}\right.$

Ces deux systèmes admettent une infinité de solutions (en fonction, par exemple, de c_1 pour (S_1) et de c_2 pour (S_2))

Donc $\boxed{\textit{Il existe des solutions}}$

Corrigé question 18 — *HEC 2009 oral voie E*

1) *On peut commencer par remarquer que, par la règle des dimensions dans un produit matriciel, B est une matrice $(1,1)$ donc un réel.*

Sans problème, nous obtenons $B = X\ {}^tX = x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

2) $A = X\ {}^tX = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_2x_1 & \ldots & x_nx_1 \\ x_1x_2 & x_2\ x_2 & \ldots & x_n\ x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1\ x_n & x_2\ x_n & \ldots & x_n\ x_n \end{pmatrix}$

Autremont dit $A = (a_{i,j})$ *avec* $a_{i,j} = x_j\ x_i$.

On a donc $rg(A) = 1$.

Si on appelle f l'endomorphisme ayant A comme matrice dans la base canonique de $\boldsymbol{R}^n$, $\dim(\ker(f)) = n-1$.

$u\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \ker(u) \Longleftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$

Si $x_1 \neq 0$ (par exemple), les $n-1$ vecteurs $(x_ie_1 - x_1e_j)_{i\in[\![2,n]\!]}$ forment une base de $\ker(f)$.

0 est donc valeur propre. Le sous espace propre est $\ker(f)$ de dimension $n-1$. Reste à trouver l'autre valeur propre. On a $Im(f) = Vect(X)$

On remarque que $AX = X\ {}^tXX = \lambda X$ *avec* $\lambda = B = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Donc X est vecteur propre associé à la valeur propre λ. Ça y est, on a tout.

Corrigé question 19 — *HEC 2010 oral voie E*

f est diagonalisable. Soit $\mathscr{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base propre.

$$mat_{\mathscr{B}}(f) = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda_k \neq 0$*, comme* $f(u_k) = \lambda_k u_k$*, on a* $f\left(\dfrac{1}{\lambda_k} u_k\right) = u_k$ *donc* $u_k \in Im(f)$*.*
Si $\lambda_k = 0$*, alors* $u_k \in \ker(f)$*.*
Si on suppose $Im(f) \subset \ker(f)$*, si* $\lambda_k \neq 0$*,* $u_k \in Im(f)$ *donc* $u_k \in \ker(f)$ *donc* $\lambda_k = 0$*.*
Donc $\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad \lambda_k = 0 \qquad$ *et* $D = 0_n$ *matrice nulle de* $\mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$*.*
Donc f *est l'endomorphisme nul.*

Corrigé question 20

HEC 2010 oral voie E

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\boldsymbol{R}^3$*.*

Soit f *l'endomorphisme de* $\boldsymbol{R}^3$ *dont la matrice dans la base* $\mathscr{B}$ *est* $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*.*

$f(e_1+e_2+e_3)$ *a pour composantes dans* $\mathscr{B}$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc, en notant $u_1 = e_1 + e_2 + e_3$*,* $f(u_1) = u_1$
Les composantes de $f(e_2)$ *sont la deuxième colonne de* A*.*
Donc $f(e_2) = u_3 \quad$ *en notant* $u_3 = -e_1 + e_3$*.*

$f(u_3)$ *a pour composantes* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad$ *,* $f(u_3) = -e_2$*.*

$\mathscr{B}' = (u_1, e_2, u_3)$ *est une base car la matrice de passage* $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible.*

La matrice de f *dans cette base* $\mathscr{B}'$ *est* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$*.*

$M' - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$*. On fait* $L_3 \leftrightarrow L_2$

$M' - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & -1 \end{pmatrix}$ *On fait* $L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_2$

$M' - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -1-\lambda^2 \end{pmatrix}$*.*

Donc $\lambda = 1$ *est l'unique vecteur propre de* f*. Si* f *était diagonalisable, sa matrice diagonale semblable serait* I_3 *et donc* f *serait l'identité. Ce n'est pas le cas car* $M \neq I_3$*.*
Donc $\qquad \boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Corrigé question 21

HEC 2010 oral voie E

A *est symétrique donc diagonalisable.*

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On suppose que $A^k = I_n$ *donc* $D^k = I_n$, *donc* $\quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \lambda_i^k = 1$.

- *Si* k *est un entier naturel impair,* $\lambda_i = 1$, *donc* $D = I$ *donc* $A = I$.
- k *est un entier naturel pair, non nul,* $\lambda_i = \pm 1$, *donc* $D^2 = I$ *donc* $A^2 = I$.
  On peut remarquer que A *est la matrice d'une symétrie.*

Corrigé question 22

HEC 2010 oral voie E

On remarque que $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

et donc $(A+I)^2 = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = n(A+I)$.

On a un polynôme annulateur ... sauvé !

$A^2 + 2A + I = nA + nI$ *donc* $A^2 + (2-n)A = (n-1)I$

Par hypothèse, $n \geqslant 2$ *donc* $n \neq 1$ *et* $A \times \left[\dfrac{1}{n-1}(A + (2-n)I)\right] = I$,

donc $\quad \boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \dfrac{1}{n-1}[A + (2-n)I]}$

On peut remarquer que si $n = 2$, $A^{-1} = A$ *(c'est un cas connu).*

Corrigé question 23

HEC 2010 oral voie BL

1) $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ *donc, si* $v \in Im(f) \quad \exists u$ *tel que* $f(u) = v$ *et* $f(v) = (f \circ f)(u) = 0_E$.
Donc $Im(f) \subset \ker(f) \quad$ *(1).*
On sait, par ailleurs, que $\quad \dim(Im(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E) = 5 \quad$ *(2).*
$\dim(Im(f)) \leqslant \dim(\ker(f))$ *d'après (1)*
donc $2\dim(Im(f)) \leqslant \dim(Im(f) = +\dim(\ker(f)) = 5$ *d'après (2).*
Donc $rg(f) \leqslant \dfrac{5}{2}$ *et ainsi* $rg(f) \leqslant 2$.

2) *Notons* $\mathscr{C}$ *une base* $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ *de* E.
- *Prenons* f *tel que* $\ker(f) = Vect(e_1, e_2, e_3, e_4)$ *et* $Im(f) = Vect(e_1 + e_2)$.

Dans ce cas, $A = mat_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $rg(A) = 1$ *et* $A^2 = 0$.

- *Prenons* f *tel que* $\ker(f) = Vect(e_1, e_2, e_3)$ *et* $Im(f) = Vect(e_1, e_2)$.

Dans ce cas, $A = mat_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & a' \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $rg(A) = 2$ *et* $A^2 = 0$.

Corrigé question 24

HEC 2011 oral voie E

On pourra se référer à la question 18 qui ressemble à celle-ci, à s'y méprendre.

1) *On trouve facilement* $B = (a_i a_j) \in \mathscr{M}_n(\boldsymbol{R})$ *et* $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \in \boldsymbol{R}$.

2) *Tous les vecteurs colonne de* B *sont colinéaires à* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *donc* $rg(u) = 1$.

Donc $\dim(\ker(u))n - 1$.

$u \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(u) \Longleftrightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$

Si $a_1 \neq 0$ *(par exemple), les* $n-1$ *vecteurs* $(a_ie_1 - a_1e_j)_{i \in [\![2,n]\!]}$ *forment une base de* $\ker(u)$.

3) 0 *est valeur propre d'ordre* $n-1$.

$BX = (X\,{}^tX)X = X({}^tXX) = AX = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) X$.

Donc X *est vecteur propre de* B *associé à la valeur propre* $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

La somme des dimensions des sous espaces propres est égale à n *donc* B *est diagonalisable.*

4) $B^k = \underbrace{(X\,{}^tX)\ldots(X\,{}^tX)}_{k \text{ fois}} = X\underbrace{({}^tXX)\ldots({}^tXX)}_{k-1 \text{ fois}}\,{}^tX$

Donc $B^k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{k-1} (X\,{}^tX) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{k-1} B$

Corrigé question 25

HEC 2011 oral voie E

1) *Soit* I *la matrice identité de* $\mathscr{M}_3(\boldsymbol{R})$ *et* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$E = \{aI + bJ \ / \ (a,b) \in \boldsymbol{R}^2\} = Vect(I, J)$.

Donc E est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\boldsymbol{R})$.
(I,J) est une famille génératrice de E et, comme I et J ne sont pas colinéaires, (I,I) est une famille libre. C'est donc une base de E et E est donc bien un espace vectoriel de dimension 2.

En effectuant paisiblement le produit $M_{a,b} \times M_{a',b'}$, on trouve $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$
avec $\alpha = aa' + 2bb'$ et $\beta = a'b + ab' + bb'$
On a donc $M_{a,b} \times M_{a',b'} = M_{\alpha,\beta} \in E$.

2) *On peut remarquer que $M_{a,b} = bU + (a-b)I$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*

On sait que $U^k = 3^{k-1}U$ pour $k \geqslant 1$.
On applique la formule du binôme (bU et $(a-b)I$ commutent).

$$\begin{aligned}
M_{a,b}^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k U^k (a-b)^{n-k} I^{n-k} \\
&= \binom{n}{0}(a-b)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^k 3^{k-1} (a-b)^{n-k} U \\
&= (a-b)^n I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (3b)^k (a-b)^{n-k}\right) U \\
&= (a-b)^n I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3b)^k (a-b)^{n-k} - \binom{n}{0}(a-b)^n\right) U \\
&= (a-b)^n I + \frac{1}{3}\left[(a-b+3b)^n - (a-b)^n\right] U \\
&= (a-b)^n I + \frac{1}{3}\left[(a+2b)^n - (a-b)^n\right](I+J) \\
&= \frac{1}{3}\left[2(a-b)^n + (a+2b)^n\right] I + \frac{1}{3}\left[(a+2b)^n - (a-b)^n\right] J
\end{aligned}$$

Petites vérifications d'usage : pour $n = 0$, on retrouve bien I et pour $n = 1$, on trouve $aI + bJ$.

$$\boxed{\forall n \in \boldsymbol{N} \qquad M_{a,b}^n = \frac{1}{3}\left[2(a-b)^n + (a+2b)^n\right] I + \frac{1}{3}\left[(a+2b)^n - (a-b)^n\right] J}$$

Corrigé question 26 — *HEC 2011 oral voie E*

1) *Soit P_1 et P_2 deux polynômes de E_4 et deux réels a_1 et a_2.*

$$\begin{aligned}
\Delta(a_1P_1 + a_2P_2) = Q \text{ avec } Q(x) &= (a_1P_1 + a_2P_2)(x+2) - (a_1P_1 + a_2P_2)(x) \\
&= a_1\left[P_1(x+2) - P_1(x)\right] + a_2\left[P_2(x+2) - P_2(x)\right] \\
&= a_1Q_1(x) + a_2Q_2(x)
\end{aligned}$$

avec $\Delta(P_1) = Q_1$ et $\Delta(P_2) = Q_2$

Donc Δ est linéaire. De plus, si $deg(P) \leqslant 4$ alors $deg(Q) \leqslant 4$ aussi. Donc $\Delta(P) \in E$. Donc Δ est bien un endomorphisme de E_4.
Notons $(U_0, U_1, U_2, U_3, U_4)$ la base canonique de E_4.
$\Delta(U_0) = 1$ *et* $\Delta(U_1) = 2$.
$\Delta(U_3)(x) = (x+2)^3 - x^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 = 6x^2 + 12x + 8$

$$\Delta(U_4)(x) = (x+2)^4 - x^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 2^{4-k} x^k = 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

Donc $$\boxed{A = mat_{\mathscr{C}}(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2) *On peut aller un peu plus vite que en utilisant l'indication. La matrice $rg(A) = 4$ et, donc $\ker(\Delta)$ est de dimension 1. Or $U_0 \in \ker(\Delta)$ donc* $\boxed{\ker(\Delta) = Vect(U_0) = R_0[X]}$

3) *Toujours en regardant la matrice A, qui est triangulaire, on en déduit que 0 est la seule valeur propre. Si A était diagonalisable, A serait semblable à la matrice nulle. Or seule la matrice nulle et semblable à la matrice nulle donc A n'est pas diagonalisable.* $\boxed{\Delta \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4) *Soit $Q \in E_4$ et P un antécédent de Q s'il existe.*
S'il existe un autre antécédent R de Q, on aura $\Delta(R) = \Delta(P) = Q$ donc $\Delta(P - R) = 0$.
Donc $P - R \in \ker(\Delta)$. Donc $P - R$ est une constante..
*Si P est un antécédent de Q, $P + a$ est aussi un antécédent de Q pour tout $a \in$ **R**.*
Impossible donc qu'un polynôme Q appartenant à E_4 ait un unique antécédent par Δ.

