Variables aléatoires discrètes - Compléments

Exercice 1 - Question de parité

Soit X une variable aléatoire suivant une géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

1 Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$.
Déterminer la loi de Y, puis donner son espérance et sa variance.

2 Soit Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \begin{cases} \dfrac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de Z. Justifier que Z possède une espérance et la déterminer.

Exercice 2 - Un jeu de lancers

Un joueur A dispose d'une pièce donnant PILE avec une probabilité $\frac{1}{3}$ alors qu'un joueur B dispose d'une pièce donnant PILE avec une probabilité $p \in]0;1[$.
Les résultats des lancers des pièces sont supposés indépendants et le jeu se déroule ainsi : les joueurs A et B lancent leur pièce simultanément jusqu'à ce que l'un des deux au moins obtienne PILE. Ensuite :

- si A et B obtiennent PILE en même temps, le jeu s'arrête et personne ne gagne d'argent
- sinon, le premier à obtenir PILE s'arrête et l'autre continue jusqu'à obtenir PILE également et paye un euro à son adversaire à chacun des lancers de cette série "en solitaire".
  On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A, Y pour le joueur B et $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} - \mathrm{X}$. On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1 Donner les lois des variables aléatoires X et Y. On précisera également espérance et variance pour chacune d'elles.

2 a. Interpréter les évènements $[Z=0]$, $[Z<0]$ et $[Z>0]$ dans le contexte de l'exercice.
b. Justifier que Z possède une espérance et que $\mathbb{E}(Z) = \frac{1-3p}{p}$. Pour quelles valeurs de p, le jeu est-il favorable au joueur B ?
c. Décrire l'évènement $[Z=0]$ comme union d'évènements deux à deux incompatibles. En déduire que $\mathbb{P}([Z=0]) = \frac{p}{1+2p}$.
d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}([Z=n]) = \frac{p}{1+2n}(1-p)^n$ puis en déduire $\mathbb{P}([Z>0])$ et enfin $\mathbb{P}([Z<0])$.

Exercice 3 - EDHEC technique

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q = 1-p$
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirage.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1 Dans le cas où $n=1$, reconnaître la loi de Y.
On revient au cas général.

2 Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3 Écrire un programme en Py thon permettant de simuler une réalisation des variables X et Y.

4 a. Justifier que $Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$ puis montrer que : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$.
b. Écrire, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([\mathrm{Y} = i])$ sous forme d'une somme de $n - i + 1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.
5 Justifier que Y possède une espérance et une variance.
6 a. Soient i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité :
$$i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$$
b. Montrer que :
$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^i q^{k-i}\right)$$
c. En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \frac{(n+1)p}{2}$.
7 a. Établir que si $n \in [\![2; +\infty [\![$, alors :
$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^i q^{k-i}\right)$$
b. En déduire que si $n \in [\![2; +\infty [\![$, alors $\mathbb{E}(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$.
c. Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

Exercice 4 – Avec une SRL2

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée : à chaque lancer la probabilité d'obtenir pile est de $\frac{2}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$.

1 Expliciter les événements $(X = k)$ et en déduire p_k, pour tout $k \in [\![1; 5]\!]$.
2 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3, p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$.
3 En déduire l'expression de p_n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4 Montrer que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice 5 : Une série de tirages

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages : $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$
On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.
Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2,4,1,5,9, alors on obtient : $S_1 = 2, S_2 = 6, S_3 = 7, S_4 = 12, S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.
Partie A

1 Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2 (a) Déterminer $T_n(\Omega)$ et calculer $P(T_n = 1)$.
(b)Montrer que : $P(T_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$
3 Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4 Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

Exercice 6 – Chaîne de Markov

On dispose d'une urne contenant quatre boules numérotées 1,2,3 et 4. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule avec remise et on suppose qu'à chaque tirage, chacune des boules a la même probabilité d'être tirée.
On note pour tout n de $\mathbb{N}^*, \mathrm{X}_n$ la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus en n tirages.
On a donc $\mathrm{X}_1 = 1$ et par exemple, si les premiers tirages donnent 2,2,1,2,1,4,3 alors on a : $\mathrm{X}_1 = 1, \mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{X}_3 = 2, \mathrm{X}_4 = 2, \mathrm{X}_5 = 2, \mathrm{X}_6 = 3, \mathrm{X}_7 = 4$
L'espérance et la variance d'une variable aléatoire Z sont notées respectivement $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*, \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([\mathrm{X}_n = 1]) \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) \\ \mathbb{P}([X_n = 4]) \end{pmatrix}$.

1.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2.
1.b. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X}_2)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X}_2)$.
2.a. Déterminer U_1.
2.b. Préciser l'ensemble des valeurs prises par X_n.
2.c. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation suivante : $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{AU}_n$.
On considère les quatre matrices $\mathrm{V}_1,\ \mathrm{V}_2,\ \mathrm{V}_3,\ \mathrm{V}_4$ à 4 lignes et 1 colonne, définies par $\mathrm{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathrm{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathrm{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathrm{V}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3.a. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{U}_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \mathrm{V}_1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \mathrm{V}_2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \mathrm{V}_3 + \mathrm{V}_4$
3.b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X_n.
4.a. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{E}(X_n)$.
4.b. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 7 – Une loi uniforme cachée

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. ($n \in \mathbb{N}^*$).
On tire ces jetons, un à un, sans remise, jusqu'à obtenir le numéro 1. Soit X le nombre de tirages effectués.
Donner la loi de $X, E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8 – Tirages de boules

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.
On tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.
Les réponses seront données sous forme de fraction irréductibles.
On considère les événements :

- A : « Tirer 3 boules rouges »
- B ; « Tirer 3 boules de la même couleur »
- C : « Tirer 3 boules chacune d'une couleur différente »

a) Calculer $P(A), P(B)$ et $P(C)$.
b) On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de X

c) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
d) Soit Y le nombre de boules vertes obtenues. Loi et espérance de Y.

Exercice 9– EDHEC Classique

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 . On note p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

- Soit si l'on a obtenu "Pile".
- Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
  Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement « on obtient "Pile" (respectivement "Face") au k^{eme} lancer ".
  On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus. On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1 Loi de T_n.
a) Pour tout k de $[[1, n-1]]$, déterminer la probabilité $P(T_n = k)$.
b) Déterminer $P(T_n = n)$.
c) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.

2 a) On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Écrire f sans le symbole somme, puis dériver f dans les deux expressions.
b) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}$.

3 Loi de X_n.
a) Donner la loi de X_n.
b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.

4 Loi de Y_n.
a) Déterminer, pour tout k de $[[0, n-1]]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.
b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $E(Y_n)$.