TD : Variables aléatoires discrètes 1

Exercice 1 On considère deux urnes : l'urne 1 contient trois boules noires et une boule blanche, et l'urne 2 contient quatre boules noires et une boule blanche. On choisit une urne au hasard, puis on extrait successivement et sans remise 2 boules. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Déterminer la loi de X.
On pourra s'aider d'un système complet d'événements en rapport avec le choix de l'urne.

Exercice 2 On considère une variable aléatoire X prenant les valeurs $0,1,2$ et 3 . On donne $P(X=0)=\frac{1}{3}$ et $P(X=1)=\frac{1}{2}$.
(a) Sachant que les événements $[X=2]$ et $[X=3]$ sont équiprobables, déterminer $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
(b) Donner la loi de X.
(c) Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.

Exercice 3 On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5 . On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.
(a) Donner $X(\Omega)$ et la loi de X.
(b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4 Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1;0;1\}$:

$$\mathbf{P}([\mathrm{X}=-1])=\frac{p}{2}, \quad \mathbf{P}([\mathrm{X}=0])=1-p \quad \text{et} \quad \mathbf{P}([\mathrm{X}=1])=\frac{p}{2}.$$

(a) Préciser l'espérance et la variance de X en fonction de p.
(b) Donner la loi de $Y=X^2$. Préciser son espérance et sa variance.
(c) Calculer $E(|X|)$.

Exercice 5 On considère n urnes. Dans la k-ième urne, il y a k boules numérotées de 1 à k. On tire au hasard une urne puis, une boule dans cette urne. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée. A l'aide d'un système complet d'événements qui porte sur le choix de l'urne, déterminer la loi de X.
On exprimera le résultat à l'aide des nombres $\alpha_i=\sum_{k=i}^{n} 1/k$.

Exercice 6 On réalise le jeu suivant : on lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir ou bien un pile ou bien obtenir n fois faces (n est un entier naturel fixé). On note X la variable égale au nombre de lancers effectués.
(a) Préciser le support de X.
(b) Calculer $P(X=n)$.
(c) Déterminer la loi de X.
(d) Exprimer $E(X)$ à l'aide d'une somme. Que vaut la limite de cette espérance lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 7 Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne. 1. Déterminer la loi de X et son espérance. 2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Un problème de concours. On dispose de trois pièces : une pièce numérotée 0 , pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$, une pièce numérotée 1 , donnant "pile" à coup sûr et une troisième pièce, numérotée 2 , donnant "face" à coup sûr.
On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment.
Pour tout i de $\{0,1,2\}$, on note A_i l'événement : " on choisit la pièce numérotée iˇ. Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : « on obtient "pile" au lancer numéro k » et on pose $F_k=\overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

1. (a) Déterminer $P(X=1)$.
(b) Montrer que : $\forall n \geqslant 2, P(X=n)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.
(c) En déduire la valeur de $P(X=0)$
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer .
3. Montrer que $X(X-1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que $V(X)=\frac{4}{3}$
4. Justifier que Y suit la même loi que X.
5. (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à $2, P([X=1] \cap[Y=j])=P([Y=j])$.
(b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à $2, P([X=i] \cap[Y=1])=P([X=i])$.
6.(a) Expliquer pourquoi $X+Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2 .
(b) Montrer que $P(X+Y=1)=\frac{2}{3}$.
(c) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 , on a :

$$(X+Y=n)=([X=1] \cap[Y=n-1]) \cup([Y=1] \cap[X=n-1])$$

(d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X+Y=n)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Un second problème de concours Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches, dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1 . On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire. Pour chaque i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : " le i-ème tirage donne une boule blanche ", on pose $\overline{B_i}=N_i$ et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.
2. (a) Pour tout i de $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$, justifier que $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i)=\frac{n-i}{n-i+1}$.
   (b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $P(X=k)$, pour tout k de $X(\Omega)$.
   (c) On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
3. (a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$P([X=k] \cap[Y=0])=\frac{n-k}{n(n-1)}$$

   (b) En déduire $P(Y=0)$ et l'espérance de Y.