Corrigé question 27

HEC 2011 oral voie E

1) *Calculer* $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{A^2 - I = 0}$

2) *$P(x) = x^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Donc $Sp(A) \subset \{-1, 1\}$.*

$$\begin{aligned}
(A - I)X = 0 \iff & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 2 & 2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow \frac{1}{2} L_3 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On passe z *en paramètre.* $y=z$ *puis* $x=-y+2z=z \quad (z\in \boldsymbol{R})$

$E_{(\lambda=1)}=Vect(U_1)$ *avec* $U_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}(A+I)X=0 &\iff \begin{pmatrix}2&2&-2&|&0\\2&2&-2&|&0\\2&2&-2&|&0\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{pmatrix}1&1&-1&|&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On passe y *et* z *en paramètres.* $x=-y+z$, $y=y$ *et* $z=z$.

$E_{(\lambda=-1)}=Vect(U_2,U_3)$ *avec* $U_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ *et* $U_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

On peut conclure : A *est diagonalisable car la somme des dimensions des sous espaces propres donne 3.*
On obtient une base propre en prenant (U_1,U_2,U_3).

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=P^{-1}AP \quad \text{avec } P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

Corrigé question 28 — *HEC 2017 oral voie E*

1) *Im*$(f)=F$, *donc la matrice de* f *dans la base canonique* $\mathscr{C}=(i,j,k)$ *de* $\boldsymbol{R}^3$ *est* $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\a&b&c\\a&b&c\end{pmatrix}$

$i-j\in\ker f$ *donc* $a-b=0$ *et* $2j+k\in\ker f$ *donc* $2b+c=0$, *donc* $c=-2b$ *et* $a=b$.

La matrice de f *est donc du type* $A=bM$ *avec* $M=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&1&-2\\1&1&-2\end{pmatrix}$ *On a une infinité de solutions et toutes les solutions sont colinéaires.*

2) *La question revient à savoir si* M *est diagonalisable. On remarque que* $F\subset G$ *donc* $f\circ f=0$. *On peut aussi vérifier que* $M^2=0$. *Donc* 0 *est la seule valeur propre possible. Si* f *était diagonalisable,* f *aurait comme matrice la matrice nulle. C'est impossible car cela contredit* $\dim(\ker f)=1$.

Corrigé question 29 — *HEC 2017 oral voie E*

1) **a:** *Posons* $X=\lfloor nU\rfloor$ *et* $Y=\lfloor nV\rfloor$.

$X(\Omega)=[\![0,n-1]\!]$, *car* $(X=n)$ *est presque impossible.* $X\hookrightarrow\mathscr{U}_{[\![0,n-1]\!]}$.

$$P(X=Y)=P\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}[(X=k)\cap(Y=k)]\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{n}$$

b: $(U=V) \Longrightarrow \lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor$ *donc* $(U=V) \subset (\lfloor nU \rfloor = \lfloor nV \rfloor)$
Donc, pour tout $n \in \boldsymbol{N}^*$, $P(U=V) \leqslant \dfrac{1}{n}$. *En faisant tendre* n *vers* $+\infty$, *on obtient* $P(U=V)=0$.

2) **a:** A *inversible* $\Longleftrightarrow (U \neq 0) \cap (V \neq 0)$
L'événement contraire est $U=0 \cup V=0$ *qui a pour probabilité* 0. *La probabilité demandée est donc* 1 *(événement presque certain).*

b: *Si* $U \neq V$, *alors* A *est diagonalisable. Réciproquement, si* $U=V=\lambda$, λ *est valeur propre double et comme* $A \neq \lambda I$, A *n'est pas diagonalisable.*
Donc « A est diagonalisable »$=(U \neq V)$, *événement de probabilité* 1 *d'après 1) b.*

4.2 Analyse

Corrigé question 30 — *Entraînement*

Soit f *définie par :* $\quad \forall x \in \boldsymbol{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
f *est impaire et* C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}$.
$\forall x \in \boldsymbol{R} \qquad f'(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) >$ *donc* f *est strictement croissante.*
$f(0)=0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Donc f *étant strictement croissante et continue de* $\boldsymbol{R}$ *dans* $\boldsymbol{R}$, f *est une bijection de* $\boldsymbol{R}$ *dans* $\boldsymbol{R}$.
f *est dérivable sur* $\boldsymbol{R}$*et* $f'(x)$ *ne s'annule pas, donc* f^{-1} *est dérivable et :*
$(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{2}{e^y + e^{-y}}$ $\qquad$ *en posant* $y = f^{-1}(x)$. *Or*

$$
\begin{aligned}
y = f^{-1}(x) &\Longleftrightarrow x = f(y)\\
&\Longleftrightarrow x = f(y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\\
&\Longleftrightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \text{ on pose } t = e^y\\
&\Longleftrightarrow t^2 - 2xt - 1 = 0\\
&\Longleftrightarrow t = x + \sqrt{x^2+1} \quad \text{ou} \quad t = x - \sqrt{x^2+1} < 0 \text{ qui est impossible}\\
&\Longleftrightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1}
\end{aligned}
$$

$$e^{-y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-x^2-1} = \sqrt{x^2+1} - x$$

Donc $e^y + e^{-y} = 2\sqrt{x^2+1}$ *et ainsi* $\qquad \boxed{\forall x \in \boldsymbol{R} \qquad (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$

Corrigé question 31 — *Entraînement*

$I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n \, dx.$
Pour $n = 0$, on a immédiatement $I_0 = 1$.
Commençons par montrer la convergence de I_n.
Posons $f_n(x) = (\ln(x))^n$. f_n est continue sur $]0,1]$.
On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/2}|\ln(x)|^n = 0$ donc $|f_n(x)| = o\left(\dfrac{1}{x^1 2}\right)$ au voisinage de 0.
Donc $\displaystyle\int_0^1 |f_n(x)| \, dx$ converge et I_n est donc absolument convergente donc convergente.
Soit $\varepsilon > 0$. Posons $I(\varepsilon) = \displaystyle\int_\varepsilon (\ln(x))^n \, dx$.
On introduit $u(x) = (\ln(x))^n$ et $v'(x) = 1$ donc $u'(x) = n \times \dfrac{1}{x} \times (\ln(x))^{n-1}$ et $v(x) = x$
u et v sont C^1 sur $[\varepsilon, 1]$, on peut donc intégrer par parties.
$I_n(\varepsilon) = \Big[x(\ln(x))^n\Big]_\varepsilon^1 - \displaystyle\int_\varepsilon^1 n(\ln(x))^{n-1} \, dx = -\varepsilon(\ln(\varepsilon)^n - n\int_\varepsilon^1 (\ln(x))^{n-1} \, dx.$
Donc $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_n(\varepsilon) = -n \lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_{n-1}(\varepsilon)$
Donc, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $\quad I_n = -nI_{n-1}$ et $I_0 = 1$.
Par une récurrence immédiate $\quad \boxed{\forall n \in \mathbf{N} \qquad I_n = (-1)^n n!}$

Corrigé question 32

Entraînement

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$.
$\mathscr{D}_f = \mathbf{R}^*$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
On peut prolonger f par continuité sur $\mathbf{R}$ en posant $f(0) = 1$.
f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^*$. Étudions la dérivabilité de f en 0.
On forme $\tau(h)$ le taux d'accroissement en 0 :

$$\begin{aligned}
\tau(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} &= \frac{\dfrac{h}{e^h - 1} - 1}{h} = \frac{h - e^h + 1}{h(e^h - 1)} \\
&= \frac{1 + h - \left(1 + h + \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)\right)}{h\left(h + \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)\right)} \\
&= \frac{h^2\left(-\dfrac{1}{2} + o(1)\right)}{h^2\left(1 + \dfrac{h}{2} + o(h)\right)} \\
&= \frac{-\dfrac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)}
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = -\dfrac{1}{2}$. On peut conclure $\quad \boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}}$

• *Au voisinage de* $+\infty$, $f(x) \sim xe^x$ *donc* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *L'axe des abscisses est asymptote horizontale en* $+\infty$.
• *Au voisinage de* $-\infty$, $f(x) \sim -x$ *et*

$$\begin{aligned} f(x)-(-x) &= \frac{x}{e^x-1}+x \\ &= \frac{xe^x}{e^x-1} \end{aligned}$$

On a, d'après les prépondérances, : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x)=0$, *donc* $(D)y=-x$ *est asymptote à* (C_f) *au voisinage de* $+\infty$.
$f(x)-(-x)>0$ *donc* (C_f) *est au dessus de* (D).

Corrigé question 33

Entraînement

On pose $f(x) = \int_0^{2x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
On utilise Φ *la fonction de répartition de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
$f(x) = \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\ dt + \int_0^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\ dt - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\ dt\right] \times \sqrt{2\pi}$
Donc $f(x) = \sqrt{2\pi}\,(\Phi(x)-\Phi(0)) = \sqrt{2\pi}\left(\Phi(x)-\frac{1}{2}\right)$.
Φ *est strictement croissante continue de* $\boldsymbol{R}$ *dans* $]0,1[$, *donc* f *est strictement croissante, continue de* $I = \left]-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right[$. *Donc* $\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}}$

On peut commencer par remarquer que $1 \in I$, *donc l'équation a une solution unique.*

$$\begin{aligned} f(x)=1 &\iff \sqrt{2\pi}\left(\Phi(2x)-\frac{1}{2}\right)=1 \\ &\iff \Phi(2x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{1}{2}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\frac{1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Corrigé question 34

HEC 1998 oral voie E

Il y a de multiples possibilités pour écrire une telle fonction. Utilisons un algorithme simple et efficace.
Posons $u_k = (-1)^k \frac{a^k}{k!}$. *On a* $u_k = -\frac{a}{k}\ u_{k-1}$ *pour* $k \geqslant 1$, $u_0 = 1$ *et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. *D'où le script :*

```
function y=S(n,a)
```

```
    u=1;s=u
    for k=1:n
        u=-u*a/k
        s=s+u
    end
    y=s
endfunction

disp(S(100,-1.5),exp(1.5))
```

La dernière ligne du script a pour objet que l'on obtient bien une valeur approchée de e^{-a}.

Corrigé question 35 — *HEC 2005 oral voie E*

Posons $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$
On remarque déjà que, $\forall t \in \boldsymbol{R} \qquad t^4+t^2+1 \geqslant 1$ *donc* h *est* C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}$*.*
Donc h *est intégrable sur tout segment de* $\boldsymbol{R}$*. Donc* $\mathscr{D}_f = \boldsymbol{R}$*.*
h *est paire. Donc* $f(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} h(t)\ dt$*.*
On utilise le changement de variable $u = -t$*.*
$f(-x) = \displaystyle\int_{u=x}^{u=2x} h(-u)\ (-du) = -\int_x^{2x} h(u)\ du = -f(x)$
Donc f *est impaire.*
Soit H *une primitive de* h*.* $f(x) = H(2x) - H(x)$*, donc, comme* H *est* C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}$*,* f *est aussi* C^∞ *sur* $\boldsymbol{R}$*.*
$\forall x \in \boldsymbol{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -H'(2x) - H'(x) = 2h(2x) - h(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} \\ &= \frac{2\sqrt{x^4+x^2+1} - \sqrt{16x^4+4x^2+}}{\Delta} \\ &\quad \text{avec } \Delta = \sqrt{16x^4+4x^2+} \times \sqrt{x^4+x^2+1} \end{aligned}$$

Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $A = 4(x^4+x^2+1) - (16x^4+4x^2+1) = -12x^4+3 = -3(4x^4-1)$
Si $x \in \boldsymbol{R}^+ \qquad A \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^4 \leqslant \dfrac{1}{4} \Longleftrightarrow x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	M	$\searrow$	0

Pour la limite en $+\infty$:

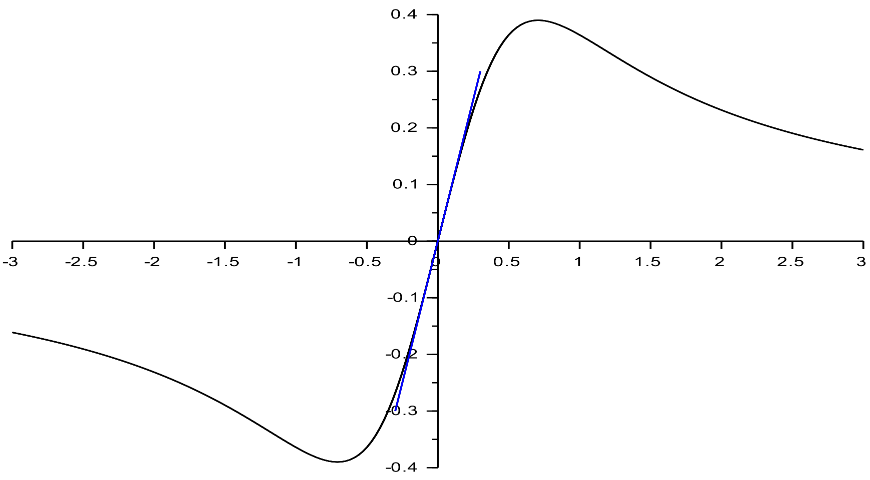
$t^4+t^2+1 \geqslant t^4$ *donc* $h(t)t^2$, *donc, quand* $x \in \boldsymbol{R}^+$ $\quad f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t}^2\, dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$

Donc, par le théorème d'encadrement : $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

L'allure de la courbe est simple à analyser. Voilà le résultat obtenu, avec le script Scilab suivant :

```
function y=f(x)
    y=integrate('1/sqrt(t^4+t^2+1)','t',x,2*x)
endfunction
x=linspace(-3,3,200)
fplot2d(x,f)
x2=linspace(-0.3,0.3,2)
plot2d(x2,x2,2)
disp(f(1/sqrt(2)))
```

Le script donne une valeur approchée de M : $M \simeq 0,38999$



Corrigé question 36

HEC 2006 oral voie S

Soit pour $n \in \boldsymbol{N}^*$, $\qquad P_n(x) = x^n + x - 1$

1) *On peut commencer par deux cas particulier.*

- $n = 1$ *: donne directement* $x_1 = \dfrac{1}{2}$.
- $n = 2$ *: l'équation du second degré* $x^2 + x + 1 = 0$ *admet une seule racine positive* $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Cas général

$\forall n \in \boldsymbol{N}^* \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^+ \quad P_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 1$.

Donc P_n est strictement croissante et continue sur $\boldsymbol{R}^+$ donc réalise une bijection de $I = \boldsymbol{R}^+$ dans $J = P(I) = [-1, +\infty[$.

Donc l'équation $(E_n) \quad P_n(x) = 0$ admet une solution unique x_n dans $\boldsymbol{R}^+$.

$P_n(1) = 1$ *donc* $x_n \in [0, 1]$.

2) *Étudions le signe de $P_{n+1}(x_n)$.*

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x_n) &= x_n^{n+1} + x_n - 1 = x_n x_n^n + x_n - 1 \\ &= = x_n(1 - x_n) + x_n - 1 \qquad \text{car } x_n^n + x_n - 1 = 0 \\ &= 2x_n - x_n^2 - 1 \\ &= -(x_n - 1)^2 < 0 \end{aligned}$$

Donc $P_{n+1}(x_n) < 0 = P_{n+1}(x_{n+1})$ donc, comme P_{n+1} est strictement croissante, $x_n < x_{n+1}$.

$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est croissante (strictement)}}$

3) *La suite (x_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge vers un réel $\ell \in [0, 1]$.*

Supposons $\ell < 1$, on aurait $x_n \leqslant \ell < 1$ donc $x_n^n \leqslant \ell^n$.

$P_n(x_n) = 0 = x_n^n + x_n - 1 \leqslant \ell^n + \ell - 1$.

En passant à la limite, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = 0$, on aurait $0 \leqslant \ell - 1$ donc $\ell \geqslant 1$. D'où une contradiction.

Donc $\ell \geqslant 1$ et finalement $\qquad \boxed{\ell = 1}$

4) *Il faut montrer que* $\quad 1 - x_n \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$ *ou encore que* $\quad x_n \geqslant 1 - \dfrac{\ln n}{n}$.

Pour cela, il suffit de montre que $P_n\left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right) \leqslant 0$

Posons $A_n = P_n\left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right)$

$A_n = \left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right)^n + \left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right) - 1 = \left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right)^n - \dfrac{\ln n}{n}$

On sait que $\qquad \forall x \in [0, 1[\qquad \ln(1 - x) \leqslant -x$.

On peut le redémontrer rapidement en posant $k(x) = \ln(1 - x) + x$.

$k'(x) = -\dfrac{1}{1-x} + 1 = -\dfrac{x}{1-x} \leqslant 0$. *$k$ est décroissante sur $[0, 1[$, et $k(0) = 0$ donc* $k(x) \leqslant 0 \qquad$ *c.q.f.d*

En prenant $x = \dfrac{\ln n}{n}$, *alors* $\qquad \ln\left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right) \leqslant -\dfrac{\ln n}{n}$.

Donc $n\ln\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right) \leqslant -\ln n \leqslant -\ln n+\ln(\ln n)$.

Ainsi $\quad \ln\left[\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n\right] \leqslant \ln\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ *ou encore* $\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{\ln n}{n}$.

Donc $A_n \leqslant 0$, *ce qui prouve le résultat.*

Corrigé question 37

HEC 2007 oral voie E

On a donc $f(x,y) = 120x-8x^2+4xy-2y^2$

1) f *est une fonction polynomiale sur* $\boldsymbol{R}^2$ *donc* f *est de classe* C^2 *sur* $\boldsymbol{R}^2$.
Commençons par chercher les points critiques de f.
$\partial_1(f)(x,y) = 120-16x+4y \quad$ *et* $\quad \partial_2(f)(x,y) = 4x-4y$

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ est un point critique de } f &\iff \partial_1(f)(x,y)=0 \quad \text{et } \partial_2(f)(x,y)=0 \\ &\iff x=y \text{ et } 16x-4y=120 \\ &\iff 12x=120 \text{ et } 12x=120 \\ &\iff x=y=10 \end{aligned}$$

f *admet un point critique unique* $A=(10,10)$.
Cherchons la matrice hessienne en A.
$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -16 \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4 \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = -4$
La matrice hessienne de f *en* A *est* $H = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.
λ *est valeur propre de* $H \iff \begin{pmatrix} -16-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}$ *non inversible.*
Cela donne la condition $-16-\lambda)(-4-\lambda)-16=0$ *donc* $\lambda^2+20\lambda+48=0$
On sait qu'il y a deux racines λ_1 *et* λ_2, *car* H *est diagonalisable (car symétrique).*
$\lambda_1\times\lambda_2 = 48$ *et* $\lambda_1+\lambda_2=-20$ *donc* λ_1 *et* λ_2 *sont négatives.*
Donc f *présente un maximum en* $A=(10,10)$ *et ce maximum vaut* $f(10,10)=600$
Reste à déterminer si ce maximum est global ou non.

$$\begin{aligned} f(x,y)-600 &= -2(y^2-2xy)-8x^2+120x-600 \\ &= -2(y-x)^2+2x^2-8x^2+120x-600 \\ &= -2(y-x)^2-6(x^2-20x+100) \\ &= -2(y-x)^2-6(x-10)^2 \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi confirmation que 600 *est un majorant atteint en* $(10,10)$ *donc un maximum global.*

2) *On a ici la contrainte* $x=23-2y$. *Dans ce cas :*
$f(x,y) = 120(23-2y)-8(23-2y)^2+4(23-2y)y-2y^2$. *Soit* $g(y)$ *l'expression obtenue.*

$$\begin{aligned} g'(y) &= 120\times(-2)-8\times 2(-2)(23-2y)+4\times 23-16y-4y \\ &= -240+32(23-2y)+92-20y \\ &= -240+23\times 36-84y \end{aligned}$$

$$g'(y) = 0 \iff y = \frac{-240 + 23 \times 36}{84} = \frac{12(-20+69)}{12 \times 7} = \frac{49}{7} = 7$$

y		7	
$g'(y)$	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	M	$\searrow$

Donc g admet un maximum pour $y = 7$. Dans ce cas $x = 23 - 2 \times 7 = 9$ et le rendement optimum est $f(9,7) = 586$

Corrigé question 38

HEC 2007 oral voie E

1) *Commençons par montrer que :* $\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$

On procède par une récurrence facile. $u_1 = 1 + u_0 \in]1,2[$

Si $u_n \in]1,2[$, $\dfrac{u_n}{n+1} \in]0,1[$ *donc* $u_{n+1} \in]1,2[$. *Du coup, on peut dire :*

$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{2}{n+1}$

Par le théorème d'encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

2) $u_n - 1 = \dfrac{u_{n-1}}{n}$, *donc* $\dfrac{u_n - 1}{\frac{1}{n}} = n(u_n - 1) = u_{n-1} \to 1$ *quand n tend vers $+\infty$. Donc* $a = 1$.

Formons maintenant $u_n - 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{u_{n-1}}{n} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{u_{n-1} - 1}{n}$

Or, d'après le calcul précédent, $u_{n-1} - 1 = \dfrac{u_{n-2}}{n-1}$

Donc $n^2\left(u_n - 1 - \dfrac{1}{n}\right) = n(u_{n-1} - 1) \sim u_{n-2} \to 1$

Donc $u_n - 1 - \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ *et ainsi* $b = \dfrac{1}{n^2}$. $\boxed{a = b = 1}$

Corrigé question 39

HEC 2008 oral voie E

Voilà un exercice presque trop classique et facile pour un oral de HEC...

1) *f est une fonction polynomiale sur $\mathbf{R}^2$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}^2$ (qui est un ouvert de $\mathbf{R}^2$).*

$\partial_1(f)(x,y) = 3x^2 - 3y \quad$ *et* $\quad \partial_2(f)(x,y) = 3y^2 - 3x$

$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 6x \quad \partial^2_{1,2}(x,y) = \partial^2_{2,1}(x,y) = -3 \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 6y$

2) *Comme on travaille sur* $\mathbf{R}^2$*, ensemble ouvert :*

$$\begin{aligned}(x,y) \text{ est un point critique de } f &\iff \partial_1(f)(x,y)=0 \quad \text{et } \partial_2(f)(x,y)=0\\ &\iff x^2-y=0 \text{ et } y^2-x=120\\ &\iff x=y^2 \text{ et } y^4=y\\ &\iff x=y^2 \text{ et } (y=1 \text{ ou } y=0)\end{aligned}$$

$\boxed{f \text{ admet deux points critiques : } A=(0,0) \text{ et } B=(1,1)}$

3) *Cherchons la matrice hessienne* H_A *de* f *en* A*.*
$H_A = \begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(f)(0,0) & \partial^2_{1,2}(f)(0,0)\\ \partial^2_{2,1}(f)(0,0) & \partial^2_{2,2}(f)(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -3 & -3 & 0\end{pmatrix}$
λ *est valeur propre de* $H_A \iff \begin{pmatrix}-\lambda & -3\\ -3 & -\lambda\end{pmatrix}$ *non inversible.*
Cela donne $\lambda^2-9=0$ *donc* $\lambda_1=3$ *et* $\lambda_2=-3$*. Deux valeurs propres de signes contraires donc pas d'extremum.*
Cherchons la matrice hessienne H_B *de* f *en* B*.*
$H_B = \begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(f)(1,1) & \partial^2_{1,2}(f)(1,1)\\ \partial^2_{2,1}(f)(1,1) & \partial^2_{2,2}(f)(1,1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -3 & -3 & 6\end{pmatrix}$
λ *est valeur propre de* $H_B \iff \begin{pmatrix}6-\lambda & -3\\ -3 & 6-\lambda\end{pmatrix}$ *non inversible.*
Cela donne $(6-\lambda)^2-9=0$ *donc* $(3-\lambda)(9-\lambda)=0$ *donc* $\lambda_1=3$ *et* $\lambda_2=9$*. Deux valeurs propres strictement positives donc*
$\boxed{f \text{ a un minimum local en } B. \text{ qui vaut } f(1,1)=0}$

On peut remarquer que $f(x,0)=x^3+1$ *et donc* $f(-2,0)<0$*. Donc* 0 *n'est pas un minimum global.*

Corrigé question 40

HEC 2009 oral voie S

1) *Posons* $f(t)=\dfrac{e^{-t}}{t}$*.* f *est continue sur* $\mathbf{R}^{+*}$ *donc sur* $[z,+\infty[$ *quand* $z>0$*.* f *est positive.*
$t^2f(t)=te^{-t}\to 0$ *quand* $t\to+\infty$ *donc* $f(t)=o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ *au voisinage de* $+\infty$*.*
On sait que $\displaystyle\int_z^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ *converge, donc par le critère de domination des intégrales des fonctions positives, l' intégrale* $J(z)=\displaystyle\int_z^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ *est convergente.*

2) *Posons* $J_A(z)=\displaystyle\int_z^{A}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$ *pour* $A>z$*.*
Prenons $u'(t)=e^{-t}$ *et* $v(t)=\dfrac{1}{t}$*, donc* $u(t)=-e^{-t}$ *et* $v'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$*.*

u et v sont C^1 sur le segment $[z,A]$, on peut donc intégrer par parties.

$$\begin{aligned}
J_A(z) &= \left[-\frac{e^{-t}}{t}\right]_z^A + \int_a^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \\
&= -\frac{e^{-A}}{A} + \frac{e^{-z}}{z} + \int_z^A \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \\
&\to \frac{e^{-z}}{z} + \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt
\end{aligned}$$

$\dfrac{J(z)}{\frac{e^{-z}}{z}} = 1 + \dfrac{z}{e^{-z}} \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt.$

Posons $K(z) = \dfrac{z}{e^{-z}} \displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt$. *On doit montrer que* $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} K(z) = 0$.

$\forall t \in [z,+\infty[\qquad \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{z^2}$ *donc* $\displaystyle\int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}\,dt \leqslant \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{z^2}\,dt = \frac{1}{z^2}\int_z^{+\infty} e^{-t}\,dt$

Or $\displaystyle\int_z^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1 - F(z)$ *avec* F *fonction de répartition d'une loi* $\mathscr{E}(1)$, *donc* $1 - F(z) = e^{-z}$.

On a donc $\quad 0 \leqslant K(z) \leqslant \dfrac{1}{z}$ *et, par le théorème d'encadrement,* $\displaystyle\lim_{z\to+\infty} K(z) = 0$

c.q.f.d.

Corrigé question 41

HEC 2010 oral voie E

$$\forall n \in \boldsymbol{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

où α est un nombre réel.

$u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-2}} \underbrace{\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]}_{=R'_n}.$

On reconnaît dans R'_n une somme des rectangles, du type $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)$.

Ici $f(x) = (x-1)\ln(x)$, $a = 1$ et $b = 2$. f est continue sur $[a,b]$, le théorème des rectangles permet d'affirmer que : $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} R'_n = \int_1^2 (x-1)\ln(x)\,dx = I.$

Calculons l'intégrale I par parties en prenant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = x - 1$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x$.

u et v sont C^1 sur $[1,2]$, on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
I &= \left[\left(\frac{1}{2}\,x^2-x\right)\ln(x)\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\,dx\\
&= 0-0-\int_1^2\left(\frac{1}{2}x-1\right)\,dx\\
&= -\left[\frac{1}{4}\,x^2-x\right]_1^2=-\left(\frac{1}{4}\times 4-2\right)+\left(\frac{1}{4}-1\right)\\
&= 1+\frac{1}{4}-1\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\qquad u_n \sim \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{n^{\alpha-2}}$ *quand* $n\to+\infty$.

Maintenant c'est facile de conclure.

- *Si* $\alpha>2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.
- *Si* $\alpha<2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
- *Si* $\alpha=2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=I=\dfrac{1}{4}$.

Corrigé question 42

HEC 2010 oral voie E

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^{+*}\times\mathbf{R}^{+*}$, *à valeurs réelles, par :*

$$f(x,y)=\frac{x^2+xy+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1) $(x,y)\mapsto\sqrt{y}$ *est de classe* C^2 *sur* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{+*}$, *donc* $(x,y)\mapsto x^2+xy+\sqrt{y}$ *est* C^2 *sur* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{+*}$.
$(x,y)\mapsto\dfrac{1}{x\sqrt{y}}$ *est* C^2 *sur* $\mathbf{R}^{+*}\times\mathbf{R}^{+*}$.
Par produit, f est de classe C^2 *sur* $\mathbf{R}^{+*}\times\mathbf{R}^{+*}$.

2) *Calculons les deux dérivées partielles d'ordre* 1.

$$\begin{aligned}
\partial_1(f)(x,y) &= \frac{(2x+y)(x\sqrt{y})-(x^2+xy+\sqrt{y})\sqrt{y}}{x^2y}\\
&= \frac{\sqrt{y}(2x^2+xy-x^2-xy-\sqrt{y})}{x^2y}\\
&= \frac{x^2-\sqrt{y}}{x^2\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2(f)(x,y) &= \frac{\left(x+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right)x\sqrt{y}-(x^2+xy+\sqrt{y})\dfrac{x}{2\sqrt{y}}}{x^2y} \\
&= \frac{x(2xy+\sqrt{y}-x^2-xy-\sqrt{y})}{2x^2y\sqrt{y}} \\
&= \frac{xy-x^2}{2xy\sqrt{y}} \\
&= \frac{y-x}{2y\sqrt{y}}
\end{aligned}$$

Donc (x,y) *est un point critique* $\iff \partial_1(f)(x,y)=\partial_2(f)(x,y)=0 \iff y=x$ *et* $x^2=\sqrt{y}$

Ce qui donne $y=x$ *et* $x^4=y$ *donc* $x^4=x$ *d'où* $x=1$ *(dans* $\boldsymbol{R}^{+*}$*).*

$\boxed{f \text{ admet un seul point critique dans } \boldsymbol{R}^{+*}\times\boldsymbol{R}^{+*} \text{ : le point } A=(1,1)}$

3) *Commençons par calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de* f.

$\partial_1(f)(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{x^2}$ *donc*

$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=\dfrac{2}{x^3}$ *et* $\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=-\dfrac{1}{2}y^{-3/2}=-\dfrac{1}{2y\sqrt{y}}$

On a $\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=\partial^2_{1,2}(f)(x,y)$ *en vertu du théorème de Schwarz.*

$\partial_2(f)(x,y)=(y-x)\left(\dfrac{1}{2}\,y^{-3/2}\right)$ *donc* $\quad \partial_{2,2}(f)x,y)=\left(\dfrac{1}{2}\,y^{-3/2}\right)+(y-x)(-3y^{-5/2})$

En particulier, au point de coordonnées $(1,1)$ *:*

$\partial^2_{1,1}(f)(1,1)=2 \quad \partial^2_{1,2}(f)(1,1)=-\dfrac{1}{2} \quad \partial^2_{2,2}(f)(1,1)=\dfrac{1}{2}$

La matrice hessienne de f *en* A *est* $H=\begin{pmatrix}\partial^2_{1,1}(f)(1,1) & \partial^2_{1,2}(f)(1,1)\\ \partial^2_{2,1}(f)(1,1) & \partial^2_{2,2}(f)(1,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

λ *est valeur propre de* $H \iff \begin{pmatrix}2-\lambda & -1/2\\ -1/2 & 1/2-\lambda\end{pmatrix}$ *non inversible.*

Cela donne $(E)\ (2-\lambda)\left(\dfrac{1}{2}-\lambda\right)-\dfrac{1}{4}=0$

$(E)\longleftrightarrow \lambda^2-\dfrac{5}{2}\lambda+\dfrac{3}{4}=0$

L'équation (E) *admet deux solutions réelles* λ_1 *et* λ_2 *(car* H *est symétrique donc diagonalisable).*

$\lambda_1\times\lambda_2=\dfrac{3}{4}>0$ *et* $\lambda_1+\lambda_2=\dfrac{5}{2}>0$ *donc* $\lambda_1>0$ *et* $\lambda_2>0$

$\boxed{f \text{ admet donc un extremum local unique sur } \boldsymbol{R}^{+*}\times\boldsymbol{R}^{+*}.}$

$\boxed{\text{C'est un minimum local atteint en } A=(1,1) \text{ qui vaut } f(1,1)=3}$

Corrigé question 43

HEC 2013 oral voie E

On pose pour tout $n\in\boldsymbol{N}^*$ *:* $\qquad S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\ln\left(\frac{k}{n}\right)$

1) $\frac{S_n}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+b\frac{b-a}{n}\right)$

avec $a=0$, $b=1$ *et* $f(x) = \begin{cases} x^2\ln(x) & si\ x > \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$

f *est continue sur* $[0,1]$, *donc on peut utiliser le théorème des "rectangles".*

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3} = \int_0^1 f(t)\,dt$. *Calculons l'intégrale sur* $[\varepsilon,1]$ *(avec* $\varepsilon>0$*) en utilisant une intégration par parties.*

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 t^2\ln(t)\,dt &= \left[\frac{t^3}{3}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^2}{3}\,dt \\
&= -\frac{\varepsilon^3}{3}\ln(\varepsilon) - \left[\frac{t^3}{9}\right]_\varepsilon^1 \\
&= -\frac{\varepsilon^3}{3}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{9} + \frac{\varepsilon^3}{9} \qquad \to -\frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3} = -\frac{1}{9}}$

2) *Posons* u_n *la suite* $\frac{S_n}{n^3}$ *et* v_n *celle étudiée en 2).*

$$\begin{aligned}
|u_n - v_n| &= \left|\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\left[\ln\left(\frac{k}{n}\right) - \ln\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]\right| \\
&= \left|\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right| \\
&= \left|-\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right| \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

Or, on sait que $\ln(1+x)\leqslant x$ *pour* $x\in\boldsymbol{R}^+$, *donc* $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\leqslant\frac{1}{k}$ *et :*

$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)}{2} \to 0$

Donc $\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\ln\left(\frac{k+1}{n}\right) = -\frac{1}{9}}$

Corrigé question 44

Entraînement

Voilà un petit exercice court et facile.

$f(x,y) = x^2+y^2-x^3$. f *est une fonction polynomiale sur* $\boldsymbol{R}^2$ *donc* f *est de classe* C^2 *sur*

$\mathbf{R}^2$.
Déterminons ses points critiques.
$\partial_1(f)(x,y) = 2x - 3x^2 = x(2-3x)$ *et* $\partial_2(f)(x,y) = 2y$.
Immédiatement, f *a deux points critiques :* $A = (0,0)$ *et* $B = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$.
Déterminons les dérivées partielles secondes :
$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 2 - 6x$, $\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 0$ *et* $\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2$

- *La matrice hessienne de* f *en* A *est* $H_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a deux valeurs propres positives, 2 *et* 2*, donc* f *présente un minimum en* A *qui vaut* $f(0,0) = 0$.

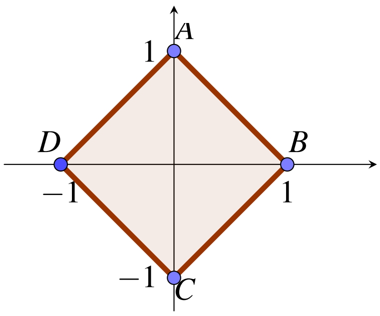
- *La matrice hessienne de* f *en* B *est* $H_B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On deux valeurs propres de signes contraires donc pas d'extremum en B.
On peut remarquer que $f(3,0) = -18 < 0$*, donc* 0 *n'est pas un maximum global de la fonction* f.

Corrigé question 45 — *HEC 2013 oral voie E (année 0)*

1) *On se place dans* $\mathbf{R}^2$*, où on définit* $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x| + |y| = 1\}$.

a: *Pas de problème :*



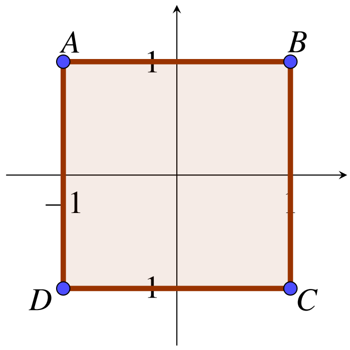
b: *Par symétrie, on va trouver* 4 *points. On cherche sur le segment* (A,B).
On est sur le droite $y = 1 - x$. *On cherche donc les extremums de* $f(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ *pour* $x \in [0,1]$.
$\forall x \in [0,1] \qquad f'(x) = 4x - 2$.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

Le maximum est atteint aux quatre points A, B, C *et* D.

c: *Le minimum est atteint aux quatre points de coordonnées* $\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)$

2) *On définit* $F=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2,\quad \max(|x|,|y|)=1\}$.



Pour la recherche des extremums, on peut se restreindre à $y=1$ *et utiliser ensuite les symétries.*
$g(x,y)=x^2+y^2=x^2+1$. g *atteint son maximum pour* $x=-1$ *et* $x=1$ *et son minimum pour* $x=0$.
Quatre points où l'on a le maximum : A, B, C *et* D.
Quatre points où l'on a le minimum : $(1{,}0)$, $(0,1)$, $(-1{,}0)$, $0,-1)$

Corrigé question 46

HEC 2016 oral voie E

1) f_n *est définie et* $\forall x\in[0,1]\quad f_n(x)=\displaystyle\int_0^x e^{nt^2}\,dt+\int_1^x e^{-nt^2}\,dt$
f_n *est donc dérivable sur* $[0,1]$ *et, pour tout* $x\in[0,1]$ *:*
$f_n'(x)=e^{nx^2}+e^{-nx^2}>0$. *Donc* f_n *est bien strictement croissante sur* $[0,1]$

2) **a:** *Posons* $\alpha=f_n(0)=-\displaystyle\int_0^1 e^{-nt^2}\,dt<0$ *et* $\beta=f_n(1)=\displaystyle\int_0^1 e^{nt^2}\,dt>0$
f_n *est continue (car dérivable) sur* $[0,1]$ *et strictement croissante, donc réalise une bijection de* $I=[0,1]$ *dans* $J=[\alpha,\beta]$.
On a vu que $0\in[\alpha,\beta]$ *donc* 0 *admet un antécédent unique* c_n *dans* $[0,1]$ ***c.q.f.d.***

b: $f_{n+1}(c_{n+1}=0$
$f_{n+1}(c_n)=\displaystyle\int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}\,dt-\int_0^{c_n} e^{-(n+1)t^2}\,dt$
$e^{(n+1)t^2}\geqslant e^{nt^2}$ *donc* $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2}\,dt\geqslant\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt \qquad (1)$
$e^{-(n+1)t^2}\leqslant e^{-nt^2}$ *donc* $\displaystyle -\int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2}\,dt\geqslant-\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt \qquad (2)$
En faisant $(1)+(2)$, *on obtient* $f_{n+1}(c_n)\geqslant f_n(c_n)=0$
que l'on peut encore écrire $f_{n+1}(c_{n+1})\leqslant f_{n+1}(c_n)$. *Donc* $c_{n+1}\leqslant c_n$ *car* f_{n+1} *est croissante.*
Donc la suite $(c_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ *est décroissante.*
Elle est évidemment minorée par 0 *donc elle est convergente.* ***c.q.f.d***

4.3 Probabilités

Corrigé question 47 *Entraînement*

Voilà une simulation ultra classique

```
function x=X()
    n=1
    while rand()<1/2 do n=n+1 end
    x=floor(1+n*rand())
endfunction
```

Soit Y le nombre de jets de la pièce. On a immédiatement $Y \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Par ailleurs, il est clair que $P_{(Y=n)}(X=k) = \frac{1}{n}$ si $k \in [\![1,n]\!]$
On fait la synthèse : $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(Y=n)}(X=k)P(Y=n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \end{aligned}$$

Difficile d'aller plus loin en général. Cherchons $P(X=1)$. Posons $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$ *si $x \in [0,1[$.*

Donc, pour $x \in [0,1[$, $P_n(x) = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x - \underbrace{\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt}_{R_n(x)}$.

On montre facilement que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

En effet, si $0 \leqslant t \leqslant x$, $1-x \leqslant 1-t \leqslant 1$ donc $1 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}$ donc $0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}t^n$.
Il n'y a plus qu'à intégrer et utiliser le théorème d'encadrement...
Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ pour $x \in [0,1[$.

En particulier, pour $x = \frac{1}{2}$, $P(X=1) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right)$. $\boxed{P(X=1) = \ln(2)}$

Corrigé question 48 *Entraînement*

Une simulation classique de X_n :

```
function x=X(n,p)
    cs=0;ce=0
    while cs<n
        if rand()<p then cs=cs+1 end
        ce=ce+1
    end
    x=ce
endfunction
```

$X_n(\Omega) = [\![n+\infty[\![$.
Avoir $X_n = k$ signifie qu'on a un succès au rang k, $n-1$ succès qu'il faut placer dans les $k-1$ expériences précédentes (et donc $k-n$ échecs).
$P(X_n = k) = p \times \binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^{n-1}$

$$\boxed{\forall k \in [\![n+\infty[\![\qquad P(X_n = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n}$$

On remarquera que pour $n = 1$, on retrouve la formule d'une loi $\mathscr{G}(p)$.

Posons $Y = \dfrac{n-1}{X_n - 1}$, pour $n > 1$.
On utilise le théorème de transfert. Sous réserve d'existence, c'est à dire de convergence, car on somme des termes positifs, donc l'absolue convergence se réduit à la convergence :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n-1}{k-1} P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n-1}{k-1} \binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-2}{n-2}(1-p)^{k-n}p^n \qquad \text{on pose } m = k-1 \\
&= \sum_{m=n-1}^{+\infty} \binom{m-1}{n-2}(1-p)^{m+1-n}p^n \\
&= p \sum_{k=n-1}^{+\infty} \binom{k-1}{n-2}(1-p)^{k-(n-1)}p^{n-1} \\
&= p \sum_{k=n-1}^{+\infty} P(X_{n-1} = k) \\
&= p
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\text{Pour } n > 1 \qquad E\left(\dfrac{n-1}{X_n - 1}\right) = p}$

Corrigé question 49

Entraînement

On a immédiatement $X(\Omega) = [\![3, n]\!]$.
$(X = k)$ signifie que lors des $k-1$ premiers tirages (sans remise), on obtient deux des

trois nombres 1,2,3, et qu'en k-eme tirage, on obtient celle qui manquait.

Donc $P(X=k) = \dfrac{\binom{3}{2}\binom{n-3}{k-3}}{\binom{n}{k-1}} \times \dfrac{1}{n-k+1}$.

Reste à simplifier : $\boxed{\forall k \in [\![3,n]\!] \qquad P(X=k) = \dfrac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}}$

$$E(X) = \sum_{k=3}^{n} kP(X=k) = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{n} (k^3 - 3k^2 + 2k)$$

.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (k^3 - 3k^2 + 2k) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\ \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{4}\ [n(n+1) - 2(2n+1) + 4] \\
&= \frac{n(n+1)}{4}\ (n^2 - 3n + 2) \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)(n-2)}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E(X) = \dfrac{3}{4}\ (n+1)}$

Corrigé question 50 — *HEC 1998 oral voie E*

Posons $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

On sait que φ *est décroissante sur* $[0,1]$ *donc* $Y(\Omega) = [\varphi(1), \varphi(0)] = \left[\dfrac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$.

$\forall t \in Y(\Omega)$ *:*

$$\begin{aligned}
P(Y \leqslant t) &= P(e^{-X^2/2} \leqslant t\sqrt{2\pi}) \\
&= P\left(-\frac{X^2}{2} \leqslant \ln(t\sqrt{2\pi})\right) \\
&= P(X^2 \geqslant -2\ln(t\sqrt{2\pi}))
\end{aligned}$$

Or si $\dfrac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ *alors* $e^{-1/2} \leqslant t\sqrt{2\pi} \leqslant 1$ *donc*
$\leqslant -\dfrac{1}{2} \leqslant \ln(t\sqrt{2\pi}) \leqslant 0$ *donc* $0 \leqslant -2\ln(t\sqrt{2\pi}) \leqslant 1$ *donc*
$P(Y \leqslant t) = P(X \geqslant \sqrt{-2\ln(t\sqrt{2\pi})}) = 1 - \sqrt{-2\ln(t\sqrt{2\pi})}$.

$$FY(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant \dfrac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \\ 1 - \sqrt{-2\ln(t\sqrt{2\pi})} & \text{si } t \in \left[\dfrac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right] \\ 1 & \text{si } t \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{cases}$$

Pour calculer $E(Y)$, on utilise le théorème de transfert (qui s'applique ici sans problème car il n'y a pas de problème de convergence pour les intégrales).

$E(Y) = \int_0^1 \varphi(t)\ dt = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi(1) - \frac{1}{2}$, *en notant Φ la fonction de répartition de la loi $\mathscr{N}(0,1)$.*

Corrigé question 51

HEC 1998 oral voie E

Notons A l'événement "le document est dans l'armoire" et T l'événement "le document est dans un des p tiroirs ouverts".

On cherche $P_{\overline{T}}(A)$.

On utilise le retournement des causes (appelé aussi formule de Bayes).

$$P_{\overline{T}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P_A(\overline{T})P(A)}{P(\overline{T})}$$

Or, d'après l'énoncé :

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P_A(\overline{T}) = \frac{\binom{n-1}{p}}{\binom{n}{p}} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} \times \frac{p!(n-p)!}{n!} = \frac{n-p}{n}$$

Pour déterminer $P(\overline{T})$, on utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(\overline{T}) &= P_A(\overline{T})P(A) + P_{\overline{A}}(\overline{T})P(\overline{A}) \\ &= \left(1 - \frac{p}{n}\right) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{p}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc $P_{\overline{T}}(A) = \dfrac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{n}\right)}{\frac{1}{2}\left(2 - \frac{p}{n}\right)}$

$$\boxed{\text{La probabilité cherchée est} \quad p = \frac{n-p}{2n-p}}$$

Corrigé question 52

HEC 1998 oral voie E

$X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ *donc* $E(X) = \frac{1}{p}$ *et* $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

On pose $Y = \frac{1}{X}$. Le théorème de transfert dit que, sous réserve d'absolue convergence,

$E(Y) = \sum_{n\in X(\Omega)} \frac{1}{n} P(X=n)$.

L'absolue convergence se réduit à la convergence,ici, car la série est à termes positifs. $X(\Omega) = \boldsymbol{N}^*$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, q^{n-1} p \\ &= \frac{q}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{n} \end{aligned}$$

Posons $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

$S_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$ *si* $x \in [0,1[$.

Donc, pour $x \in [0,1[$, $S_n(x) = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\, dt = \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x - \underbrace{\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt}_{R_n(x)}$.

On montre facilement que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

En effet, si $0 \leqslant t \leqslant x$, $1-x \leqslant 1-t \leqslant 1$ *donc* $1 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}$ *donc* $0 \leqslant \frac{t^n}{1-t} \leqslant \frac{1}{1-x}\, t^n$.

Il n'y a plus qu'à intégrer et utiliser le théorème d'encadrement...

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$ *pour* $x \in [0,1[$.

On peut conclure $\boxed{Y = \frac{1}{X} \text{ admet une espérance qui vaut } E(Y) = -\ln(p)}$

Corrigé question 53

Entraînement (court)

1) $\{A_n, B_n\}$ *est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :*
$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) = \theta a_n + P(B_n \cap A_{n+1})$
Par ailleurs, $P(B_n) = P(B_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1})$, *cette fois en utilisant le système complet* $\{A_{n+1}, B_{n+1}\}$.
Donc $1 - a_n = \theta b_n + P(B_n \cap A_{n+1})$
Donc $a_{n+1} = \theta a_n + (1-a_n) - \theta b_n = \theta a_n + (1-a_n) - \theta(1-a_n)$.
Au final $\boxed{\forall n \in \boldsymbol{N} \qquad (1)\ a_{n+1} = (2\theta-1)a_n + (1-\theta)}$

2) *La suite* (a_n) *est une suite arithmético géométrique. Le premier terme est* $a_0 = 1$.
Soit α *un point fixe. On a donc* $(2)\ \alpha = (2\theta-1)\alpha + (1-\theta)$.
En faisant $(1)-(2)$ *on obtient* $a_{n+1} - \alpha = (2\theta-1)(a_n - \alpha)$.
En posant $u_n = a_n - \alpha$, *on obtient une suite géométrique. Donc* $u_n = (2\theta-1)^n u_0$
Or (2) *donne* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et, ainsi,* $a_n - \frac{1}{2} = (2\theta-1)^n \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2\theta-1)^n$.
$\theta \in [0,1]$ *donc* $2\theta - 1 \in [0,1]$.

Si $\theta = 1$ *alors* $\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad a_n = \dfrac{1}{2}$.

Si $\theta \in [0,1[\qquad a_n = \dfrac{1}{2}\left[(2\theta-1)^n+1\right] \qquad$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Corrigé question 54

Entraînement

Voilà une situation très classique, souvent traitée en cours.

- *Pour* $n = 1$*, il y a deux chemins que l'on peut coder (H,D) et (D,H).*
- *Pour* $n = 2$*, les chemins seront (D,D,H,H), (D,H,D,H), (D,H,H,D), (H,D,H,D), (H,D,D,H),(H,H,D,D).*

Essayons de généraliser pour n *quelconque dans* $\mathbf{N}^*$.
Un chemin comportera $2n$ *lettres D ou H, avec* n *lettres H et* n *lettres D.*
On choisit les emplacements des n *lettres H et, ensuite, on place les lettres D.*

On peut conclure $\boxed{\text{Il y a } \dbinom{2n}{n} \text{ chemins différents de O à } A_n}$

Corrigé question 55

HEC 2006 oral voie S

Voilà un exercice très facile ... quand on connaît la technique.

$$\begin{aligned} A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} &= e^n \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) \qquad \text{en posant } \lambda = n \\ &= e^n F_{X_n}(n) \qquad \text{avec } X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(n) \end{aligned}$$

D'après l'application directe du théorème central limite, on sait que X_n^* *converge en loi vers la loi* $\mathscr{N}(0,1)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

$$\begin{aligned} F_{X_n}(n) &= P(X_n \leqslant n) \\ &= P\left(\frac{X_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) \\ &= P(X_n^* \leqslant 0) \\ &\to \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc, on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \sim \frac{1}{2}\, e^n$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.

Corrigé question 56

HEC 2007 oral voie E

Là aussi, un grand classique.

X *et* Y *sont deux variables aléatoires binomiales de paramètres* $(n, 1/2)$ *indépendantes.*

$(X=Y)=\bigcup_{k=0}^{n}(X=k\cap Y=k)$ *(réunion disjointe) donc*

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k\cap Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]^{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2} \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ *est le coefficient de* x^n *dans le produit* $(1+x)^n(1+x)^n$*, c'est à dire dans* $(1+x)^{2n}$

Donc $\boxed{P(X=Y)=\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$

Corrigé question 57

HEC 2007 oral voie E

1) *On utilise la formule de Poincaré :*

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C) \\ &= 3p-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C) \end{aligned}$$

On a donc $3p=P(A\cup B\cup C)+P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(B\cap C)$
Par ailleurs,
$P[(A\cap B)\cup C]=P(A\cap B)+P(C)-P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)+P(C)$
Donc $P(A\cap B)=P[(A\cap B)\cup C]-P(C)$.
De même, $P(A\cap C)=P[(A\cap C)\cup B]-P(B)$ *et* $P(B\cap C)=P[(B\cap C)\cup A]-P(A)$.
Donc $3p=P(A\cup B\cup C)+P[(A\cap B)\cup C]+P[(A\cap C)\cup B]+P[(B\cap C)\cup A]-3p$
Ainsi $6p=P(A\cup B\cup C)+P[(A\cap B)\cup C]+P[(A\cap C)\cup B]+P[(B\cap C)\cup A]\leqslant 4$
On a bien $p\leqslant\frac{2}{3}$.

2) *Imaginons un univers* Ω *dans lequel on a une partition* (U,V,W) *de trois événements de probabilité égale à* $\frac{1}{3}$.
Soit $A=U\cup V$, $B=V\cup W$ *et* $C=U\cup W$. *On a* $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{3}$.
$A\cap B=V$ *donc* $(A\cap B\cap C)=\emptyset$.

3) *On suppose en outre que* A, B *et* C *sont indépendants deux à deux.*
On a $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)=3p-3p^2$.
On sait que $p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$ *pour* $p\in[0,1]$ *donc* $P(A\cup B\cup C)\leqslant\frac{3}{4}$.
On a aussi $P[(A\cap B)\cup C]=P(A\cap B)+P(C)-0=P(A)P(B)+P(C)=p^2+p$

Comme $P[(A\cap B)\cup C]\leqslant P(A\cup B\cup C)$ *on a donc* $\quad p^2+p\leqslant \dfrac{3}{4}$

Donc $p^2+p-\dfrac{3}{4}\leqslant 0$.

Les racines de $x^2+x-\dfrac{3}{4}=0$ *sont* $x_1=\dfrac{1}{2}$ *et* $x_2=-\dfrac{3}{2}$.

Donc $p\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. *C'est le résultat attendu.*

Corrigé question 58 — *HEC 2007 oral voie E*

1) F_i *compte le nombre de succès (obtenir le jeton* i*) dans une répétition de* N *expériences identiques et indépendantes. Donc* $\boxed{F_i\hookrightarrow \mathscr{B}\left(N,\dfrac{1}{n}\right)}$

F *est le nombre total de jetons tirés donc* $F=N$ *(variable constante).* $E(F)=N$ *et* $V(F)=0$.

Si les variables F_i *étaient indépendantes, on aurait :*

$V(F)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}V(F_i)=n\times N\times\frac{1}{n}\times\left(1-\frac{1}{n}\right)=N\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Ce n'est pas le cas (sauf pour $n=1$*) donc les* F_i *ne sont pas indépendantes.*

2) $P(X_i=0)=P(F_i=0)=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^N$. *Donc*

$$\boxed{X_i\hookrightarrow\mathscr{B}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right)\quad E(X_i)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^N \text{ et } V(X_i)=\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^N\right]\left(1-\frac{1}{n}\right)^N}$$

$P_{(X_i=0)}(X_j=0)=\left(\dfrac{n-2}{n-1}\right)^N$.

Comme $P(X_j=0)=\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^N$, *les variables* X_i *et* X_j *ne sont pas indépendantes.*

Corrigé question 59 — *HEC 2008 oral voie E*

1) *La fonction* $f:x\mapsto ke^{-|x|}$ *est paire et*

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=2\int_0^{+\infty}f(t)\,dt=2k\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt=2k.\qquad \boxed{k=\frac{1}{2}}$

2) *Sans problème, on obtient :* $\begin{cases} F_X(x) & =1-\dfrac{1}{2}e^{-x} \text{ si } x\geqslant 0\\ & =\dfrac{1}{2}e^{-x} \text{ sinon}\end{cases}$

3) *On sait que la loi exponentielle* $\mathscr{E}(1)$ *admet des moments de tout ordre donc* $\displaystyle\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx$ *converge pour tout* n. *Donc, en utilisant la parité de* f, X *admet aussi des moments de tout ordre.*

Par parité : $\boxed{E(X)=0}$

Toujours en utilisant la parité, $E(X^2) = 2 \times \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = E(Y^2)$ *si* $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.
$E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = 1 + 1 = 2$. *Donc* $E(X^2) = V(X) = 2$

Corrigé question 60

HEC 2008 oral voie E

1) *F est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ donc, en particulier C^1 sur $\mathbf{R}$.*

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad F'(x) = -(-1)e^{-x}(1-e^{-x})^{-2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$$

Donc F est croissante sur $\mathbf{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
On a bien toutes les caractéristiques d'une fonction de répartition d'une variable à densité.

2) *Commençons par généraliser, pour aller plus vite.*
Notons $Y_n = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]}(X_i)$.
$Y_n \leqslant x \Longleftrightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n}(X_i \leqslant x)$, *donc* $P(Y_n \leqslant x) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x)$ *(par indépendance des X_i).*
Donc $F_{Y_n}(x) = (F_X(x))^n$.
F_{Y_n} est donc C^1 sur $\mathbf{R}$, croissante de $\mathbf{R}$ dans $]0,1[$. Il en résulte que Y_n est une variable à densité. On obtient une densité en dérivant F_{Y_n}. Or $F'_{Y_n}(x) = \dfrac{ne^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}}$.

Une densité de Y_n est donc $\qquad f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{(1+e^{-x})^{n+1}}$.

Corrigé question 61

HEC 2008 oral voie E

1) *Soit G_n la fonction de répartition de M_n. $\forall x \in \mathbf{R}$:*
$G_n(x) = P(M_n \leqslant x) = P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n}(X_i \leqslant x)\right) = \prod\limits_{k=1}^{n} P(X_i \leqslant x)$ *du fait de l'indépendance des X_i.*

Donc $G_n(x) = [F(x)]^n$, *soit* $\qquad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{2a}\right)^n & \text{si } x \in [0,2a] \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$

G_n est C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 0 et en $2a$ et G_n est continue sur $\mathbf{R}$. Donc M_n est une variable à densité. On obtient une densité g_n en dérivant G_n partout où elle est dérivable.

Si $x \in]0,2a[\qquad G'_n(x) = n\left(\dfrac{x}{2a}\right)^{n-1} \times \dfrac{1}{2a} = \dfrac{nx^{n-1}}{(2a)^n}$

Une densité de M_n est $\qquad g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,2a] \\ \dfrac{nx^{n-1}}{(2a)^n} & \text{sinon} \end{cases}$

Il n'y a pas d problème d'existence pour le cacul de l'espérance et de la variance. Calculons le moment d'ordre $k \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
E(M_n^k) &= \int_0^{2a} x^k g_n(x)\ dx = \int_0^{2a} \frac{nx^{n+k-1}}{(2a)^n}\ dx \\
&= \frac{n}{(2a)^n}\left[\frac{x^{n+k}}{n+k}\right]_0^{2a} \\
&= \frac{n}{n+k}\ \frac{(2a)^{n+k}}{(2a)^n} \\
&= \frac{n}{n+k}(2a)^k
\end{aligned}$$

En particulier $E(M_n) = \dfrac{2na}{n+1}$ *et* $E(M_n^2) = \dfrac{4na^2}{n+2}$ *Donc*

$$\begin{aligned}
V(M_n) &= E(M_n^2) - E(M_n)^2 \\
&= \frac{4na^2}{n+2} - \frac{4n^2a^2}{(n+1)^2} \\
&= \frac{4na^2[(n+1)^2 - n(n+2)]}{(n+2)(n+1)^2} \\
&= \frac{4na^2}{(n+2)(n+1)^2}
\end{aligned}$$

2) *Posons* $U_n = \dfrac{n+1}{2n}M_n$.

$E(U_n) = \dfrac{n+1}{2n}E(M_n) = \dfrac{n+1}{2n}\dfrac{2na}{n+1} = a.$

Donc U_n est bien un estimateur sans biais de $a = E(X)$.

Son risque quadratique est $R_n = V(U_n)$

$R_n = \dfrac{(n+1)^2}{4n^2}V(M_n) = \dfrac{(n+1)^2}{4n^2} \times \dfrac{4na^2}{(n+2)(n+1)^2} = \dfrac{a^2}{n(n+2)}$

V_n est un estimateur sans biais de référence de $a = E(X)$.

Son risque quadratique est $R'_n = V\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_i)$ *(par indépendance des X_k)*

$R'_n = \dfrac{1}{n^2} \times nV(X) = \dfrac{1}{n}\dfrac{(2a-0)^2}{12} = \dfrac{a^2}{3n}.$

$R'_n - R_n = a^2\left(\dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{n(n+2)}\right) = a^2\ \dfrac{(n+2)-3}{3n(n+2)} = a^2\ \dfrac{n-1}{3n(n+2)}$

Donc, pour $n > 1$, $R'_n > R_n$ donc U_n est meilleur que V_n.

On peut remarquer que pour $n = 1$, U_n et V_n se confondent. Il est donc normal que la différence des deux risques soit nulle.

Corrigé question 62

HEC 2009 oral voie E

On répond aux deux questions.
$P(U=3\cap T=0)=0.$
En effet $T=0$ *signifie que* $X_1=X_2$ *et dans ce cas* X_1+X_2 *est nécessairement pair donc* $U=3$ *n'est pas possible.*

$$\begin{aligned} P(U=3) &= P(X_1+X_2=3)=P(X_1=1\cap X_2=2)+P(X_1=2\cap X_2=1)\\ &= P(X_1=1)P(X_2=2)+P(X_1=2)P(X_2=1)=p_1q_2p_2+q_1p_1p_2\\ &= p_1p_2(q_1+q_2)\\ &= p_1p_2(2-p_1-p_2)\\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$P(T=0)\neq 0$ *donc* $P(U=3)\times P(T=0)\neq 0.$
Il en résulte que $P(U=3\cap T=0)\neq P(U=3)P(T=0)$ *donc* U *et* T *ne sont pas indépendantes.*

Corrigé question 63 — *HEC 2009 oral voie E*

1) *Sous réserve d'absolue convergence, on peut utiliser le théorème de transfert :*

$$E(g(X))=\sum_{x_i\in X(\Omega)}g(x_i)P(X=x_i)$$

Ici ce la donne : sous réserve de convergence (car tout est positif) :
$E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{1+k}P(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{1+k}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. *Examinons cette dernière série.*

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!} \qquad (\textit{en posant } i=k+1)\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda}\right)\leqslant\frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)\ \textit{existe et vaut}\ \dfrac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})}$

2) *On a déjà un des deux minimums :* $\dfrac{1}{\lambda}$. *Il reste à montrer que* $E\left(\dfrac{1}{1+X}\right)\leqslant 1.$
Posons $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ *pour* $x\in\boldsymbol{R}^{+*}$. f *est* C^∞ *sur cet ensemble*
et $f'(x)=\dfrac{xe^{-x}-1+e^{-x}}{x^2}$
$f'(x)$ *est du signe de* $h(x)=xe^{-x}-1+e^{-x}$. $h'(x)=-xe^{-x}$. *On peut faire les tableaux de variations :*

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$h(x)$	$0 \searrow$
$f'(x)$	$+$
f	$1 \searrow 0$

La limite de f en $+\infty$ ne pose pas de problème. Celle en 0 mérite plus d'attention.
Au voisinage de 0, $e^{-x} = 1 - x + o(x)$ donc $f(x) = \dfrac{x - o(x)}{x} = 1 + o(1)$.
Ainsi $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. On peut donc affirmer : $\qquad \forall x \in \mathbf{R}^{+*} \qquad f(x) \leqslant 1$.
On a bien le résultat.

Corrigé question 64 — *HEC 2009 oral voie BL*

Soit A l'ensemble des tirages avec avec 1, 2 et 3 dans le bon ordre.
Si on permute, pour chaque élément de A_n les éléments 1, 2 et 3, on obtient toutes les permutations.
Donc $3! \times Card(A_n) = n!$ ou encore $\qquad Card(A_n) = \dfrac{n!}{3!}$.

Donc $P(A_n) = \dfrac{Card(A_n)}{Card(\Omega)} = \dfrac{n!}{3 \times n!} = \dfrac{1}{6} \qquad \boxed{P(A_n) = \dfrac{1}{6}}$

Corrigé question 65 — *HEC 2010 oral voie E*

1) *$M(\omega)$ étant triangulaire, on sait que $M(\omega)$ est inversible si et seulement si $X(\omega) \neq 0$ et $Y(\omega) \neq 0$.*
Comme $X(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbf{N}^*$, $M(\omega)$ inversible est un événement certain.
Donc $\qquad \boxed{P(\{\omega \in \Omega, M(\omega) \text{inversible}\}) = 1}$

2) *X et Y sont les valeurs propres de M, car M est triangulaire.*
Donc si on note B l'événement "M est diagonalisable diagonalisable", on a $(X \neq Y) \Longrightarrow B$, donc $(X \neq Y) \subset B$.
Par ailleurs, si $X = Y$, alors, si M était diagonalisable, on aurait M semblable à XI_2 en notant I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, ce qui n'est pas vrai car seul XI_2 est semblable à XI_2.
Donc si M est diagonalisable, alors $X \neq Y$, c'est à dire $B \subset (X \neq Y)$
Au final, $B = (X \neq Y)$.
Calculons $P(\overline{B})$. On note $q = 1 - p$:

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n \cap Y=n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n) \quad \textit{par indépendance} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(q^{n-1}p\right)^2 \\
&= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} (q^2)^{n-1} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \\
&= p^2 \times \frac{1}{1-q^2} \\
&= p^2 \times \frac{1}{2p-p^2} \\
&= \frac{p}{2-p}
\end{aligned}$$

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \dfrac{p}{2-p} = \dfrac{2-p-p}{2-p}$

On peut conclure $\boxed{P(B) = \dfrac{2(1-p)}{2-p}}$

Corrigé question 66

HEC 2010 oral voie BL

$P_{(Z=n_0)}(X=k) = \dfrac{P(X=k \cap Z=n_0)}{P(Z=n_0)} = \dfrac{P(X=k) \times P(Y=n_0-k)}{P(Z=n_0)}$ *par indépendance de* X *et de* Y*.*

Or, d'après le cours, on sait que $Z = X+Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n+n,p)$*. Donc, en notant* $q = 1-p$ *:*
$P(Z=n_0) = \dbinom{2n}{n_0} p^{n_0} q^{2n-n_0}$.

$$\begin{aligned}
P_{(Z=n_0)}(X=k) &= \frac{\dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} \times \dbinom{n}{n_0-k} p^{n_0-k} q^{n-n_0+k}}{\dbinom{2n}{n_0} p^{n_0} q^{2n-n_0}} \\
&= \frac{\dbinom{n}{k}\dbinom{n}{n_0-k} p^{n_0} q^{2n-n_0}}{\dbinom{2n}{n_0} p^{n_0} q^{2n-n_0}} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n!}{(n_0-k)!(n-n_0+k)!} \times \frac{n_0!(2n-n_0)!}{(2n)!}
\end{aligned}$$

Redistribuons les rôles :

$$\begin{aligned}
P_{(Z=n_0)}(X=k) &= \frac{n_0!}{k!(n_0-k)!} \times \frac{(2n-n_0)!}{(n-k)!(2n-n_0-n-k)!} \times \frac{n!n!}{(2n)!} \\
&= \frac{\binom{n_0}{k}\binom{2n-n_0}{n-k}}{\binom{2n}{n}}
\end{aligned}$$

On reconnaît une loi de tirages sans remise : le résultat est $P(Y=k)$ avec Y nombre d'objets de type 1 quand on tire sans remise n objets dans une urne contenant $(2n)$ objets au total, avec au départ, n_0 objets de type 1, et donc $2n-n_0$ autres objets. Les initiés reconnaissent une loi dite hypergéométrique.

Corrigé question 67

HEC 2011 oral voie E

1) *Soit Z_k le nombre de souris ayant choisi la cage k ($k \in [\![1,3]\!]$). $Z_k \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.*
Soit A l'événement "une cage au moins reste vide".
$A = (Z_1=0) \cup (Z_2=0) \cup (Z_3=0)$. *Par la formule de Poincaré :*
$P(A) = P(Z_1=0)+P(Z_2=0)+P(Z_3=0)-P(Z_1=0 \cap Z_2=0)-P(Z_1=0 \cap Z_3=0)-P(Z_2=0 \cap Z_3=0)+P(Z_1=0 \cap Z_2=0 \cap Z_3=0)$
De façon claire, $(Z_1=0 \cap Z_2=0 \cap Z_3=0)$ est impossible.
$P(Z_1=0 \cap Z_2=0) = P(Z_3=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
De même pour $P(Z_1=0 \cap Z_3=0)$ et $P(Z_2=0 \cap Z_3=0)$.
$P(Z_1=0) = P(Z_2=0) = P(Z_3=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
Donc $\boxed{P(A) = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}$

2) $X(\Omega) = [\![0,2]\!]$.
On a facilement $P(X=2) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
$(X \geqslant 1)$ est l'événement A de la question précédente
$P(X=0) = P(\overline{A}) = 1-3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$.
$P(X=1) = 1-P(X=0)-P(X=2) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
$E(X) = 0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6\left(\frac{1}{3}\right)^n$

Corrigé question 68

HEC 2011 oral voie E

1) $\forall i \in \boldsymbol{N}^*$ $\quad P(X=i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\frac{1}{2}$.

Donc X *et* Y *suivent une loi géométrique* $\mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) $Z(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$.

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X=i \cap Y=k-i) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i) \qquad \textit{par indépendance de } X \textit{ et } Y \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![2, +\infty[\![\qquad P(Z=k) = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

Si $i < k$:

$$\begin{aligned} P_{(X+Y=k)}(X=i) &= \frac{P(X=i \cap X+Y=k)}{P(X+Y=k)} = \frac{P(X=i)P(Y=k-i)}{P(X+Y=k)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i}}{(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k} = \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{X_{(X+Y=k)} \hookrightarrow \mathscr{U}_{[\![1,k-1]\!]}}$

3) $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k \cap Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$

Donc $P(X=Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ $\qquad \boxed{P(X=Y) = \frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} P(X>Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{(Y=k)}(X>Y)P(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X>k)P(Y=k) \end{aligned}$$

Or $P(X>k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ *car cela signifie que les* k *premières expériences donnent un échec.*

Donc $P(X>Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$

On a déjà calculé cette somme. $\qquad \boxed{P(X>Y) = \frac{1}{3}}$

4) *C'est reparti pour deux tours ...mais ce n'est pas très drôle. On ne garantit plus les calculs.*

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 2Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P_{(Y=k)}(X \geqslant 2Y)P(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geqslant 2k)P(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > 2k-1)P(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \times 2 \\
&= 2\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{k} \\
&= 2\ \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7}
\end{aligned}$$

$$P_{[X \geqslant Y]}(X \geqslant 2Y) = \frac{P(X \geqslant Y \cap X \geqslant 2Y)}{P(X \geqslant Y)} = \frac{P(X \geqslant 2Y)}{P(X \geqslant Y)}.$$

Or $P(X \geqslant Y) = P(X = Y) + P(X > Y) = \dfrac{2}{3}$ *donc* $P_{[X \geqslant Y]}(X \geqslant 2Y) = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{7}$

$$\boxed{P(X \geqslant 2Y) = \frac{2}{7} \quad \text{et} \quad P_{[X \geqslant Y]}(X \geqslant 2Y) = \frac{3}{7}}$$

Corrigé question 69

HEC 2011 oral voie BL

$X(\Omega) = [\![k, n]\!]$.

$(X = i)$ *est l'ensemble des tirages du type*

$$(\underbrace{\ldots}_{k-1 \text{ blanches}}, B, \underbrace{\ldots}_{\text{noires}})$$

Pour dénombrer les tirages de type $(X = i)$*, on considère l'ensemble des tirages en supposant les boules numérotées (donc* $Card(\Omega) = n!$*), on choisit les emplacements des* $k-1$ *boules blanches parmi les* $i-1$ *places avant la i-ème, on place les noires aux emplacements libres et on s'autorise toutes les permutations des blanches et des noires.*

Ainsi, $Card(X = i) = \dbinom{i-1}{k-1} \times k! \times (n-k)!$ *et* $P(X = i) = \dfrac{\dbinom{i-1}{k-1} \times k! \times (n-k)!}{n!}$

On peut conclure $\boxed{\forall i \in [\![k,n]\!] \qquad P(X=i)=\dfrac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n}{k}}}$

$$E(X)=\sum_{i=k}^{n}\frac{i\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

Or, on a immédiatement $i\binom{i-1}{k-1}=k\binom{i}{k}$ *donc* $E(X)=\dfrac{k}{\binom{n}{k}}\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}$

On utilise la formule rappelée :

$$E(X)=\frac{k}{\binom{n}{k}}\binom{n+1}{k+1}=k\times\frac{k!(n-k)!}{n!}\times\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Donc $\boxed{E(X)=\dfrac{k}{k+1}(n+1)}$

Pour calculer la variance, on calculerait $E(X(X-1))$ *... c'est long et fastidieux, impossible à faire dans le petit temps autorisé.*

Corrigé question 70

HEC 2011 oral voie BL

On note X *le nombre de faces obtenues.* $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$.

$\forall k\in[\![0,n]\!] \qquad P(X=k)=\binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}.$

A *: « On obtient Face au plus une fois ».* $A=(X=0\cup(X=1)$

Donc $P(A)=P(X=0)+P(X=1)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}(1+n)$

B *: « On obtient Face au moins une fois et Pile au moins une fois ».*

$B=(X\geqslant 1)\cap(X\leqslant n-1)$

$P(\overline{B})=P(X<1\cup X>n-1)=P(X=0)+P(X=n)=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

donc $\qquad P(B)=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$(A\cap B)=(X=1)$ *donc* $P(A\cap B)=P(X=1)=n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}.$

$$P(A) \times P(B) = \frac{n+1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = P(A) \times P(B) &\iff \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\iff n = (n+1) - \frac{n+1}{2^{n-1}} \\ &\iff \frac{n+1}{2^{n-1}} = 1 \\ &\iff 2^{n-1} = n+1 \end{aligned}$$

Les deux cotés de cette égalité étant strictement croissants, la partie gauche croissant beaucoup plus vite, il n'y a qu'à regarder les premières valeurs pour trouver quand les courbes se croisent. Et c'est pour $n = 3$. $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont indépendants pour } n = 3}$

Corrigé question 71

HEC 2012 oral voie E

1) *Soit $k \in [\![1, n]\!]$.*

a: *Utilisons les propriétés de la covariance.*

$$\begin{aligned} Cov(Y_k, Y_{k+1}) &= Cov(X_k + X_{k+1}, X_{k+1} + X_{k+2}) \\ &= Cov(X_k, X_{k+1}) + Cov(X_{k+1}, X_{k+1}) + Cov(X_k, X_{k+2}) + Cov(X_{k+1}, X_{k+2}) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{Cov(Y_k, Y_{k+1}) = V(X_{k+1}) = p(1-p)}$

b: *Ultra classique.*

2) *Pour $\ell = k+1$, on a la réponse en 1). Pour $\ell > k+1$, $Cov(Y_k, Y_\ell) = 0$ par indépendance.*
(Y_k et Y_ℓ sont indépendantes par application du lemme des coalitions)

3) *On a immédiatement* $E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) = E(Y_k) = 2p$

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k\right) &= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} Cov(Y_i, Y_j)\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\left[np(1-p) + 2\sum_{i=1}^{n-1} Cov(Y_i, Y_{i+1})\right] \\ &= \frac{1}{n^2}[2np(1-p) + 2(n-1)p(1-p)] \\ &= = \frac{4n-2}{n^2}\ p(1-p) \end{aligned}$$

La variance tend donc vers 0.
Pour conclure, il suffit d'utiliser l'inégalité de Bienaymé- Tchebitchev.

Corrigé question 72

HEC 2012 oral voie E

$Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
On peut commencer par calculer $P(Y = 0)$.

$$P(Y=0) = P(X=1 \cup X=3 \cup \ldots) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} X = 2k+1\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=2k+1)$$

$$P(Y=0) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k+1-1} p = p \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k = p\ \frac{1}{1-q^2} = \frac{p}{(1-q)(1+q)} = \frac{p}{p(2-p)}$$

$$\boxed{P(Y=0) = \frac{1}{2-p}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(Y=n) = P(X=2n) = q^{2n-1}p$. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(Y=n) = q^{2n-1}p}$

Calcul de $E(Y)$ *:*

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nq^{2n-1}p \\ &= \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(q^2\right)^n \\ &= \frac{p}{q} \frac{q^2}{(1-q^2)^2} \\ &= \frac{p}{1-p} \times \frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2} \\ &= \frac{(1-p)}{p(2-p)^2} \end{aligned}$$

Corrigé question 73

HEC 2015 oral voie E

1) *On utilise le théorème de transfert (sous réserve d'absolue convergence de l'intégrale) :*
$$E\left(h_\alpha(X-q)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[|t-q| + (2\alpha-1)(t-q)\right] f(t)\ dt$$
On peut tout de suite remarquer que toutes les intégrales sont absolument convergentes du fait de l'existence de $E(X)$

On peut séparer l'intégrale en plusieurs morceaux en utilisant la linéarité :

$$\begin{aligned}
L(q) = E\left(h_\alpha(X-q)\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |t-q| f(t)\ dt + (2\alpha-1)E(X) - q(2\alpha-1) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |t-q| f(t)\ dt + (2\alpha-1)(E(X)-q) \\
&= \int_{-\infty}^{q} (q-t) f(t)\ dt + \int_{q}^{+\infty} (t-q) f(t)\ dt + (2\alpha-1)(E(X)-q) \\
&= q\int_{-\infty}^{q} f(t)\ dt - \int_{-\infty}^{q} t f(t)\ dt + \int_{q}^{+\infty} t f(t)\ dt \\
&\qquad -q\int_{q}^{+\infty} f(t)\ dt + (2\alpha-1)q \\
&= qF(q) - \int_{-\infty}^{q} t f(t)\ dt + \left(E(X) - \int_{-\infty}^{q} t f(t)\ dt\right) \\
&\qquad -q(1-F(q)) + (2\alpha-1)q \\
&= 2qF(q) - q + E(X) - 2\int_{-\infty}^{q} t f(t)\ dt + (2\alpha-1)q
\end{aligned}$$

On dérive : $L'(q) = 2\left(qf(q)+F(q)\right) - 1 - 2qf(q) + 2\alpha - 1 = 2\left[F(q) - (1-\alpha)\right]$
La dérivée s'annule et change de signe pour $q_\alpha = F^{-1}(1-\alpha)$.

q	$-\infty$		q_α		$+\infty$
$L'(q)$		$-$	0	$+$	
L		$\searrow$	$H(q_\alpha)$	$\nearrow$	

C'est le résultat attendu.

2) *On peut tout recommencer (les calculs seront évidemment plus simples). On peut aussi faire confiance au calcul général précédent :*
$q_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha) = \Phi^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0.$

Corrigé question 74

HEC 2015 oral voie E

On sait que $V(Y) = Cov(Y,Y) = Cov\left(\sum_{k=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} X_j\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} Cov(X_i,X_j)$

On sait que $\left|\dfrac{Cov(X_j,X_j)}{\sqrt{V(X_i)V(X_j)}}\right| \leqslant 1$ *par propriété du coefficient de corrélation.*

Donc $|Cov(X_i,X_j)| \leqslant \sqrt{V(X_i)V(X_j)}$ *et on sait que* $V(X_i) = p_i(1-p_i) \leqslant \dfrac{1}{4}$

Donc $|Cov(X_i, X_j)| \leqslant \frac{1}{4}$.

$V(Y) \leqslant \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} |Cov(X_i, X_j)| \leqslant n^2 \times \frac{1}{4} = \frac{n^2}{4}$ ***c.q.f.d.***